

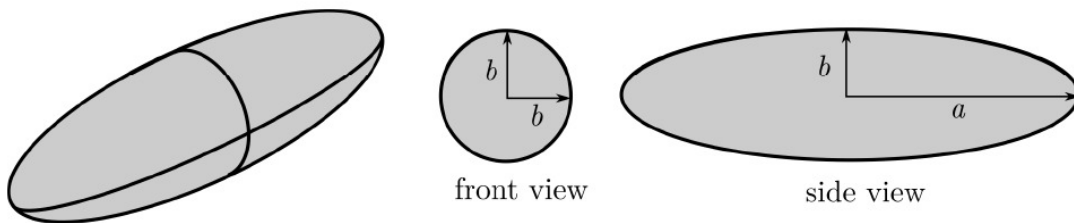
T01. Oggetto Interstellare (10 punti)

Un oggetto interstellare (ISO) entra nel sistema solare su un'orbita iperbolica. La distanza dal Sole all'asintoto della traiettoria dell'ISO (parametro d'impatto) è $p = 1.00$ au, e l'ISO ha una velocità asintotica $V_\infty = 26 \text{ km s}^{-1}$ nel sistema di riferimento del Sole.

a) (5 punti) Determinare la distanza al perielio r_p dell'ISO (in metri).

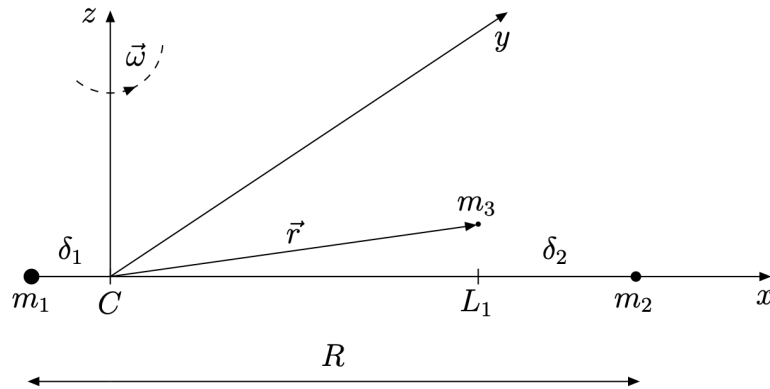
b) (2 punti) Calcolare la temperatura superficiale di equilibrio T dell'oggetto al perielio, assumendo che l'ISO sia sferico, in rotazione rapida e abbia una superficie di corpo nero ideale composta da ghiaccio d'acqua. Nello spazio il ghiaccio d'acqua sublima a 120 K. Ci aspettiamo che il ghiaccio sulla superficie dell'ISO sublimi? Scrivere SÌ / NO come risposta finale.

c) (3 punti) Le osservazioni mostrano che la magnitudine apparente dell'oggetto varia periodicamente con un'ampiezza picco-picco della curva di luce di 2.0 mag dovuta alla sua rotazione, rivelando la forma non sferica dell'ISO. Si assuma che l'oggetto sia un ellissoide e che il flusso sia proporzionale all'area proiettata durante la rotazione e che l'ISO ruoti attorno al suo asse minore, che è perpendicolare alla linea di vista. Stimare il rapporto tra l'asse maggiore e quello minore dell'oggetto, a/b .



T02. Oscillazione Attorno a un Punto di Lagrange (10 punti)

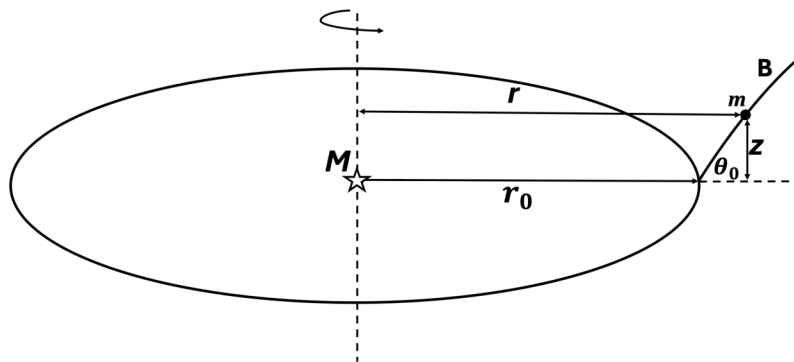
Un sistema binario, le cui masse m_1 e m_2 sono gerarchiche, $m_1 \gg m_2$, e separate da una distanza R , orbita circolarmente attorno al proprio centro di massa, C . Il sistema di riferimento rotante $Cxyz$ ha l'asse x — che punta da m_1 verso m_2 e l'asse z — orientato con la velocità angolare del sistema, $\vec{\omega}$. Un satellite la cui massa m_3 è molto più piccola di m_1, m_2 oscilla nella direzione z attorno al punto di Lagrange L_1 che giace sul segmento che connette m_1 e m_2 . Siano δ_1 e δ_2 le distanze rispettivamente da C a m_1 e da L_1 a m_2 .



- a) (5 punti) Determinare δ_1 e δ_2 come funzioni di m_1 , m_2 e R approssimando al primo ordine.
- b) (3 punti) Trovare l'equazione del moto del satellite lungo l'asse z .
- c) (2 punti) Stimare il periodo T delle piccole oscillazioni del satellite nella direzione z per il sistema Terra-Sole.

T03. Venti Stellari Lanciati Lungo le Linee del Campo Magnetico (10 punti)

Il momento angolare dovuto a un disco di accrescimento kepleriano circolare attorno a una giovane stella di massa M , viene rimosso dai venti stellari. Le particelle del vento scivolano senza attrito lungo le linee del campo magnetico e in corotazione con il disco. Si consideri una particella del vento di massa m al raggio r e altezza z che si muove lungo una linea del campo magnetico, che ruota con il disco al raggio r_0 e che è inclinata di un angolo θ_0 .



- a) (2 punti) Nel sistema di riferimento in corotazione con la particella, ricavare $\Phi_{\text{eff}}(r, z)$, definito come l'energia potenziale dovuta alla gravità della stella e alla forza centrifuga.
- b) (5 punti) Introducendo la variabile $x = \frac{r-r_0}{r_0}$, scrivere Φ_{eff} nelle vicinanze di r_0 all'approssimazione del secondo ordine in x . Trovare l'angolo di inclinazione θ_0 affinché la

particella possa essere allontanata dal disco. Suggerimento: $(1 + u)^{-1/2} \approx 1 - \frac{u}{2} + \frac{3}{8}u^2$ con $|u| \ll 1$.

c) (3 punti) Al raggio $r = r_A$, le particelle iniziano a disaccoppiarsi dal campo magnetico. Il vento lanciato da r_0 ha un tasso di perdita di massa ΔM_w mentre il tasso di accrescimento è ΔM_{acc} . Se tutto il momento angolare di accrescimento viene rimosso dal vento, dimostrare che $\frac{\Delta M_{acc}}{\Delta M_w} = \left(\frac{r_A}{r_0}\right)^2$.

T04. Il Grande Oscuramento di Betelgeuse (10 punti)

Tra la fine del 2019 e l'inizio del 2020, la supergigante rossa Betelgeuse ha subito un insolito evento di diminuzione di luminosità noto come il "Grande Oscuramento" (Figura T04.1). Una spiegazione è che la stella ha espulso del materiale che ha formato un ammasso di polvere, oscurando il disco stellare. Si supponga che l'oscuramento sia avvenuto in corrispondenza di un normale minimo di pulsazione e sia stato causato interamente dall'ammasso di polvere cilindrico che copriva l'80% del disco stellare.

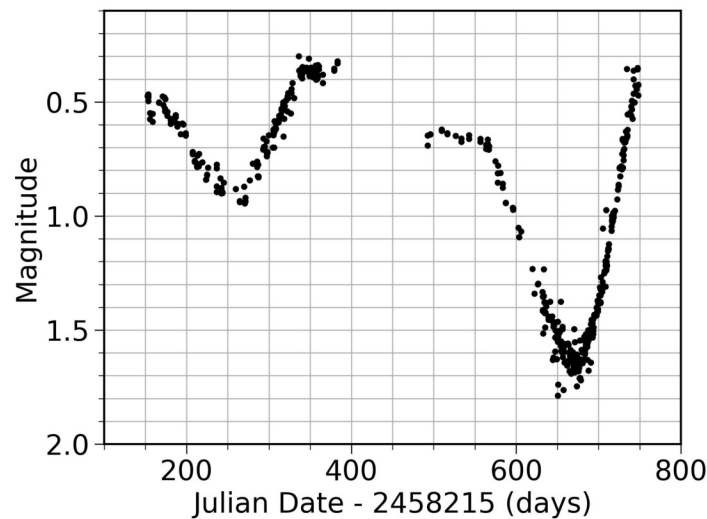


Figura T04.1. Curva di luce visuale di Betelgeuse.

- (2,5 punti) Stimare il rapporto (k_1) della luminosità osservata al minimo di luce rispetto a quella di un normale minimo di pulsazione.
- (2.5 punti) Stimare la frazione (k_2) di luce trasmessa attraverso la regione oscurata.
- (1.5 punti) Calcolare la profondità ottica τ dell'ammasso di polvere.
- (3,5 punti) Assumendo un coefficiente di assorbimento di massa della polvere $\kappa = 1000. \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$, un rapporto massa gas-polvere di 200., e un raggio di Betelgeuse di $1000 R_\odot$, stimare la massa totale (M_{eject}) del materiale espulso in unità di $M_\odot$.

T05. Buchi Neri Primordiali (10 punti)

Un buco nero primordiale (PBH) è un ipotetico buco nero, che si presume si sia formato molto presto dopo il Big Bang.

a) (5 punti) Trovare l'espressione della massa iniziale M di un PBH, considerando che la densità cosmologica a un tempo t dopo il Big Bang è $\rho_c \sim 1/(Gt^2)$ e il PBH è assunto essere una sfera omogenea avente un raggio identico al raggio di Schwarzschild.

b) (5 punti) Stimare la massa iniziale e il tempo di formazione dei PBH dopo il Big Bang tali che che stiano ancora evaporando, sapendo che il tempo di evaporazione di un buco nero è $\tau(M) = 10^{67} (M/M_\odot)^3$ (yr).

T06. Neutrini Solari: Dalle Misure Sperimentali ai Modelli della Temperatura del Nucleo (20 punti)

I neutrini solari ad alta energia provenienti dalla catena pp-III vengono rilevati da esperimenti terrestri come il Super-Kamiokande e utilizzati per studiare le proprietà del nucleo del Sole.

a) (5 punti) Il flusso di neutrini pp-III sulla Terra è $\Phi = 5.1 \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Il rivelatore Super-Kamiokande è un serbatoio contenente $5.0 \times 10^7 \text{ kg}$ di acqua pura H_2O . La massa molare dell' (H_2O) è 18 g/mol . La sua efficienza di rilevamento è $\eta = 44.5\%$. Si supponga che i neutrini solari interagiscano con il rivelatore solo attraverso la diffusione elastica (scattering) con gli elettroni. La sezione d'urto media dell'interazione neutrino-elettrone nell'acqua è $\sigma \approx 1.0 \times 10^{-44} \text{ cm}^2$. Fisicamente, σ può essere interpretata come l'area bersaglio efficace che un neutrino vede quando si avvicina a un elettrone; un valore maggiore di σ implica una maggiore probabilità di collisione. Calcolare il numero di eventi rilevati in un singolo giorno N_ν (24 ore).

b) (6 punti) I neutrini (ν) vengono rilevati indirettamente tramite la radiazione Cherenkov emessa dagli elettroni diffusi (e^-), ovvero come prodotto della reazione di scattering elettrone-neutrino $\nu + e^- \rightarrow e^- + \nu$, nell'acqua (indice di rifrazione $n = 1.33$). Questo evento si verifica quando la velocità dell'elettrone soddisfa $v \geq c/n$. Pertanto, dobbiamo utilizzare la meccanica relativistica. L'energia cinetica relativistica dell'elettrone è data da $K = (\gamma - 1)m_e c^2$, dove il fattore di Lorentz γ è

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

L'energia post-scattering del neutrino (E'_ν) è correlata al valore pre-scattering (E_ν) come

$$E'_\nu = \frac{E_\nu}{1 + \frac{E_\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

dove θ è l'angolo di scattering del neutrino. Assumendo che l'energia cinetica e di legame iniziale dell'elettrone siano trascurabili, determinare l'energia minima iniziale del neutrino ($E_{\nu, \min}$) in MeV necessaria per generare un evento di radiazione Cherenkov.

c) (9 punti) Il tasso di reazione solare pp-III $R(T)$ dipende dalla temperatura del nucleo T tramite l'equazione di Gamow $R(T) = R_0 e^{-BT^{-\frac{1}{3}}}$, dove R_0 è una costante, $B = 17757 \text{ K}^{1/3}$ è il fattore di Gamow, e $T = 1.5 \times 10^7 \text{ K}$ è la temperatura del nucleo stazionario.

Supponiamo che la temperatura fluttui leggermente ($T \rightarrow T + \Delta T$), causando una piccola variazione frazionaria del tasso di reazione ($R \rightarrow R + \Delta R$). La relazione tra la variazione frazionaria del tasso di reazione e la temperatura è nella forma $\frac{\Delta R}{R} = \alpha \frac{\Delta T}{T}$, dove α è il coefficiente di sensibilità termica. Esprimere α in termini di B e T . Se il numero di eventi rilevati dal rivelatore Super-Kamiokande in un singolo giorno aumenta del 2%, calcolare la corrispondente variazione percentuale della temperatura del nucleo del Sole.

Suggerimenti: $(1+x)^\delta \approx 1 + \delta x$ e $\ln(1+x) \approx x$ per $|x| \ll 1$.

T07. Punto cieco allo zenit (15 punti)

Un osservatore ad Hanoi (latitudine esattamente $\phi = 21^\circ \text{ N}$) utilizza un telescopio altazimutale che ha una velocità massima di inseguimento azimutale di $1.0^\circ/\text{s}$, per osservare Zeta Tauri (declinazione $\delta = +21^\circ 08' 33''$). Quando un oggetto transita vicino allo zenit, la velocità angolare di inseguimento richiesta aumenta bruscamente. Se la velocità angolare richiesta supera la velocità massima del motore, il telescopio perde l'oggetto puntato. Questo problema è noto come "punto cieco allo zenit" o "blocco cardanico" (Gimbal lock). La posizione della stella è definita dal suo azimut (A), dalla distanza zenitale (z) e dall'angolo orario (H). Si noti che A è misurato verso Est a partire dal Nord e H è misurato verso Ovest a partire dal Sud.

a) (4 punti) Mostrare che, affinché il telescopio possa seguire la stella, la velocità angolare azimutale richiesta al transito meridiano è data da $\omega_A = -\omega_\oplus \frac{\cos \delta}{\sin z}$ dove $\omega_\oplus = 15^\circ/\text{hr}$ è la velocità di rotazione siderale della Terra.

b) (4 punti) Calcolare la distanza zenitale minima ($z_{\min}$) raggiunta da Zeta Tauri durante il suo transito e il raggio del punto cieco (z_{limit}) in arcosecondi. Dimostrare che Zeta Tauri cade nel punto cieco del telescopio durante il suo transito su Hanoi.

c) (3 punti) Supponendo che il percorso della stella nel cielo vicino lo zenit possa essere approssimato come una linea retta, calcolare il tempo totale Δt (in secondi) che Zeta Tauri trascorre all'interno della zona cieca del telescopio.

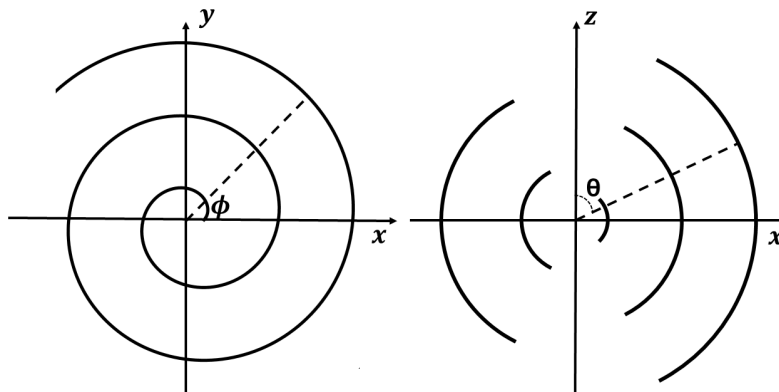
d) (4 punti) Supponiamo che una stella passi esattamente allo zenit; trovare le latitudini dell'osservatore $\phi_{\max}$ e $\phi_{\min}$ tali che le dimensioni delle zone cieche siano rispettivamente massima e minima.

T08. Spirali di Stelle Evolute (25 punti)

La gigante rossa AFGL 3068 si trova a circa 1.0 kpc dalla Terra. Le sue immagini mostrano una spirale quasi archimedea con una spaziatura costante tra i bracci, descritta da $r = a + b\phi$ dove a e b sono costanti e ϕ è l'angolo azimutale in radianti.



Tale struttura a spirale può formarsi attorno a un sistema binario. Una gigante rossa con un vento stellare veloce che orbita attorno al centro di massa del sistema binario produce un sottile guscio di maggiore densità che si espande radialmente alla velocità del vento V_w nel sistema di riferimento del centro di massa. Le sue forme sia sul piano orbitale (Oxy) che su un piano perpendicolare (Oxz) sono mostrate qui sotto, dove ϕ e θ indicano rispettivamente gli angoli azimutale e polare. Siano r_p e V_p rispettivamente il raggio orbitale e la velocità della gigante rossa.



Parte 1 (10 punti):

a) (2 punti) La spaziatura dei bracci di AFGL 3068 proiettata nel cielo è 2.29 arcsec. Determinare la costante b in au rad^{-1} .

b) (4 punti) In ogni punto della traiettoria della gigante rossa, consideriamo solo il vento che si muove radialmente verso l'esterno rispetto al centro del sistema binario. Mostrare che, sul piano orbitale, il guscio forma una struttura a spirale di Archimede con $a = r_p$ e $b = \frac{r_p V_w}{V_p}$.

c) (2 punti) La velocità del vento di AFGL 3068 è $V_w = 14.0 \text{ km s}^{-1}$. Calcola il suo periodo orbitale T in anni.

d) (2 punti) La massa totale del sistema binario è $6.6 M_\odot$. Calcolare la separazione d tra le due stelle in au.

Parte 2 (15 punti): Si supponga che il piano orbitale sia inclinato di un angolo i rispetto al piano del cielo. L'asse x è lungo l'intersezione del piano orbitale e di quello del cielo. r_p è trascurabile rispetto alle dimensioni della spirale.

a) (6 punti) Esprimere le coordinate x, y, z e le velocità (V_x, V_y, V_z) di un elemento di guscio (shell) in termini dei parametri (ϕ, θ) .

b) (7 punti) Mostrare che tutti gli elementi del guscio (shell) che hanno velocità lungo la linea di vista $V_{\text{los}} = 0$ soddisfano l'equazione di un'ellisse sul piano del cielo con due semiassi di $r \sin \theta$ e $r \sin \theta / \cos i$.

c) (2 punti) Recenti immagini della riga CO per gli elementi della shell con $V_{\text{los}} = 0$ mostrano che la struttura a spirale di AFGL 3068 è leggermente allungata rispetto a una spirale di Archimede. La struttura allungata è ben descritta da ellissi con un rapporto di 1.1 tra i due semiassi. Determinare l'angolo di inclinazione i .

T09. Lente Gravitazionale e Ritardo (20 punti)

Parte 1 (15 punti): Anello di Einstein

A febbraio 2025, la missione Euclid ha osservato un anello di Einstein attorno alla vicina galassia ellittica NGC 6505, situata a una distanza d_L dalla Terra (Figura T09.1). L'anello si forma quando la luce proveniente da una galassia sorgente, che si trova a una distanza $d_S \gg d_L$, passa vicino a NGC 6505 e viene deflessa dal suo campo gravitazionale.

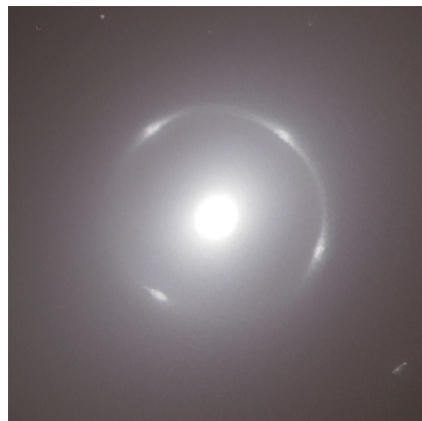


Figura T09.1. Immagine Euclid di NGC 6505 e dell'anello di Einstein che la circonda.

Fonte: ESA/Euclid/Euclid Consortium/NASA.

a) (2 punti) I redshift misurati della galassia sorgente e della galassia lente sono rispettivamente 0.406 e 0.042. Calcola d_S e d_L (in Mpc) assumendo che l'approssimazione newtoniana sia valida e che la distanza sia proporzionale al redshift.

b) (3 punti) Nell'approssimazione lineare, come mostrato nella Figura T09.2, l'angolo di deflessione totale di un raggio di luce emesso dalla sorgente e che raggiunge l'osservatore è dato da $2\alpha = 2R^*/b$, dove R^* è il raggio di Schwarzschild della lente e b è la distanza di minimo avvicinamento del raggio di luce al centro della lente. Esprimere il raggio angolare θ dell'anello di Einstein in funzione di R^* , d_S e d_L .

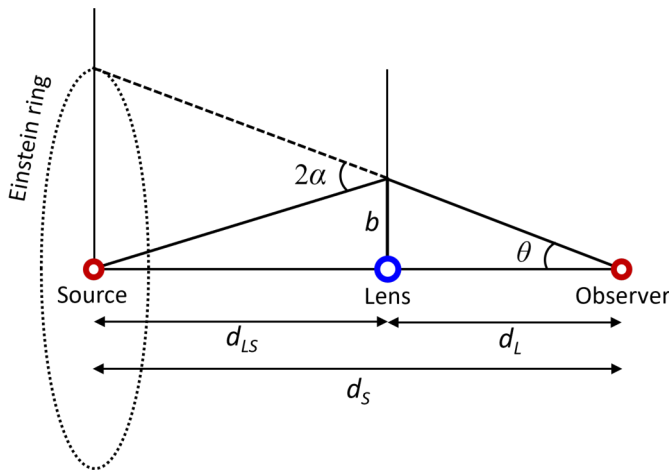


Figura T09.2. Geometria semplificata della formazione dell'anello di Einstein.

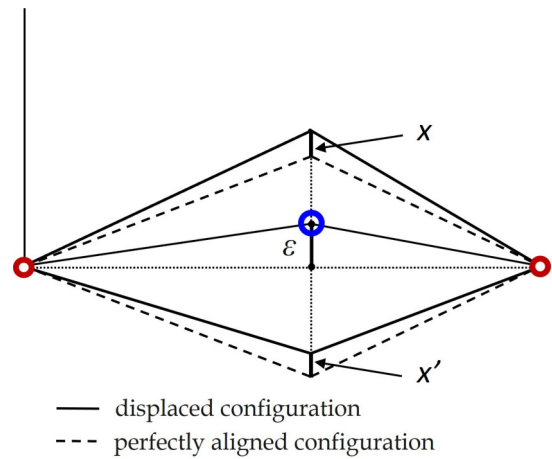


Figura T09.3. Geometria ottenuta quando la galassia lente è spostata.

c) (3 punti) Secondo le misure di Euclid, il raggio angolare dell'anello attorno a NGC 6505 è 2.5 arcsec. Determinare la distanza di minimo avvicinamento b (in parsec) e la massa della galassia lente M (in unità di $M_\odot$).

d) (7 punti) Supponiamo che la lente sia spostata di una piccola distanza ε rispetto alla retta che congiunge la sorgente e l'osservatore ($\varepsilon \ll b$) come illustrato nella Figura T09.3. Determinare le quantità x e x' (indicate nella figura), nonché lo spostamento angolare $\Delta\theta$ dell'immagine dell'anello di Einstein.

Parte 2 (5 punti): Ritardo Gravitazionale

Consideriamo ora la luce deflessa dal Sole.

- a) (2 punti) Calcolare l'angolo di deflessione totale 2α (in arcsec) di un raggio di luce che sfiora la superficie del Sole.
- b) (3 punti) Un raggio di luce che si propaga nel campo gravitazionale di un oggetto massiccio, subisce un tempo di percorrenza aggiuntivo, noto come ritardo gravitazionale (δ).

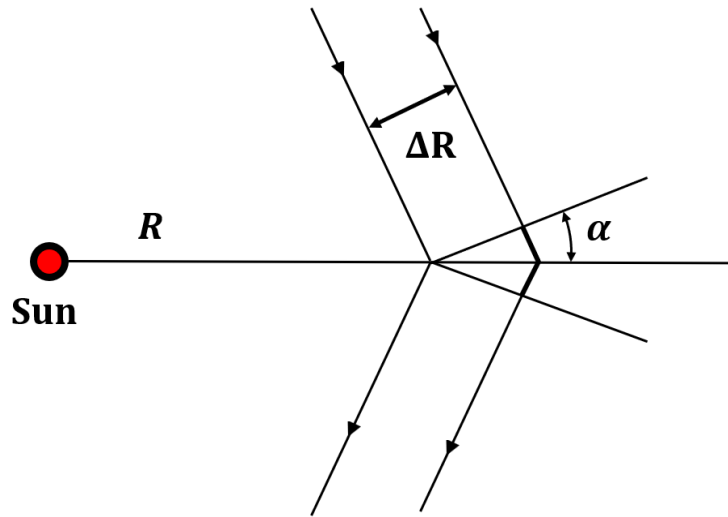


Figura T09.4. Geometria semplificata della deflessione della luce e del ritardo gravitazionale.

Si considerino due raggi di luce che passano vicino al Sole con distanze di minimo avvicinamento (R) che differiscono di una piccola quantità ΔR (Figura T09.4). Il raggio con la distanza di minimo avvicinamento maggiore percorre una lunghezza di cammino aggiuntiva di circa $2\alpha\Delta R$, che dà luogo a una differenza nel ritardo gravitazionale $\Delta\delta \sim 2\alpha\Delta R/c$. Pertanto, il valore assoluto della derivata del ritardo gravitazionale è

$$\frac{d\delta}{dR} = \frac{2\alpha}{c}$$

Determinare il ritardo gravitazionale per un segnale luminoso proveniente da una sorgente distante che passa vicino alla superficie del Sole e che raggiunge la Terra.

T10. La Parametrizzazione di Chevallier-Polarski-Linder per l'Energia Oscura Dinamica (20 punti)

Consideriamo l'energia oscura dinamica, parametrizzata da un'equazione di stato,

$$w_{\text{DE}}(z) = \frac{P_{\text{DE}}}{c^2 \rho_{\text{DE}}}$$

dove $w_{\text{DE}}(z)$ è una funzione del redshift z , mentre P_{DE} e ρ_{DE} sono rispettivamente la pressione e la densità dell'energia oscura.

a) (5 punti) Nello spaziotempo spazialmente piatto di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker, l'equazione di conservazione dell'energia oscura è

$$\dot{\rho}_{\text{DE}} + 3H \left(\rho_{\text{DE}} + \frac{P_{\text{DE}}}{c^2} \right) = 0$$

dove $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ è il parametro di Hubble, $a(t)$ è il fattore di scala e t è il tempo cosmico. D'ora in poi, un punto sopra una quantità ne indica la derivata rispetto al tempo. Mostrare che

$$\rho_{\text{DE}}(z) = \rho_{\text{DE},0} \exp \left[\int_0^z \frac{3[1 + w_{\text{DE}}(z')]}{1 + z'} dz' \right]$$

dove $\rho_{\text{DE},0} = \rho_{\text{DE}}(t_0)$, a condizione che $\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z$, con t_0 che indica il tempo cosmico attuale. Con $a(t_0) = 1$ scelto per convenienza.

b) (5 punti) Consideriamo l'equazione di Friedmann,

$$3H^2 = 8\pi G (\rho_{\text{m}} + \rho_{\text{DE}})$$

dove ρ_{m} è la densità della materia (ordinaria e oscura). Quando la pressione della materia è trascurabile, l'equazione di conservazione della materia è

$$\dot{\rho}_{\text{m}} + 3H\rho_{\text{m}} = 0$$

Mostra che il parametro di evoluzione $E(z) = \frac{H(z)}{H_0}$ soddisfa la relazione

$$E^2(z) = \Omega_{\text{m},0}(1+z)^3 + \Omega_{\text{DE},0} \exp \left\{ \int_0^z \frac{3[1 + w_{\text{DE}}(z')]}{1 + z'} dz' \right\}$$

dove $\Omega_{\text{m},0} = \frac{\rho_{\text{m},0}}{\rho_{\text{crit},0}}$, $\Omega_{\text{DE},0} = \frac{\rho_{\text{DE},0}}{\rho_{\text{crit},0}}$, $\rho_{\text{crit},0} = \frac{3H_0^2}{(8\pi G)}$, $H_0 = H(t_0)$, e $\rho_{\text{m},0} = \rho_{\text{m}}(t_0)$.

c) (5 punti) Considera la parametrizzazione di Chevallier-Polarski-Linder,

$$w_{\text{DE}}(a) = w_0 + w_a(1 - a)$$

dove w_0 e w_a sono coefficienti. Si noti che $a(t_0) = 1$. Trova il corrispondente $E^2(z)$.

d) (5 punti) La materia si aggrega quando domina sull'energia oscura. Determina la condizione necessaria su $w_0 + w_a$ affinché la materia possa aggregarsi nei tempi primordiali ad alti redshift $z \gg 1$.

T11. Fisica dell'interno di Giove (50 punti)

Giove è il pianeta più grande del nostro Sistema Solare. La sua massa e il suo raggio sono rispettivamente $M_J = 1.90 \times 10^{27}$ kg e $R_J = 6.99 \times 10^7$ m. In questo contesto, studiamo la struttura interna di Giove utilizzando un modello semplificato. Come mostrato nella Figura T11.1, si assume che questo gigante gassoso contenga due regioni distinte: un nucleo denso e un involucro fluido. Mentre il nucleo denso è interamente composto di roccia, l'involucro fluido è completamente composto di idrogeno. Le densità di massa della roccia (ρ_Z) e dell'idrogeno (ρ_H) sono date da

$$\rho_Z = \text{const}, \quad \rho_H = \sqrt{\frac{P}{K}}$$

dove P è la pressione idrostatica e K è il coefficiente politropico. Lo spazio esterno a Giove è considerato un vuoto assoluto. Si trascurino gli effetti della rotazione per ottenere una perfetta simmetria sferica. Queste approssimazioni ci permettono di studiare le proprietà strutturali di Giove tramite un'unica variabile spaziale: la distanza r dal centro O .

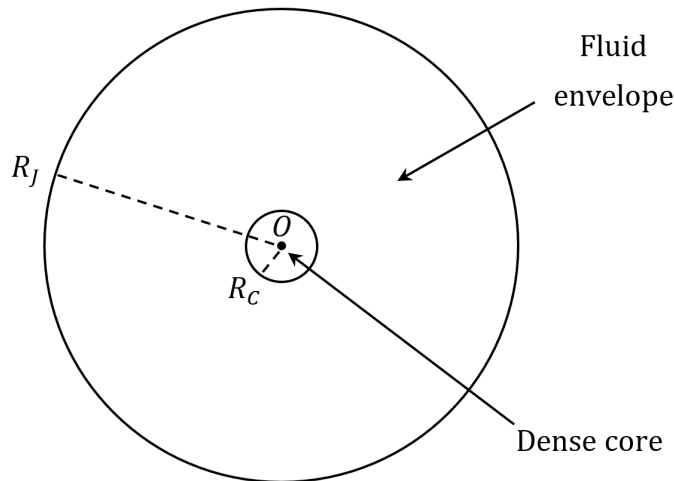


Figura T11.1. Modello preliminare dell'interno di Giove.

Parte 1 (23 punti):

Si supponga che il nucleo denso non venga eroso dall'involucro fluido. In questo caso, P diminuisce da $P_O = 7.13 \times 10^{12}$ Pa al centro ($r = 0$) fino a $P_C = 3.98 \times 10^{12}$ Pa al confine nucleo-involucro ($r = R_C = 1.05 \times 10^7$ m). Il coefficiente politropico dell'idrogeno puro è $K = 2.12 \times 10^5 \text{ m}^5 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

- (6 punti) Trovare il valore di ρ_Z .
- (6 punti) Poiché l'involucro fluido è equivalente a un semplice politropo ($P \propto \rho_H^2$), la sua densità dipende dalla distanza come

$$\rho_H = \frac{A}{r} \cos\left(\frac{r}{R} + \varphi\right)$$

dove R è il raggio caratteristico, A è il fattore di ampiezza e φ è la costante di fase. Considerato che

$$R = 2.25 \times 10^7 \text{ m}, \quad A > 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

Determinare A e φ .

c) (8 punti) Realizzate i grafici della densità e della pressione in funzione della distanza per l'intero interno di Giove. Ogni grafico deve essere composto da almeno sei punti distinti.

d) (3 punti) Calcolare la massa del nucleo denso M_Z e la massa dell'involucro fluido M_H .

Parte 2 (27 punti):

Studi recenti mostrano che i pianeti giganti possono subire un'erosione del nucleo a causa dell'elevata solubilità della roccia nell'idrogeno. Per Giove, questo processo contribuisce a ridistribuire i materiali pesanti e leggeri in tutto il suo interno. Quando il nucleo denso scompare, Giove diventa una miscela ideale di roccia e idrogeno in equilibrio. Trascurare tutte le possibili reazioni chimiche. Per una data posizione all'interno di Giove, la frazione in massa della roccia Z è definita da

$$Z = \frac{dm_Z}{dm_Z + dm_H}$$

dove dm_Z e dm_H sono le masse differenziali rispettivamente della roccia e dell'idrogeno.

a) (6 punti) Sia ρ la densità di massa della miscela alla distanza r . Dimostrare che ρ è correlata a P tramite

$$\rho = \frac{\rho_Z \sqrt{P}}{Z \sqrt{P} + (1 - Z) \rho_Z \sqrt{K}}$$

b) (7 punti) La Figura T11.2 mostra come Z dipende da r . Sulla base della relazione Z - r , possiamo dividere l'interno di Giove in tre diverse regioni: il nucleo diluito ($Z = Z_1 = 7.28 \times 10^{-2}$, $0 \leq r \leq R_1$), lo strato di transizione (Z diminuisce linearmente all'aumentare di r , $R_1 \leq r \leq R_2$), e l'involucro dominato dall'idrogeno ($Z = Z_2 = 1.53 \times 10^{-2}$, $R_2 \leq r \leq R_J$). Nello strato di transizione, ρ è ben approssimata come una funzione lineare di r , e P scende da $P_1 = 2.25 \times 10^{12} \text{ Pa}$ a $R_1 = 2.87 \times 10^7 \text{ m}$ a $P_2 = 8.43 \times 10^{11} \text{ Pa}$ a $R_2 = 4.40 \times 10^7 \text{ m}$. Il coefficiente politropico dell'idrogeno nella miscela è $K = 2.20 \times 10^5 \text{ m}^5 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Determinare la massa dello strato di transizione M_{12} .

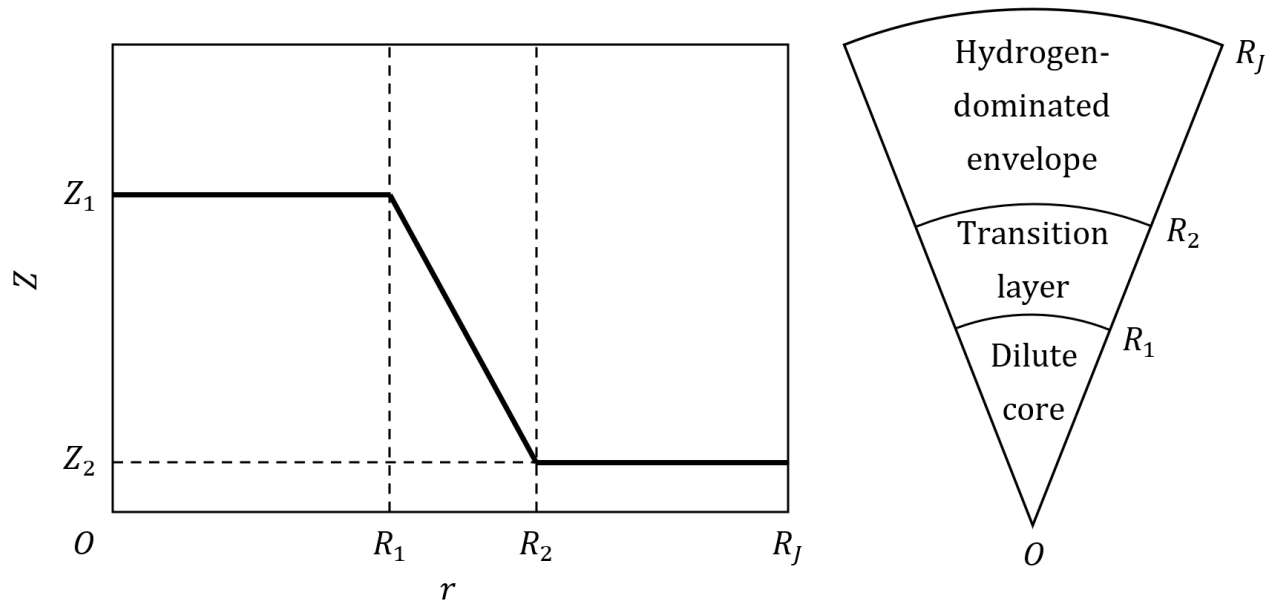


Figura T11.2. (Sinistra) La frazione in massa della roccia in funzione della distanza dal centro. (Destra) La sezione trasversale di Giove dopo l'erosione del nucleo.

c) (14 punti) Calcolare la massa del nucleo diluito M_1 e la massa dell'involucro dominato dall'idrogeno M_2 .

T12. Galassie Superluminose nell'Universo Primordiale (50 punti)

JWST ha identificato galassie eccezionalmente compatte e luminose a redshift $z > 7$. Per comprendere la natura di queste sorgenti, dobbiamo analizzare i dati osservativi e testare se sono compatibili con i vincoli astrofisici di base. La seguente tabella elenca le costanti e i parametri utilizzati in questo problema.

Fattore di conversione dal tasso di formazione stellare (SFR) alla luminosità	$k = 1.0 \times 10^{10} L_{\odot} M_{\odot}^{-1} \text{ yr}$
Opacità efficace degli elettroni liberi	$\kappa_e = 0.04 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$
Opacità efficace del mezzo interstellare polveroso	$\kappa_{\text{dust}} = 1.5 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$
Fattore di correzione dal flusso ottico a quello bolometrico	$BC = F_{\text{bol}}/F_{\text{opt}} = 9.26$

Parte 1 (13 punti): Attenuazione della Luminosità Superficiale Cosmologica

Sia L la luminosità bolometrica intrinseca e R il raggio fisico intrinseco di una galassia. La

densità intrinseca di luminosità superficiale è definita come

$$\Sigma_{\text{int}} = \frac{L}{\pi R^2}$$

Un telescopio osserva questa galassia che sottende un angolo solido Ω_{obs} e misura un flusso F_{obs} . La luminosità superficiale osservata è

$$\Sigma_{\text{obs}} = \frac{F_{\text{obs}}}{\Omega_{\text{obs}}}$$

In cosmologia, la distanza di luminosità (D_L) è definita tramite

$$F_{\text{obs}} = \frac{L}{4\pi D_L^2}$$

La distanza del diametro angolare (D_A) è definita in modo che il raggio angolare osservato sia

$$\theta = \frac{R}{D_A}$$

a) (10 punti) Ricavare la relazione tra D_L , D_A e il redshift z .

b) (3 punti) Ricavare un'espressione per Σ_{obs} in funzione di Σ_{int} e del redshift z .

Parte 2 (8 punti): Analisi dei dati JWST

JWST ha osservato una galassia ultraluminosa a un redshift di $z = 7.26$.

- Il flusso ottico misurato nel sistema solidale con la Terra (attenuato dalla polvere cosmica) è $F_{\text{obs,opt}} = 5.72 \times 10^{-19} \text{ W m}^{-2}$.
- L'estinzione della polvere ricavata dallo spettro è $A_V = 2.79 \text{ mag}$.
- Il raggio angolare misurato della sorgente nell'immagine è $\theta = 0.05 \text{ arcsec}$.

Calcolare la densità superficiale di luminosità bolometrica intrinseca di questa galassia, Σ_{int} , in unità di $L_{\odot} \text{ kpc}^{-2}$.

Parte 3 (18 punti): Modello Dinamico di Eddington per il Disco di Formazione Stellare

Si assuma che l'intera energia radiativa intrinseca di questa galassia provenga da un tasso estremo di formazione stellare in un disco otticamente spesso di gas freddo e polvere. La radiazione proveniente dalle stelle giovani genera un'enorme pressione che spinge le particelle di polvere cosmica verso l'esterno, perpendicolarmente al piano mediano del disco. A causa dell'estrema densità, gas e polvere sono perfettamente accoppiati dinamicamente tramite collisioni. La pressione di radiazione che agisce sulla polvere trascina efficacemente l'intera massa di gas come un unico fluido unificato. Contemporaneamente, la gravità attira questo

fluido verso il piano mediano. Si assuma che il campo gravitazionale del disco sia governato dalla densità superficiale di massa dinamica totale, data come $\Sigma_{\text{tot}} = 2.3 \times 10^{10} \text{ M}_{\odot} \text{ kpc}^{-2}$.

a) (6 punti) $\Sigma_{\text{int_max}}$ denota la densità di luminosità di Eddington della superficie del disco. Dimostrare che l'accelerazione prodotta dalla pressione di radiazione è $g_{\text{rad}} = \frac{\kappa_{\text{dust}} \Sigma_{\text{int_max}}}{c}$ e che l'accelerazione governata dalla gravità del disco è $g_z = 2\pi G \Sigma_{\text{tot}}$.

b) (7 punti) Calcolare la densità superficiale del SFR al limite di Eddington (Σ_{Edd}) di questo disco (in unità di $\text{M}_{\odot} \text{ yr}^{-1} \text{ kpc}^{-2}$) tale che rimanga gravitazionalmente legato contro un'espulsione causata dalla radiazione.

c) (5 punti) Calcolare il rapporto $\Sigma_{\text{SFR_actual}} / \Sigma_{\text{Edd}}$, dove $\Sigma_{\text{SFR_actual}}$ è la densità superficiale del tasso di formazione stellare effettivo di questa galassia. Se la luminosità osservata è di origine puramente stellare, il sistema è dinamicamente stabile?

Parte 4 (11 punti): Informazioni dalla Spettroscopia ad Alta Risoluzione

Gli astronomi hanno analizzato lo spettro NIRSPEC e hanno scoperto che l'emissione proviene prevalentemente da un plasma caldo e altamente ionizzato, in cui continui processi di ricombinazione emettono righe dell'Idrogeno che mostrano un allargamento anomalo con una dispersione di velocità di $v = 3400 \text{ km s}^{-1}$. Inoltre, il raggio di questa regione di emissione è stimato indirettamente essere di soli $R_{\text{em}} = 0.18 \text{ pc}$.

a) (4 punti) Calcola la massa dinamica M confinata all'interno di questa regione (in $\text{M}_{\odot}$). In base al risultato ottenuto, scegli il tipo specifico di oggetto astrofisico.

- A. Una galassia nana
- B. Una stella massiccia
- C. Un buco nero supermassiccio
- D. Un ammasso globulare

b) (7 punti) Valutare quantitativamente la stabilità radiativa del sistema rispetto alla sua luminosità osservata. Il sistema è radiativamente stabile?

COSTANTI UNIVERSALI

Costante di Avogadro	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Costante di Boltzmann	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Modulo della carica dell'elettrone	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Velocità della luce nel vuoto	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Costante di gravitazione universale	$G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Costante di Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Permettività del vuoto	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2$
Massa dell'elettrone	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg} = 0.511 \text{ MeV}/c^2$
Massa del protone	$m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938.272 \text{ MeV}/c^2$
Massa del nucleo di He	$m_{\text{He}} = 6.645 \times 10^{-27} \text{ kg} = 3727.181 \text{ MeV}/c^2$

DATI ASTRONOMICI

Massa del Sole	$M_{\odot} = 1.988 \times 10^{30} \text{ kg}$
Raggio del Sole	$R_{\odot} = 6.957 \times 10^8 \text{ m}$
Luminosità del Sole	$L_{\odot} = 3.828 \times 10^{26} \text{ W}$
Distanza dalla Terra al Sole	$d_{\odot} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$
Costante solare sulla Terra	$F_{\odot} = 1361 \text{ W m}^{-2}$
Costante di Hubble	$H_0 = 67.7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Età attuale dell'Universo	$t_0 = 13.8 \text{ Gyr}$
Unità Astronomica	$1 \text{ au} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$
parsec	$1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m}$
anno luce	$1 \text{ ly} = 9.461 \times 10^{15} \text{ m}$

FORMULE MATEMATICHE

Derivate	$y' = \frac{dy}{dx}$ e $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$
Integrali	$\int y dx = f$ tale che $\frac{df}{dx} = y$ e $\int_a^b y dx = f(b) - f(a)$
Regola della catena	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$
Regola del prodotto	$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$
Regola del quoziente	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2} \left(\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx} \right)$
Potenze	$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ e $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{constant}$ ($\alpha \neq -1$)
Esponenziali	$\frac{d}{dx}e^x = e^x$ e $\int e^x dx = e^x + \text{constant}$
Logaritmi	$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ e $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + \text{constant}$
Seni	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, $\int \sin x dx = -\cos x + \text{constant}$
Coseni	$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$, $\int \cos x dx = \sin x + \text{constant}$
Sviluppi di Taylor al primo ordine	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$ for $ x \ll 1$, $(1+x_1)(1+x_2) = 1 + x_1 + x_2$ for $ x_1 , x_2 \ll 1$
Sviluppo di Taylor al secondo ordine	$y = y_0 + y'_0(x-x_0) + \frac{1}{2}y''_0(x-x_0)^2$ for $x \approx x_0$