XXIV Campionati Italiani di Astronomia

Finale Nazionale - 28 aprile 2026

Prova Teorica - Categoria Master

1. Un Universo molto caldo

Nel 1965 Arno Penzias e Robert Wilson scoprirono la radiazione cosmica di fondo (CMB). Lo spettro della CMB corrisponde attualmente all'emissione di un corpo nero con temperatura di 2.725 K.
Sapendo che la CMB è stata emessa a un redshift cosmologico 1100:

a) stimate la temperatura della CMB al momento della sua emissione;
b) calcolate l'energia dei fotoni al momento dell'emissione della CMB.

Soluzione:

a) Utilizzando la legge di Wien:

$$\lambda = \frac{b}{T}$$

otteniamo la lunghezza d'onda **λ** del picco di uno spettro di corpo nero a temperatura **T**.
Utilizzando la definizione di redshift **z** cosmologico:

$$z = \frac{\lambda_{osservata} - \lambda_{emessa}}{\lambda_{emessa}}$$

otteniamo

$$\lambda_{emessa} = \frac{\lambda_{osservata}}{1+z}.$$

Dette $\mathbf{T_{emessa}}$ e $\mathbf{T_{osservata}}$ la temperatura della CMB rispettivamente al momento dell'emissione e attuale, sostituendo la legge di Wien nelle lunghezze d'onda sia emessa che osservata si ottiene:

$$\frac{b}{T_{emessa}} = \frac{1}{1+z} \cdot \frac{b}{T_{osservata}}$$

$$T_{emessa} = (1+z) \cdot T_{osservata} = (1+1100) \cdot 2.725\ \mathrm{K} = 3000\ \mathrm{K}\,.$$

b) L'energia dei fotoni si ottiene dalla legge di Planck:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = h \cdot \frac{c \cdot T_{emessa}}{b} = 6.626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} \cdot \frac{2.998 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 3000\ \mathrm{K}}{2.898 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}} = 2.056 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}\,.$$

2. Una cometa interstellare!

La cometa 3I/ATLAS è il terzo oggetto della storia a essere osservato come proveniente dall'esterno del Sistema Solare. Infatti, la sua traiettoria è un'iperbole con eccentricità 6.13. Il 29 ottobre 2025, quando 3I/ATLAS ha raggiunto il perielio a una distanza dal Sole di 1.356 UA, la sua velocità era di 68.3 km/s. Il 25 febbraio 2026 la sua distanza dal Sole era di $6.69 \cdot 10^{8}$ km. Quale era il modulo della sua velocità?

Soluzione:

La distanza al perielio è fornita dalla formula che lega il semiasse maggiore **a** con l'eccentricità **e**:

$$d_P = a \cdot (1-e)\,,$$

da cui si risale al suo semiasse maggiore:

$$a = \frac{d_P}{1-e} = \frac{1.356\ \text{UA}}{1-6.13} = -\ 0.264\ \text{UA} = -\ 0.395 \cdot 10^{11}\ \text{m}\,,$$

che risulta negativo, come in tutte le traiettorie iperboliche.
La velocità al 25 febbraio 2026 è fornita dalla formula:

$$v = \sqrt{G \cdot M_{\odot} \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 \cdot kg} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}\ kg \cdot \left(\frac{2}{6.69 \cdot 10^{11}\ m} + \frac{1}{0.395 \cdot 10^{11}\ m}\right)} =$$

$$= \sqrt{1.33 \cdot 10^{20}\ \frac{m^3}{s^2} \cdot \left(\frac{2}{6.69} + \frac{1}{0.395}\right) \cdot 10^{-11}\ m^{-1}} = \sqrt{3.76 \cdot 10^9 \frac{m^2}{s^2}} = 6.13 \cdot 10^4 \frac{m}{s} = 61.3 \frac{km}{s}.$$

Una soluzione alternativa consiste nell'applicazione diretta della conservazione dell'energia totale:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_{\odot} \cdot m}{d} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_P^2 - \frac{G \cdot M_{\odot} \cdot m}{d_P}.$$

Convertendo d_p in metri (1.356 UA $= 2.029 \cdot 10^{11}$ m) e risolvendo per v, si ottiene:

$$v = \sqrt{v_P^2 + 2 \cdot G \cdot M_{\odot} \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_P}\right)} = \sqrt{\left(6.83 \cdot 10^4 \frac{m}{s}\right)^2 + 2.65 \cdot 10^{20}\ \frac{m^3}{s^2} \cdot \left(\frac{1}{6.69 \cdot 10^{11}\ m} - \frac{1}{2.03 \cdot 10^{11}\ m}\right)} =$$

$$= \sqrt{4.66 \cdot 10^9\ \frac{m^2}{s^2} + 2.65 \cdot 10^9 \frac{m^2}{s^2} \cdot \left(\frac{1}{6.69} - \frac{1}{2.03}\right)} = \sqrt{3.75 \cdot 10^9 \frac{m^2}{s^2}} = 61.3\ \frac{km}{s}.$$

3. Un'eclissi senza fine

Un alieno si reca in vacanza sulla Terra, incontra un astronomo e gli racconta che, nel corso dei suoi viaggi, ha visitato una famosa città sul pianeta Cobold-1f. In questa città è sempre buio perché attorno a Cobold-1f orbita una luna che, da quando si ha memoria, ha sempre coperto esattamente la sua stella, in condizione di perpetua eclissi totale. L'astronomo terrestre, contrariato, risponde che una cosa del genere non è proprio possibile! Chi dei due ha ragione, e perché?

Soluzione:

Le condizioni che permettono il verificarsi della situazione descritta dall'alieno sono:
a) l'orbita di Cobold-1f e della sua luna sono sullo stesso piano;
b) Cobold-1f è in rotazione sincrona con la stella;
c) Cobold-1f è in rotazione sincrona con la sua luna;
d) le orbite della luna e di Cobold-1f sono circolari.

La seconda e la terza condizione implicano che la luna si mantenga sempre sulla linea che congiunge la stella al pianeta, perciò il periodo orbitale $\mathbf{P_L}$ della luna deve essere pari al periodo $\mathbf{P_P}$ di rivoluzione del pianeta intorno alla stella:

$$P_L = P_P$$

Detti $\mathbf{a_L}$ il semiasse maggiore dell'orbita della luna, $\mathbf{a_P}$ il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta, $\mathbf{M_P}$ la massa del pianeta e $\mathbf{M_S}$ la massa della stella, dalla terza legge di Keplero:

$$2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{a_L^3}{G \cdot M_P}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{a_P^3}{G \cdot M_S}}$$

$$a_L = a_P \cdot \sqrt[3]{\frac{M_P}{M_S}}\,.$$

Tuttavia, ricordando che il raggio della sfera di Hill del pianeta, ovvero la massima distanza a cui una luna può orbitare per rimanere stabilmente legata all'attrazione gravitazionale del pianeta, è pari a:

$$r_{hill} \simeq a_P \cdot \sqrt[3]{\frac{M_p}{3 \cdot M_S}}\,,$$

risulta che è impossibile per una luna avere lo stesso periodo orbitale del pianeta intorno a cui ruota, poiché questo comporterebbe un semiasse maggiore più grande del raggio di Hill:

$$a_L \simeq \sqrt[3]{3} \cdot r_{hill} \simeq 1.44 \cdot r_{hill}\,.$$

Di conseguenza, l'astronomo terrestre ha ragione.

Note: 1. Una possibile soluzione alternativa potrebbe essere che la luna sia posizionata nel punto lagrangiano L1 dell'orbita del pianeta. Esso però **non è stabile**. Inoltre, un oggetto ivi posizionato non sarebbe definibile satellite del pianeta, trovandosi esattamente ai confini della sfera di Hill. 2. Nel testo è specificato che il fenomeno dell'eclissi è osservato da una singola città. Se così non fosse, una possibile risposta al problema sarebbe che è impossibile per un satellite eclissare tutti i punti della superficie di un pianeta.

4. Scorpione contro Cigno

Il 28 aprile 2026 la cigna Teodolinda si trova presso l'Osservatorio del Paranal (φ = 24° 38' S, λ = 70° 24' W) per effettuare alcune osservazioni e nota che in quel momento sta sorgendo Antares (α = 16h 31m). Sapendo che il suo angolo orario in quell'istante è 17h 07m, calcolate:

a) l'altezza massima sull'orizzonte a cui può arrivare Antares, vista dal Paranal;
b) il tempo solare medio locale dell'osservazione.

Trascurate gli effetti dovuti alla depressione dell'orizzonte e alla rifrazione atmosferica.

Soluzione:

a) Dette $\boldsymbol{\varphi}$ la latitudine del Paranal e $\boldsymbol{\delta}$ la declinazione di Antares, l'altezza massima $\mathbf{h_{max}}$ sull'orizzonte è data da: $h_{max} = 90° - |\varphi - \delta|$. La traccia però non fornisce la declinazione, che va dunque calcolata utilizzando la formula di Gauss, che mette in relazione la declinazione $\boldsymbol{\delta}$, l'altezza sull'orizzonte **h** e l'angolo orario **H** di un oggetto celeste per un osservatore posto a latitudine $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\sin(h) = \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)\,,$$

sapendo che una stella, quando sorge, ha altezza sull'orizzonte **h** pari a zero:

$$\sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H) = 0\,,$$

$$\cos(H) = -\tan(\varphi) \cdot \tan(\delta)$$

da cui:

$$\delta = \arctan\left(\frac{-\cos(H)}{\tan(\varphi)}\right) = \arctan\left(\frac{-\cos(256.8°)}{\tan(-24.63°)}\right) = \arctan(-0.4984) = -26°\,29'\,.$$

Poiché Antares culmina a sud dello zenit ($\varphi > \delta$), la sua altezza massima sull'orizzonte è:

$$h = 90° - \varphi + \delta = 90° + 24°\,38' - 26°\,29' = 88°\,9'\,.$$

b) Il tempo siderale al Paranal $\mathbf{TS_P}$ al momento dell'osservazione è:

$$TS_P = H + \alpha = 17h\ 07m + 16h\ 31m = 9h\ 38\ m\ .$$

Considerando che al solstizio di primavera (21 marzo) il tempo siderale e il tempo solare medio $\mathbf{T_P}$ sono sfasati di circa 12 h, il 28 aprile, ovvero 38 giorni più tardi, il tempo solare medio è rimasto indietro sul tempo siderale di:

$$TS_P - T_P \simeq 12h + 38 \cdot 3m\ 56s \simeq 12h + 2h\ 29m\ 28s \simeq 14h\ 29m\ .$$

Il che significa che al momento dell'osservazione, il tempo solare medio al Paranal è:

$$T_P \simeq TS_P - 14h\ 29m \simeq 9h\ 38m - 14h\ 29m \simeq 19h\ 09m\ .$$

Nota: il tempo solare medio ottenuto corrisponderebbe alle 19:51 ora civile, tenendo conto che il Paranal è a UTC -4 e quindi si trova 10° 24' più a ovest del meridiano centrale del fuso, differenza che corrisponde a circa 42 minuti.

5. Il miglior momento per dare gas!

Un'astronave aliena si è immessa su un'orbita intorno al Sole con semiasse maggiore 1.50 UA ed eccentricità 0.602. Al momento della ripartenza, gli alieni si accorgono di disporre di propellente a sufficienza solamente per aumentare il modulo della velocità di 7.25 km/s, senza cambiarne la direzione e con una singola accensione dei motori.

a) In quale intervallo di distanze dal Sole, lungo l'orbita percorsa, dovranno usare il propellente allo scopo di abbandonare definitivamente il Sistema Solare?
b) Se l'astronave aliena si trovasse su un'orbita con lo stesso semiasse maggiore, ma circolare anziché ellittica, potrebbero mai tornare a casa?

Soluzione:

Su un'orbita ellittica di semiasse maggiore **a**, il modulo della velocità **v**, in funzione della distanza **r**, è fornito dalla relazione:

$$v = \sqrt{G \cdot M_\odot \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}\ .$$

Aumentiamo la velocità di Δv in modo che la velocità superi la velocità di fuga alla stessa distanza r:

$$v + \Delta v = \sqrt{G \cdot M_\odot \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} + \Delta v > \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_\odot}{r}}\ .$$

Possiamo risolvere la disequazione elevando al quadrato entrambi i membri:

$$\left(\frac{2 \cdot G \cdot M_\odot}{r} - \frac{G \cdot M_\odot}{a}\right) + 2 \cdot \Delta v \cdot \sqrt{G \cdot M_\odot \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} + (\Delta v)^2 > \frac{2 \cdot G \cdot M_\odot}{r}$$

elidendo i termini e riordinando otteniamo:

$$2 \cdot \Delta v \cdot \sqrt{G \cdot M_\odot \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} > \frac{G \cdot M_\odot}{a} - (\Delta v)^2$$

poiché si verifica che

$$\frac{G \cdot M_\odot}{a} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}\ kg}{1.50 \cdot 1.50 \cdot 10^{11}\ m} = \left(24.3\ \frac{km}{s}\right)^2 > \left(7.25\ \frac{km}{s}\right)^2 = (\Delta v)^2$$

possiamo elevare nuovamente al quadrato:

$$4 \cdot (\Delta v)^2 \cdot G \cdot M_\odot \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) > \left(\frac{G \cdot M_\odot}{a} - (\Delta v)^2\right)^2\ .$$

Risolvendo per 2/r e raccogliendo 1/a come fattore comune:

$$\frac{2}{r} > \frac{\left(\frac{G \cdot M_{\odot}}{a} - (\Delta v)^2\right)^2}{4 \cdot (\Delta v)^2 \cdot G \cdot M_{\odot}} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{\left(\frac{G \cdot M_{\odot}}{a} - (\Delta v)^2\right)^2}{4 \cdot (\Delta v)^2 \cdot \frac{G \cdot M_{\odot}}{a}} + 1\right]$$

ovvero, passando ai reciproci (attenzione a invertire il verso della disuguaglianza!)

$$r < 2a \cdot \left[\frac{\left(\frac{G \cdot M_{\odot}}{a} - (\Delta v)^2\right)^2}{4 \cdot (\Delta v)^2 \cdot \frac{G \cdot M_{\odot}}{a}} + 1\right]^{-1} = 2 \cdot a \cdot \left[\frac{(24.3^2\ \mathrm{km}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} - 7.25^2\ \mathrm{km}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2})^2}{4 \cdot 7.25^2\ \mathrm{km}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot 24.3^2\ \mathrm{km}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}} + 1\right]^{-1} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1.50\ \mathrm{UA}}{3.33} \simeq 0.900\ \mathrm{UA}\,.$$

Quindi:

a) Il ritorno a casa è possibile a patto che l'astronave dia la spinta quando si trova a una distanza dal Sole **minore** di 0.900 UA. Poiché lungo l'orbita la distanza passa da una distanza minima di d_{min} = 1.50 UA · (1-0.602) = 0.597 UA a una massima di d_{max} =1.50 UA· (1+0.602) = 2.40 UA, sarà sufficiente accelerare quando l'astronave si trova a r < 0.900 UA, scegliendo il momento più opportuno per dirigere l'orbita nella direzione voluta (si potrebbe anche verificare che il perielio è il punto di massima efficienza della spinta).
b) Invece, se l'astronave si muovesse inizialmente su un'orbita circolare di raggio 1.50 UA, non si verificherebbe mai la condizione r < 0.900 UA e quindi non sarebbe mai possibile abbandonare l'orbita eliocentrica.

Nota: il risultato appare **controintuitivo**. Il momento migliore per abbandonare un'orbita, a parità di Δv, è quello in cui ci si trova più vicini all'attrattore, non quando si è più lontani! Una spiegazione risiede nel fatto che, sempre a parità di Δv, l'aumento di energia cinetica è proporzionale alla velocità, che è inversamente proporzionale (grossomodo) alla radice della distanza, mentre l'energia potenziale è inversamente proporzionale alla distanza. Perciò, conviene imprimere l'impulso Δv per r più piccoli, dove l'energia cinetica ha un guadagno molto maggiore rispetto all'energia potenziale. Si tratta, a tutti gli effetti, di un'applicazione della cosiddetta Manovra di Oberth.