



BIGNAMINO **DI** **ASTRONOMIA**

Guida alla risoluzione dei problemi
dei campionati di astronomia



A cura di

*Società Astronomica Italiana -
sez. Calabria*

Planetarium "Pythagoras"
(RC)

INDICE

INTRODUZIONE	13
PRIMA DI INIZIARE.....	15
Misure e strumenti.....	15
Cifre significative	17
Operazioni con le cifre significative.....	19
Notazione scientifica	21
Operazioni con la notazione scientifica.....	22
Arrotondamento	23
Ordine di grandezza	24
Dimensione delle grandezze.....	25
Analisi dimensionale	26
Per i più grandi... ..	27
COORDINATE CELESTI	29
Misura degli angoli: grado, radiante, ora	29
Distanze dei corpi celesti.....	31
Dimensioni apparenti di un oggetto	32
Sistemi di riferimento astronomici.....	33
Sistema altazimutale	33
Sistema orario	34
Sistema equatoriale.....	35
Sistema eclitticale	36

Sistema galattico.....	36
Relazioni tra sistemi di riferimento.....	39
Latitudine del luogo.....	39
Stelle circumpolari.....	39
Culminazione.....	40
Altezza (culminazione inferiore/superiore).....	41
Latitudine del luogo (culminazione inferiore/superiore).....	42
Distanza zenitale.....	47
Ascensione retta.....	47
Declinazione del Sole.....	49
Coordinate equatoriali del Sole.....	50
Altezza dei pianeti.....	52
TEMPO.....	53
Misura del tempo.....	53
Giorno/tempo siderale.....	55
Giorno/tempo solare vero.....	55
Equazione del tempo.....	56
Relazione tra tempo solare e tempo siderale.....	57
Ora locale e longitudine.....	60
Tempo universale.....	61
Anno tropico, civile, solare e siderale.....	61
Giorno giuliano (JD).....	62
MECCANICA CELESTE.....	64
Moto apparente dei pianeti.....	64
Sommario di quanto è noto oggi sui pianeti.....	68

Le leggi del moto dei pianeti	70
Prerequisito: l'ellisse	73
Le leggi di Keplero	75
Prima legge di Keplero	75
Seconda legge di Keplero	77
Terza legge di Keplero	78
Legge di Gravitazione Universale	79
Terza Legge di Keplero Generalizzata	80
Forza centrifuga o centripeta?	83
Limite di Roche	85
Sfera di Hill	91
Considerazioni sulle orbite (coniche).....	93
Velocità orbitale	94
Considerazioni sulle orbite (dinamica)	96
Velocità di fuga	96
Raggio di Schwarzschild	97
Eclissi	99
Eclissi di Luna	99
Eclissi di Sole	102
Ciclo di Saros.....	107
Esopianeti	109
Metodo dei transiti.....	110
 STRUMENTI OTTICI	 113
Angolo solido	113
Campo dello strumento	114
Apertura assoluta.....	114

Apertura relativa.....	114
Rapporto focale	114
Potere risolutivo	115
Ingrandimento	115
Aberrazione della luce.....	116
Rifrazione	116
Rifrazione atmosferica	117
Formula di Bennett e Saemundsson.....	117
Riassumendo... ..	119
Cenni teorici sui telescopi.....	119
Ingrandimento.....	119
Rapporto focale.....	119
Campo visivo	120
Pupilla d'uscita	120
Potere risolutivo.....	120
Magnitudine limite	120
Ingrandimento minimo utile	121
Formula di Dawes.....	121
Dimensioni dell'immagine sul piano focale	121

ASTROFISICA 122

Radiazione elettromagnetica	122
Parametri di un'onda	123
Equivalenza massa-energia	125
Grandezze fotometriche	126
Flusso luminoso.....	126
Illuminamento.....	127

Intensità luminosa.....	127
Luminanza	127
Parametri fisici delle stelle	128
Corpo nero	128
Legge dello spostamento di Wien	129
Legge di Stefan-Boltzmann	129
Flusso e luminosità	130
Logaritmi.....	131
Definizione	131
Proprietà dei logaritmi	133
Magnitudine delle stelle	136
Magnitudine apparente	137
Magnitudine assoluta.....	138
Magnitudine di un sistema multiplo	139
Magnitudine integrata e superficiale	140
Estinzione atmosferica	141
 COSMOLOGIA ELEMENTARE	 145
Redshift	145
Redshift ottico e legge di Hubble-Lemaître	146
Redshift cosmologico	147
Redshift relativistico.....	147
Redshift gravitazionale	148
 MISCELLANEA.....	 151
Risoluzione del sistema per il calcolo delle velocità su orbite non circolari.....	151

Angolo di fase	154
Stelle.....	155
Evoluzione stellare e Diagramma H-R	155
Ammassi stellari	156
Albedo	157

PROBLEMI ED ESERCIZI..... 163

Sistemi di riferimento.....	163
L'altezza di Rigel.....	163
Dove vedere Canopo	163
Questione di ombre.....	164
Il Sole dei Cinesi – Problema gara IAO 2002	164
Osservazione di una stella	165
I moti della Terra e la misura del tempo	166
Quando (non) osservare Castore.....	166
Passaggi al meridiano	166
Longitudini diverse, tempi diversi.....	167
Da un segno zodiacale all'altro	167
Che velocità!.....	168
Che ore sono a Belo Horizonte?	168
Che ore sono a Bergamo?.....	169
Curve solari.....	170
Orologi stellari.....	172
Tempi siderali	172
Il cielo visto dalla Terra e dalla Luna.....	174
Distanze stellari	174
Sinodico del Sole	175

Solo ombre, non penombre.....	175
Guarda che Luna!	176
Gravitazione e leggi di Keplero	177
L'alieno Bzzapp.....	177
Modellini del Sistema solare	177
Questioni di una certa gravità.....	178
L'astronomo Qwzzz	179
Il distante Giove.....	180
Quanto tempo, Marte!.....	181
Veloce o non veloce... ..	181
Un pianeta “cadente”	182
Stelle e magnitudini.....	184
Un oggetto strano.....	184
La galassia di Andromeda	185
Una variabile pulsante	186
Una variabile pulsante	187
Cosmologia elementare	189
Una galassia distante	189
Alla ricerca della costante – Problema IAO 2018	189
Miscellanea.....	191
Massa di una galassia	191
Carburante stellare	193
Una stella metallica	194
Un quasar doppio.....	196
Redshift e velocità radiali	197
Redshift di un ammasso stellare	197
Distanze di ammassi stellari	198

Ingrandimenti di un telescopio (e non solo!)	199
Telescopi e granuli solari	200
Telescopi per fotografare	200
Telescopi e foto di stelle puntiformi	201
Radiotelescopi	201
Radiotelescopi 2.0	201
Questioni di risoluzione	202
Questioni di risoluzione	202
Magnitudini limite	203
Magnitudini limite e apertura di un telescopio	203
“Pesiamo” una stella	203

SFERA E TRIGONOMETRIA SFERICA 205

Premessa	205
Elementi della sfera	205
Spicchio sferico	207
Triangolo sferico	209
Lati del triangolo sferico	209
Angoli del triangolo sferico	209
Triangolo di posizione astronomico	210
Vertici del triangolo	210
Lati del triangolo	210
Formule del Primo gruppo di Gauss	212
Formule del Secondo gruppo di Gauss	212
Area della superficie della zona sferica	213
Le parti della sfera	214
Esercizi	215

Calcolo dell'altezza di un oggetto alla culminazione superiore e inferiore	215
Calcolare l'espressione che consente di determinare il sorgere e il tramontare di un astro	218
Calcolare l'altezza, l'ora e l'azimut.....	220
Distanza tra due stelle.....	224
FORMULARIO.....	227
Astronomia sferica	227
Meccanica celeste.....	233
Telescopi	240
Astrofisica stellare	241
Per approfondire... ..	247
Termodinamica.....	255
APPROFONDIMENTI	259
Vettori e operazioni tra vettori	259
Introduzione del simbolo di sommatoria.....	266
Terzo principio della dinamica.....	268
Quantità di moto.....	269
Momento torcente di una forza rispetto a un polo	271
Momento angolare.....	273
Centro di massa	275
Secondo principio della dinamica e quantità di moto	279
Urti e conservazione della quantità di moto.....	280
Quantità di moto e centro di massa	285
Conservazione del momento angolare	288

Momento angolare e centro di massa	294
Energia cinetica e centro di massa	295
Quantità di moto e centro di massa (considerazioni finali).....	297
Sistemi a due corpi	297
Un nuovo modo di vedere la 2 ^a legge di Keplero	301
Il vettore velocità angolare	303
Momento d'inerzia	305
Corpo rigido	307
Momento d'inerzia di alcuni solidi.....	312
Teorema di Huygens-Steiner.....	313
Energia cinetica rotazionale	315
Esercizi	317
Sulla conservazione del momento angolare	317
Sul corpo rigido ed energia rotazionale	318

ELEMENTI di STATISTICA.....320

Gli errori di misura	320
Tipologie di misure	322
Tipologie di errori	324
Errori massimi (o strumentali).....	324
Errori sistematici.....	324
Errori casuali.....	325
Tipici indici di posizione.....	329
Centro intervallo	329
Moda.....	329
Mediana	329
Media aritmetica	330

Tipici indici di dispersione	331
Semidispersione massima.....	331
Scarto medio	331
Deviazione standard	332
 TABELLA DATI	 335
 BIBLIOGRAFIA.....	 349

INTRODUZIONE

“In Astronomia ogni argomento va meditato ed approfondito in senso critico, va analizzato nei suoi elementi essenziali e collegato a quanto precede ed a quanto segue”

(prof. Leonida Rosino)

13

Il Bignamino di Astronomia ha lo scopo di aiutare gli olimpionici nella preparazione alle varie fasi delle Olimpiadi Italiane di Astronomia. Costituisce la griglia essenziale per la risoluzione dei problemi: l’abbiamo pensato come una “*bussola*”, soprattutto per gli studenti che provengono da istituti in cui la fisica non è una disciplina curriculare nel Biennio.

Seguendo il Syllabus, abbiamo suddiviso il Bignamino in macro-temi:

- Prima di iniziare: prerequisiti
- Coordinate celesti
- Misura del tempo
- Meccanica celeste
- Strumenti ottici
- Astrofisica
- Cosmologia elementare
- Miscellanea
- Sfera e trigonometria sferica
- Approfondimenti

Ciascun macro-tema è corredato da sezioni e da esercizi di riferimento, situati alla fine del nostro Bignamino. In conclusione, vi è anche un formulario generale e una tabella dati.



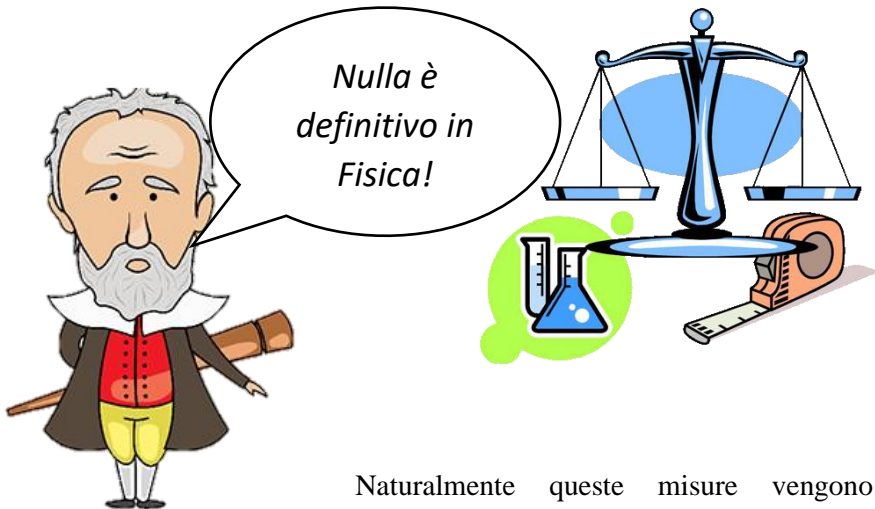
Buona astronomia!

PRIMA DI INIZIARE...

Misure e strumenti

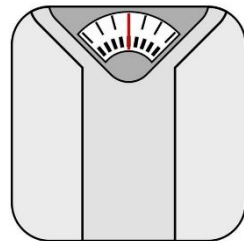
La Fisica è una **scienza sperimentale**: con questo termine si intende che essa si fonda sul **metodo scientifico**, introdotto nel XVII secolo. In estrema sintesi, lo scienziato comincia con l'osservazione del fenomeno fisico, formula delle ipotesi sul suo "comportamento", realizza degli esperimenti effettuando delle **misure**, con l'intento di provare la validità delle sue ipotesi, e alla fine formula una **legge** utilizzando il linguaggio della **matematica** (che può essere "perfezionata" o corretta da successive osservazioni ed esperimenti).

15



Naturalmente queste misure vengono effettuate con degli strumenti che non hanno una "**precisione**" infinita.

Immaginiamo di voler pesare su una normale bilancia. Dopo essere saliti su di essa, sul display compare un valore: supponiamo che esso sia 65.3 kg. La bilancia, in questo caso, riesce a misurare con un **livello di precisione** (o meglio, come si dice, di risoluzione) dell'etto: quindi non potremo sapere se pesiamo, per esempio, 65.31 kg o 65.32 kg; la bilancia, per com'è fabbricata, **fornisce informazioni fino all'ettogrammo**.



Dato che per conoscere il valore di una grandezza è necessario **misurarla** (altezza di un palazzo, massa di un camion ecc.) e **gli strumenti non hanno un grado infinito di risoluzione**, non si potrà mai conoscere il “valore vero” di una determinata grandezza. Non solo, ma le ultime cifre dei valori misurati, per quanto detto su, sono anche “incerte”. In generale, quindi, quando lo scienziato effettua una misura, scrive accanto al valore misurato una incertezza in questo modo:

(valore misurato \pm incertezza) unità di misura

Esempio:



Abbiamo misurato la massa di una persona e ottenuto un valore di (85.3 ± 0.2) kg (\pm si legge “più o meno”). Significa che il vero valore della massa della persona è compreso fra:

$$85.3 - 0.2 = 85.1 \text{ kg} \quad \text{e} \quad 85.3 + 0.2 = 85.5 \text{ kg}$$

Vediamo che, nel valore 85.3 le cifre 8 e 5 sono cifre certe: le conosciamo con certezza, sicuramente la massa dell'uomo è pari a 85 “e qualcosa”, ma quel “qualcosa”, cioè il 3 decimale, è incerto.

Fatta questa premessa, affrontiamo più rigorosamente la questione...

Cifre significative

In un numero misurato sono quelle cifre che includono **tutti i numeri sicuri più un certo numero finale che ha una certa incertezza**:

Esempio:

9.82 g

Il 2 finale ha una certa incertezza → 9.81 g può essere o 9.82 o 9.83 g

17

Come determinare le cifre significative?

- a. **Sono cifre significative di una determinata misura tutte le cifre eccetto gli zeri a sinistra della prima cifra diversa da zero** (cioè gli zeri a sinistra “non si contano”)

Esempio:

9.12 → 3 cifre significative

0.912 → 3 cifre significative

0.00912 → 3 cifre significative

- b. **Gli zeri “centrali” o a destra sono significativi!** Si contano!!!

Esempio:

9.00 → 3 cifre significative

90.0 → 3 cifre significative

9.000 → 4 cifre significative

0.910 → 3 cifre significative

c. Gli zeri finali di un numero intero (senza virgola) sono ambigui!

Perché?

Supponiamo che un astronomo dica:



18

Così, per quanto detto sopra, sembrerebbe che l'unica cifra incerta sia lo 0 finale, e la misura dell'astronomo abbia 12 cifre significative. In pratica parrebbe che l'astronomo conosca la distanza Terra-Sole come se l'avesse misurata con un metro da sarta, in maniera "precisissima"!

Per evitare questo tipo di ambiguità, è utile ricorrere alla
notazione scientifica detta anche **notazione esponenziale...**

Operazioni con le cifre significative

- 1) Quando si **moltiplicano o dividono** quantità misurate il risultato va dato con tante cifre significative **quante sono quelle della misura con il minor numero di cifre significative**:

$$\begin{array}{r} \text{100,0} \times \frac{0,0\text{634}}{25,31} = 0,250 \end{array}$$

(3 cifre)

In notazione scientifica 2.50×10^{-1}

19

- 2) Quando **addizioniamo o sottraiamo** quantità misurate il risultato va dato con lo **stesso numero di decimali della quantità con il minor numero di decimali**:

$$184.0 + 2.324 = 186.524 \quad = 186.5$$

→ *usiamo un solo decimale*

- 3) Un **numero “esatto”** (coefficienti, π , ecc.) si considera possedere **un numero di cifre significative infinite in prodotti o divisioni**:

$$2.00 \times 3 = 6.00$$

(con 3 cifre e non una se consideriamo 3 esatto)

Notazione scientifica

In notazione scientifica le misure sono espresse in questa forma:

$$A \times 10^n$$

n numero intero

A numero con la virgola, in genere < 10

Per la determinazione delle cifre significative, si considera solo il numero *A* applicando le regole dette sopra

21

Esempio:

9×10^2	1 cifra significativa
9.0×10^2	2 cifre significative
9.00×10^2	3 cifre significative

La notazione scientifica **elimina le ambiguità**: riprendiamo l'esempio di prima...

Supponiamo che il metodo con cui l'astronomo ha misurato la distanza Terra-Sole gli permetta di avere una *risoluzione* fino alle centinaia di milioni di metri: allora lui scriverà

$$d = 1.496 \times 10^{11} \text{ metri (più o meno eventuale incertezza)}$$

Riportando la misura con 4 cifre significative, di cui l'ultima incerta (6? 5? 7?)



RICORDA...

Se il numero da portare in notazione scientifica è < 1 , l'esponente del 10 deve essere negativo, mentre se è > 1 , l'esponente è positivo!

$$4853 = 4.853 \times 1000 = 4.853 \times 10 \times 10 \times 10 = 4.853 \times 10^3$$

$$0.004853 = \frac{4.853}{1000} = \frac{4.853}{10 \times 10 \times 10} = 4.853 \times 10^{-1} \times 10^{-1} \times 10^{-1} = 4.853 \times 10^{-3}$$

Operazioni con la notazione scientifica

Addizioni e sottrazioni:

Prima di sommare o sottrarre due numeri scritti in notazione scientifica è necessario esprimerli **entrambi nella stessa potenza di 10** e poi **sommare o sottrarre i coefficienti**

22

$$\begin{aligned} & 9.42 \times 10^{-2} + 7.60 \times 10^{-3} = \\ & = 9.42 \times 10^{-2} + 0.760 \times 10^{-2} = \\ & = 10.18 \times 10^{-2} = \\ & = 1.02 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

Moltiplicazioni e divisioni:

Per moltiplicare due numeri si **moltiplicano prima le due potenze di 10 sommando gli esponenti** e poi si **moltiplicano i fattori rimanenti**

$$\begin{aligned} & 6.3 \times 10^2 * 2.64 \times 10^5 = \\ & = (6.3 * 2.64) \times 10^7 = \\ & = 15.12 \times 10^7 = \\ & = 1.5 \times 10^8 \end{aligned}$$

Analogamente per dividere due numeri si **dividono prima le due potenze di 10 sottraendo gli esponenti** e poi si **dividono i fattori rimanenti**.

Potenze:

Un numero $A \times 10^n$ elevato ad una potenza p è calcolato **elevando A alla potenza p e moltiplicando l'esponente nella potenza di 10 per p**

$$(A \times 10^n)^p = A^p \times 10^{n \times p}$$

$$\begin{aligned} & (4.0 \times 10^{-3})^4 = \\ & = (4.0)^4 \times 10^{-3 \times 4} = \\ & = 256.0 \times 10^{-12} = \\ & = 2.6 \times 10^{-10} \end{aligned}$$

Arrotondamento

Si guarda la **cifra dopo** a quella che si vuole arrotondare e:

- se è **minore di 5**, si conferma la cifra
- se è **maggiore o uguale** si aumenta di un'unità

Esempio:

1.3456 arrotondiamo a 4 cifre

- guardo la quinta cifra
- è un 6 che è > 5
- arrotondo a 1.346 (cioè aumento la quarta cifra di uno)

1.3456 arrotondiamo a 2 cifre

- guardo la terza cifra
- è un 4 che è < 5
- arrotondo a 1.3 (confermo la seconda cifra)

Ordine di grandezza

Spesso, quando si confrontano due misure dello stesso tipo di grandezze (lunghezze, masse, tempi, ecc.) è conveniente riferirsi all'**ordine di grandezza** piuttosto che al semplice valore ottenuto con tutte le sue cifre significative. In generale la definizione di *ordine di grandezza* che si può consultare su vari testi può cambiare leggermente, noi lo definiremo nel seguente modo:



Si definisce ordine di grandezza di una determinata misura la potenza del 10 più vicina alla misura stessa accompagnata dall'unità di misura della grandezza stessa.



Esempio:

La massa del Sole è pari a 1.99×10^{30} kg. La potenza del 10 più vicina a tale numero è 10^{30}

Dunque l'ordine di grandezza della massa del Sole è pari a 10^{30} kg.

In generale, se il fattore che accompagna la potenza di 10 è **minore di 5**, l'ordine di grandezza risulta **pari alla potenza stessa del 10**. Se è **maggiore di 5**, l'ordine di grandezza è pari a 10 elevato all'esponente **aumentato di un'unità**.

Esempio:

- La massa dell'elettrone è pari a 9.11×10^{-31} kg

Essendo $9,11 > 5$, l'ordine di grandezza della massa dell'elettrone è:

$$10^{-31+1} \text{ kg} = 10^{-30} \text{ kg}$$

- L'altezza del Monte Bianco è pari a 4.810×10^3 m

L'ordine di grandezza dell'altezza del Monte Bianco è pari a 10^3 m, essendo $4.810 < 5$.

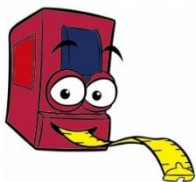
Dimensione delle grandezze

Nel precedente paragrafo abbiamo accennato al fatto che l'ordine di grandezza di una determinata misura è utile per effettuare dei confronti tra grandezze. Ma affinché due grandezze possano essere confrontate, per stabilire, per esempio, se il valore di una è maggiore di quello di un'altra, o se i valori sono simili, quale caratteristica devono avere?

In generale è necessario, affinché due grandezze possano essere confrontate, che esse abbiano le stesse **dimensioni**, cioè appartengano al medesimo “gruppo” di grandezze “simili”. Dicendo “simili” intendiamo che è possibile stabilire una *relazione d'ordine fra loro*, cioè determinare quale di esse sia maggiore, quale minore...

25

*Grandezze che hanno le stesse dimensioni fisiche si dicono omogenee.
È possibile confrontare e sommare tali grandezze.*



Esempio:

L'apertura alare di un aeroplano, l'ampiezza minima dello Stretto di Messina, l'altezza del Burj Khalifa sono grandezze aventi la stessa dimensione: appartengono alla classe delle *lunghezze*.

In generale le dimensioni fisiche di una grandezza si esprimono con delle **lettere maiuscole**. Per indicare che vogliamo considerare le dimensioni fisiche di una grandezza, rappresentiamo il suo **simbolo tra parentesi quadre**. Indichiamo le lunghezze con L, le masse con M, i tempi con T.

Le costanti numeriche (come π , e , coefficienti nelle formule...) e le grandezze che sono date dal rapporto di due grandezze omogenee fanno parte della categoria delle **grandezze adimensionali**. Il simbolo con cui si indica una grandezza adimensionale è [1].

N.B.: Non confondere la M delle masse con la m minuscola che indica il metro!!

Infatti $[m] = L$ (è una lunghezza).

Esempio:

Sia v una velocità, allora:
 $[v] = [\text{m s}^{-1}] = \text{L T}^{-1}$.

Sia F una forza, allora:
 $[F] = [\text{N}] = [\text{kg m s}^{-2}] =$
 $= \text{M L T}^{-2}$

Analisi dimensionale

Quando scriviamo una relazione fra le grandezze, dobbiamo aver cura, per non commettere un errore, che i due membri della relazione (destra e sinistra rispetto all'uguale) abbiano le **stesse dimensioni fisiche**. Non è possibile, infatti, per esempio, che una grandezza che ha le dimensioni di una massa sia uguale a una grandezza (o a una combinazione di varie grandezze) che ha le dimensioni di una forza, e così via.

Esempio:

$$a = \cos(t)$$

con a lunghezza e t tempo è **dimensionalmente errata!**

Infatti il coseno deve prendere per argomento (...) una grandezza **adimensionale** (un numero) ed esso "restituisce" parimenti una grandezza adimensionale.

È dimensionalmente corretto scrivere:

$$a = A \cos(\omega t)$$

$$\text{con } [A] = L \quad \text{e} \quad [\omega] = T^{-1}$$

Per i più grandi...

Analisi dimensionale e semplici relazioni

L'analisi dimensionale è talvolta utile per trovare delle semplici relazioni, quando si intuisce la dipendenza di una grandezza fisica da altre grandezze.

Facciamo un esempio!

27

Come sarà precisato più avanti nel testo del Bignamino, quando un corpo di massa m si muove di moto circolare uniforme, su di esso agisce una forza centripeta. Se connettiamo un dinamometro a tale massa che si muove, in maniera che misuri la forza centripeta, notiamo che essa varia (tenendo le altre grandezze costanti) se facciamo variare il raggio della circonferenza, la massa dell'oggetto oppure il modulo della sua velocità tangenziale. Quindi potremmo scrivere che:

$$F = F(m, R, v)$$

dove F indica la forza centripeta, m la massa, R il raggio e v la velocità

Le parentesi vicino la F indicano che supponiamo che F sia una funzione (cioè dipenda) da R , m e v . Quindi l'espressione di F dovrà essere del tipo:

$$F = m^\alpha R^\beta v^\gamma$$

E i due membri dovranno avere le stesse dimensioni fisiche, dunque:

$$M L T^{-2} = M^\alpha L^\beta L^\gamma T^{-\gamma}$$

(scrivo le dimensioni dei due membri)

$$M L T^{-2} = M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{-\gamma}$$

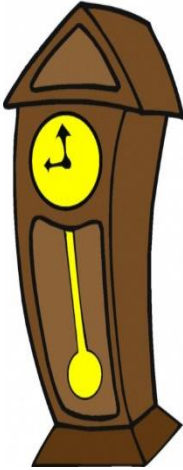
Come detto le dimensioni dovranno essere le stesse, quindi:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 \\ \beta + \gamma &= 1 \rightarrow \beta = -1 \\ -\gamma &= -2 \rightarrow \gamma = 2\end{aligned}$$

Quindi $F = m v^2 / R$, che in effetti è l'espressione corretta!

Attenzione: questo esempio non deve indurre il lettore a pensare che l'analisi dimensionale riesca a predire le esatte relazioni tra le grandezze! Come si può comprendere studiando il metodo seguito nell'esempio, **non è possibile determinare se nell'espressione sono presenti costanti come π o coefficienti numerici.**

28



Per convincerti di ciò, prova a trovare il periodo di un pendolo semplice nel regime di piccole oscillazioni, che indichiamo con T , sapendo che:

$$T = T(l, g)$$

con l lunghezza pendolo e g accelerazione di gravità.

Confronta poi l'espressione con quella corretta, ottenuta applicando il secondo principio della dinamica, ossia:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

COORDINATE CELESTI

Misura degli angoli: grado, radiante, ora

L'ampiezza di un arco o del corrispondente angolo al centro si può misurare in uno dei seguenti sistemi:

29

- Il **sistema sessagesimale**, che ha come unità di misura il **grado**.

IL GRADO

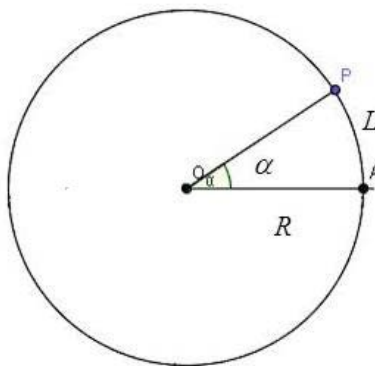
Il grado è definito come la **360esima parte dell'angolo giro**. I suoi sottomultipli sono i **primi** e i **secondi**.

- ❖ 1 grado è diviso in 60 primi, $1^\circ = 60'$
- ❖ 1 primo è diviso in 60 secondi, $1' = 60''$
- ❖ Quindi, 1 grado equivale a 3600''

- Il **sistema circolare**, che ha come unità di misura il **radiante**

IL RADIANTE

Il **radiante** (*rad*) è l'ampiezza dell'angolo al centro di una circonferenza che con i suoi lati intercetta un arco uguale al raggio.



Dunque il rapporto tra la misura dell'arco e la misura del raggio è un numero reale α che rimane costante:

$$\alpha = \frac{L}{R}$$

$$\alpha^{rad} = \alpha^{\circ} \frac{\pi}{180^{\circ}}$$

$$\alpha^{\circ} = \alpha^{rad} \frac{180^{\circ}}{\pi}$$

30

L'ampiezza di un radiante è:

- In gradi $1 \text{ rad} = 57^{\circ} 17' 44'' \sim 57^{\circ},3$
- In primi $1 \text{ rad} \sim 3438'$
- In secondi $1 \text{ rad} \sim 206265''$ (numero magico!!!!)



In astronomia è necessario molto spesso convertire la **misura in gradi di un arco in misura di ora** o viceversa. L'ampiezza di un angolo giro misurato in gradi è 360° , che in ore sono 24h:

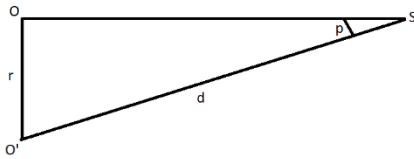
$$1^h = \frac{360^{\circ}}{24^h} = 15^{\circ}$$

$$1^m = 15'$$

$$1^s = 15''$$

Distanze dei corpi celesti

La distanza dei corpi celesti viene determinata attraverso la misura di un angolo detto **parallasse**. L'angolo di parallasse è l'angolo sotto cui viene visto un oggetto se osservato da due posizioni diverse.



Si parla di **parallasse geocentrica** quando la distanza tra le due osservazioni è uguale al raggio terrestre, mentre di **parallasse annua** quando la distanza tra i due osservatori è uguale al semiasse maggiore dell'orbita della Terra intorno al Sole (ovvero l'Unità Astronomica). In figura, p è l'angolo di parallasse e d la distanza dell'osservatore dell'oggetto. La relazione tra la distanza e la parallasse è data dalla semplice formula:

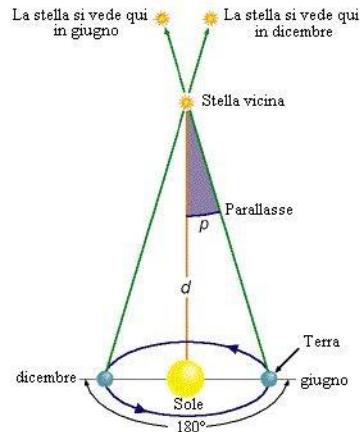
$$d = \frac{r}{\sin p}$$

Spesso viene usato il **parsec** come unità di misura delle distanze stellari. Tale unità di misura è così definita: un corpo celeste si trova alla distanza di 1 parsec (1 pc) quando la sua parallasse annua è di 1 secondo d'arco ($1''$).

Grazie all'introduzione del parsec, la formula della parallasse si semplifica ulteriormente:

$$d(pc) = \frac{1}{p''}$$

Come si può vedere, se $p = 1''$, allora d è proprio 1 pc.



Dimensioni apparenti di un oggetto

Le dimensioni apparenti di un oggetto **dipendono dalla sua distanza**. In astronomia **il diametro angolare** (o dimensione angolare) di un oggetto è la misura del suo diametro rispetto alla distanza dall'osservatore, cioè l'angolo sotto il quale, alla detta distanza, si vede l'oggetto. Si calcola con la seguente formula:

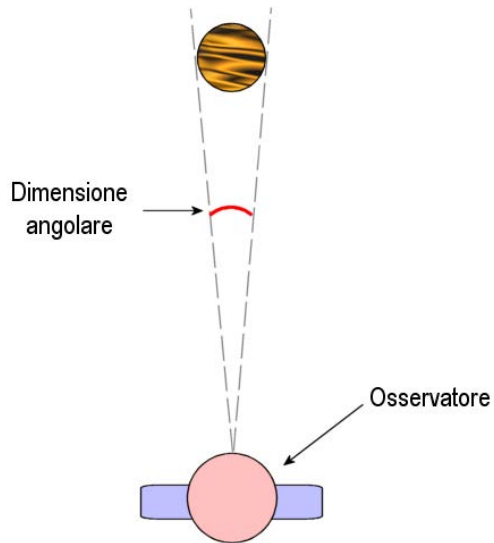
$$\alpha = 2 \tan^{-1} \frac{D}{2d}$$

Dove D è il diametro reale dell'oggetto e d la distanza dall'osservatore.

Generalmente, il diametro apparente dei corpi celesti è inferiore ad 1°

Si può fare anche il processo inverso: misurato il diametro apparente in secondi d'arco si può calcolare il diametro reale dell'oggetto con la seguente formula:

$$D = \frac{d * \alpha''}{206265}$$



Sistemi di riferimento astronomici

Gli elementi che definiscono i sistemi di coordinate astronomiche sono:

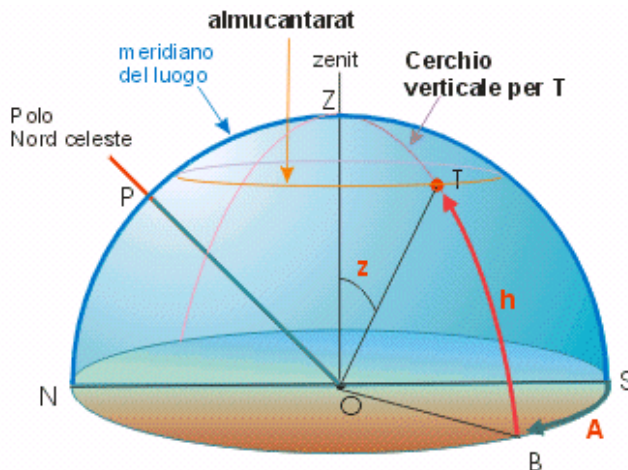
1. Una **direzione fondamentale**;
2. Un **piano perpendicolare** alla direzione fondamentale;
3. Un'**origine**;
4. Un **verso** di percorrenza;
5. Una **unità di misura**.

33

Sistema altazimutale

Nel sistema **altazimutale** o orizzontale la direzione fondamentale è data dalla **verticale** e il piano perpendicolare è dato dall'**orizzonte astronomico**. La verticale alla superficie terrestre passante per l'osservatore individua lo **zenit** e il **nadir**. Le coordinate in questo sistema sono l'**Azimut** (A) e l'**Altezza** (h).

Azimut (A del punto T): è l'angolo formato dal piano del cerchio verticale passante per T e il meridiano astronomico. Si misura in **gradi** e frazioni di grado partendo dal punto cardinale sud nel senso delle lancette dell'orologio (orario). Esso corrisponde, nel disegno, all'angolo SOB dove O è l'osservatore e B è l'intersezione dell'orizzonte con il cerchio verticale passante per T.

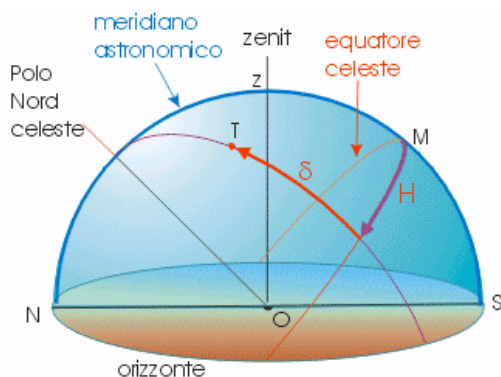


Altezza (h del punto T): è l'ordinata sferica di un punto sulla sfera celeste, cioè la sua distanza angolare dall'orizzonte misurata lungo il cerchio verticale passante per quel punto. Si esprime in **gradi** e frazioni di grado con valore positivo verso lo zenit e negativo verso il nadir. Nel nostro disegno, l'altezza del punto T corrisponde all'angolo TOB dove O è l'osservatore e B è l'intersezione dell'orizzonte con il cerchio verticale passante per T. L'arco complementare dell'altezza si chiama distanza zenitale e nel nostro disegno è rappresentata dall'angolo ZOT, dove Z è lo zenit dell'osservatore. La distanza zenitale si indica generalmente con z .

Nel sistema azimutale entrambe le coordinate (azimut e altezza) delle stelle **variano sensibilmente** con il passare del tempo a causa del moto di rotazione della Terra.

Sistema orario

Questo sistema di coordinate astronomiche ha come direzione e piano fondamentali rispettivamente l'**asse del mondo** e il piano dell'**equatore**. Le coordinate sferiche di questo sistema sono l'**Angolo orario** (H) e la **Declinazione** (δ)



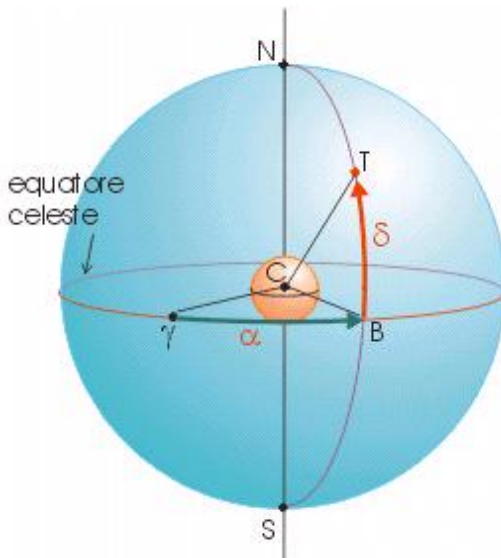
L'**angolo orario** è la distanza angolare tra il cerchio orario che passa per il punto e il meridiano astronomico. Si misura in **ore** e frazioni di ora lungo l'equatore celeste, partendo dal meridiano astronomico, in senso **orario** per un osservatore boreale.

La **declinazione** rappresenta la distanza angolare tra un punto della sfera celeste e l'equatore celeste, misurata lungo il cerchio orario che passa per tale punto. Si misura in **gradi** e frazioni di grado, con segno positivo verso il polo nord celeste e negativo verso il polo sud. L'origine del sistema è il punto M, detto **mezzocielo**.

In questo sistema nel corso del giorno le stelle **variano il loro angolo orario** mentre rimane **costante la loro declinazione**.

Sistema equatoriale

Questo sistema di coordinate astronomiche ha come direzione e piano fondamentali rispettivamente l'**asse del mondo** e il piano dell'**equatore**. Le coordinate sferiche di questo sistema sono l'**Ascensione retta** (AR o α) e la **Declinazione** (DEC o δ). L'origine è il **punto gamma** (γ), o primo punto d'Ariete (o punto vernale), dato dall'intersezione tra l'eclittica e l'equatore celeste, punto in cui si trova il Sole il giorno dell'equinozio di primavera.



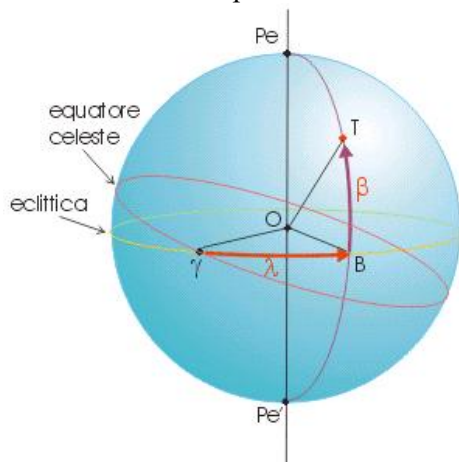
L'**ascensione retta** si misura di solito in **ore**, minuti e secondi lungo l'equatore celeste, partendo dal punto gamma e con senso di percorrenza **antiorario**.

La **declinazione** rappresenta la distanza angolare tra un punto della sfera celeste e l'equatore, misurata lungo il cerchio orario che passa per tale punto. Si misura in **gradi** e frazioni di grado con segno positivo verso il polo nord celeste e negativo verso il polo sud.

Le coordinate di questo sistema nel corso del giorno rimangono **costanti**.

Sistema eclitticale

Il sistema eclitticale viene usato solitamente per lo studio dei moti planetari che avvengono in prossimità dell'eclittica. Il piano e l'asse fondamentale sono rispettivamente il **piano dell'eclittica** e la sua **perpendicolare**, che individua sulla sfera celeste i poli dell'eclittica. Le coordinate eclitticali sono:



Longitudine (λ): contata dal punto γ , da 0° a 360° , in senso **antiorario** (positivo).

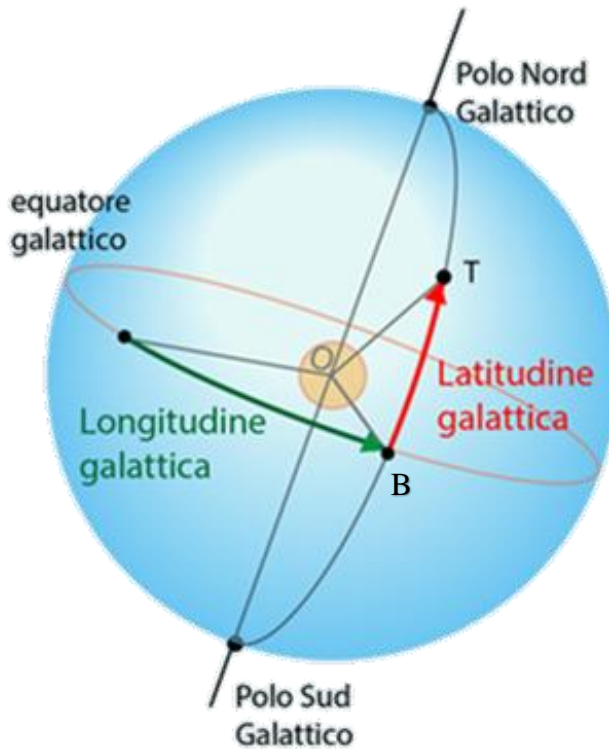
Latitudine (β): è l'arco compreso tra l'eclittica e l'astro T, che si considera sul cerchio massimo passante per i poli dell'eclittica e per l'astro stesso. Viene contata da 0° a 90° , positivamente nell'emisfero eclitticale nord, negativamente nell'altro.

Ricordiamo che:

Si dice **coluro equinoziale** il cerchio orario che passa per i poli celesti e per i punti γ e della Libra. Il **coluro solstiziale** invece è il cerchio orario che passa per i poli celesti e per i punti dell'eclittica che hanno la massima e la minima declinazione (punti dei solstizi). Dodici costellazioni disposte lungo l'eclittica formano lo **Zodiaco**.

Sistema galattico

Le coordinate galattiche sono legate strettamente al sistema stellare al quale apparteniamo: la **Galassia**. Il piano e l'asse fondamentale di questo sistema sono rispettivamente il **piano mediano della Via Lattea** e il suo **asse passante per il centro galattico**. Il piano della Galassia interseca la sfera celeste sull'**equatore galattico**. Per individuare un astro T nel sistema di coordinate galattiche, si fa passare un cerchio massimo per i poli e per T; questo interseca l'equatore galattico nel punto B.



Le coordinate galattiche sono:

Longitudine (l): è contata partendo dalla direzione del centro galattico, da 0° a 360° , in senso **antiorario** per un osservatore posto con i piedi sul piano galattico e con la testa rivolta verso il polo nord galattico.

Latitudine (b): è l'arco compreso tra l'astro A e il punto B, contato da 0° a 90° in senso positivo nell'emisfero nord galattico e negativo nell'altro.

Le coordinate equatoriali del centro galattico e del polo nord galattico, fissate convenzionalmente nel 1958 dall'Unione Astronomica Internazionale, sono:

$$PG \rightarrow AR = 12h 49 \text{ min} ; DEC = 27.4^\circ$$

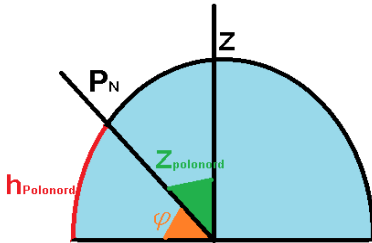
$$CG \rightarrow AR = 17h 42 \text{ min} ; DEC = -28.9^\circ$$



Posizione del centro galattico (segnata con x), posta tra la costellazione del Sagittario e quella dello Scorpione. È il punto in cui la Via Lattea appare più luminosa, ma a causa delle fredde polveri interstellari sulla linea di vista, non può essere studiato nella lunghezza d'onda del visibile, né dell'UV, né dei raggi X a debole frequenza. Tutte le informazioni di cui disponiamo ci sono fornite dall'osservazione dei raggi gamma, raggi X a forte frequenza, infrarossi e onde radio. Dopo una quindicina d'anni di osservazione si è arrivati alla conclusione che nella Via Lattea, come al centro della maggior parte delle galassie, vi sia un buco nero supermassiccio chiamato Sagittarius A*.

Relazioni tra sistemi di riferimento

Latitudine del luogo



La latitudine geografica φ di una località sulla superficie della Terra è uguale l'altezza del polo celeste sul suo orizzonte. Orizzonte e Zenit sono separati da un angolo retto. La latitudine geografica del luogo si ottiene sottraendo da 90° la distanza zenitale del polo stesso.

39

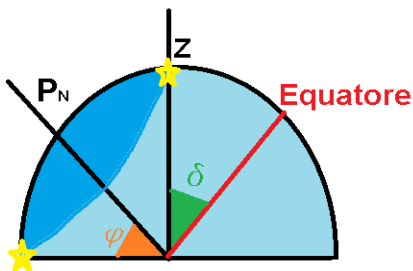
$$\varphi = h_{polo} = 90^\circ - z_{polo}$$

FORMULE INVERSE:

$$z_{polo} = 90^\circ - h_{polo} = 90^\circ - \varphi$$

Stelle circumpolari

Vista da un qualsiasi luogo della superficie terrestre (quando siamo all'Equatore la situazione si complica), una parte della volta celeste non tramonta mai, e rimane sempre al di sopra dell'orizzonte. Tale parte di cielo è detta “**circumpolare**”. Essa contiene le stelle che hanno declinazione δ



maggiore o uguale a un valore limite che si ottiene sottraendo da 90° il valore della latitudine geografica φ del luogo.

$$\delta \geq 90^\circ - \varphi$$

Se la declinazione è compresa tra:

$$-(90^\circ - \varphi) < \delta < 90^\circ - \varphi$$

Le stelle sono **occidue**: sorgono e tramontano sull'orizzonte dell'osservatore.

Se:

$$\delta < -(90^\circ - \varphi)$$

Quindi:

$$\delta < \varphi - 90^\circ$$

Le stelle sono **anticircumpolari**: non sorgono mai e stanno sempre al di sotto dell'orizzonte

40

Culminazione

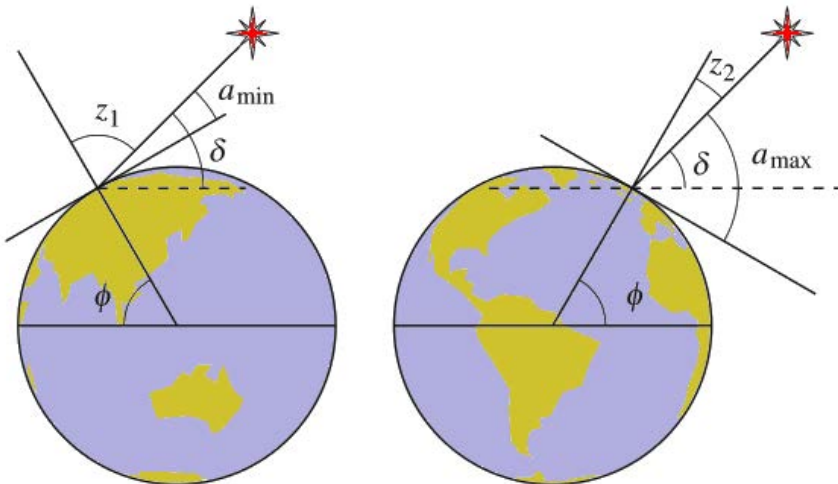
Una stella culmina quando raggiunge la sua **massima altezza**, cioè è sul meridiano. La declinazione δ e la distanza zenitale z sono legate in modo semplice alla latitudine φ dell'osservatore.

Al momento della **culminazione superiore** (massima altezza della stella sull'orizzonte) si ha:

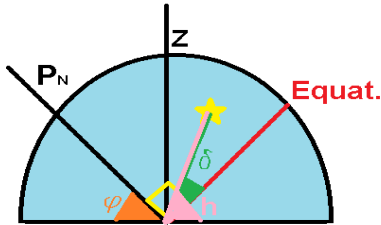
$$z = \varphi - \delta$$

Al momento della **culminazione inferiore** si ha:

$$z = 180^\circ - (\varphi + \delta)$$



Altezza (culminazione inferiore/superiore)



Una stella culmina superiormente quando raggiunge la sua **massima altezza** vista un determinato luogo (ad una determinata latitudine φ).

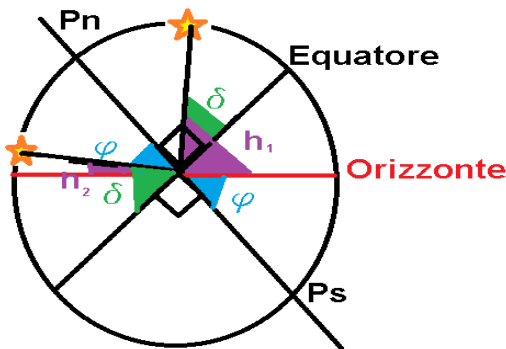
$$h_1 = 90^\circ \pm (\varphi - \delta)$$

Poiché l'altezza deve essere $h \leq 90^\circ$, distinguiamo i due casi:

1. Se $\delta < \varphi$, allora $h = 90^\circ - \varphi + \delta$ (si prende il segno meno)
2. Se $\delta > \varphi$, allora $h = 90^\circ + \varphi - \delta$ (si prende il segno più)

Analogamente in **culminazione inferiore**:

$$h_2 = -90^\circ + \varphi + \delta$$



La formula della culminazione inferiore è **sempre la stessa!**

Perché se $\delta < \varphi$:

$$h_2 = \delta - (90^\circ - \varphi)$$

$$h_2 = \delta - 90^\circ + \varphi$$

$$h_2 = -90^\circ + \delta + \varphi$$

Se $\delta > \varphi$:

$$h_2 = \delta + (\varphi - 90^\circ)$$

$$h_2 = -90^\circ + \delta + \varphi$$



FORMULE INVERSE:

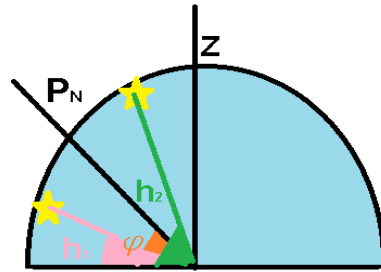
$$\varphi = 90^\circ - h + \delta \quad \text{e} \quad \delta = \varphi + h - 90^\circ$$

Latitudine del luogo (culminazione inferiore/superiore)

Dalla conoscenza dell'altezza di una stella alla culminazione inferiore e di quella alla culminazione superiore possiamo stabilire la latitudine del luogo di osservazione:

$$\varphi = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

Questa formula è valida per tutte le stelle (ma bisogna fare attenzione! – vd. dopo), ma la si usa spesso per conoscere la latitudine di un luogo osservando una stella circumpolare (infatti, per queste stelle riusciamo ad osservare sia la culminazione inferiore sia quella superiore). La latitudine, infatti, non è altro che una “**media**” tra le due altezze (culminazione superiore e inferiore).

**FORMULE INVERSE:**

$$h_1 = 2\varphi - h_2$$

$$h_2 = 2\varphi - h_1$$

Per una stella circumpolare la minima altezza è $h_{min} = \delta + \varphi - 90^\circ$

È necessario tuttavia spendere qui qualche parola per un “corretto utilizzo” di questa relazione, a seconda del valore della declinazione della stella. Le osservazioni che seguono (specialmente per quanto riguarda il 2° caso) hanno un interesse maggiormente matematico piuttosto che osservativo: se volessimo determinare con il metodo delle culminazioni la latitudine di un luogo, sceglieremmo di misurare le altezze di una stella circumpolare per quel determinato luogo, in maniera tale che la visibilità della stella in entrambe le culminazioni sia garantita. Se la stella fosse occidua, infatti, non potremmo osservare la culminazione inferiore (e quindi misurarne la corrispondente altezza sull’orizzonte)!

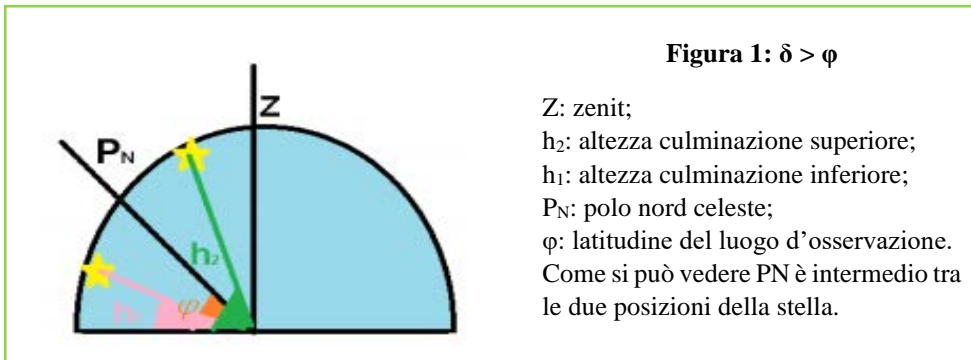
Iniziamo a esaminare più nel dettaglio la relazione.

Premettiamo che in un dato luogo, la declinazione dello zenit è uguale alla latitudine del luogo stesso. Quindi una stella che possiede una declinazione maggiore della latitudine del luogo d'osservazione (o, se ci troviamo nell'emisfero sud, una declinazione minore della latitudine del luogo d'osservazione), culmina superiormente dalla parte del polo “rialzato” rispetto allo zenit, cioè il polo visibile da quel dato luogo (polo nord celeste se l'osservatore è boreale, polo sud celeste se l'osservatore è australe).

43

1° caso: $\delta > \varphi$

Per semplicità consideriamo un osservatore boreale (si può fare una schematizzazione analoga con le dovute accortezze per un osservatore australe): nel caso in cui $\delta > \varphi$, si consideri la situazione di *Figura 1*. Le altezze alla culminazione superiore (h_2 in figura) e inferiore (h_1 in figura) vengono valutate “partendo” dal punto cardinale nord. Quindi se ne faccio la media, ottengo proprio l'angolo del punto che sta in mezzo a queste due posizioni. Siccome tale punto è il polo nord celeste (P_N), ottengo la latitudine del luogo.



$$h_1 = \varphi - 90^\circ + \delta$$

$$h_2 = 90^\circ + \varphi - \delta$$

Sommando membro a membro le due relazioni:

$$h_1 + h_2 = \varphi - 90^\circ + \delta + 90^\circ + \varphi - \delta = 2\varphi$$

$$\varphi = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

2° caso: $\delta < \varphi$

Nel caso in cui $\delta < \varphi$, si ha una situazione in cui bisogna prestare più attenzione (*Figura 2*):

44

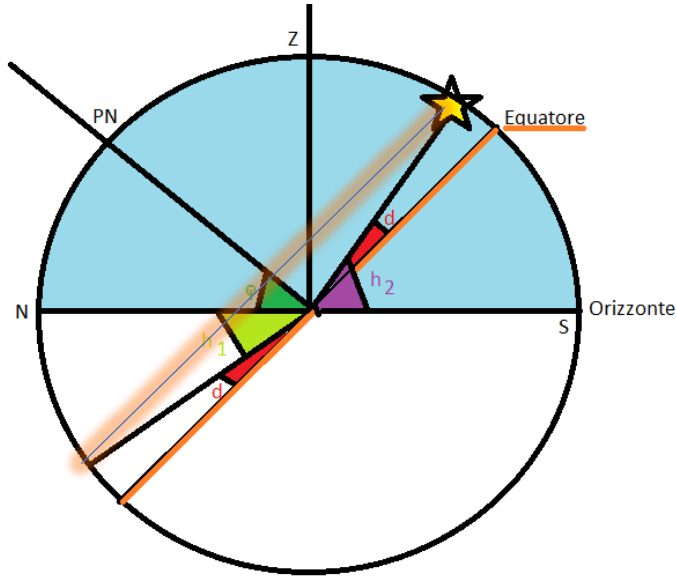


Figura 2: $\delta < \varphi$

Z, P_N come in *Figura 1*;

L'angolo in rosso rappresenta la declinazione della stella;

L'angolo in viola (h_2) rappresenta l'altezza alla culminazione superiore della stella;

L'angolo in verde chiaro (h_1) rappresenta l'altezza alla culminazione inferiore della stella: tale angolo è ottenuto tracciando la retta parallela all'equatore passante per la stella (in figura);

L'angolo in verde scuro rappresenta la latitudine del luogo d'osservazione.

S e N sono rispettivamente i punti cardinali Nord e Sud.

Come detto sopra, la stella culmina superiormente a sud dello zenit, dunque l'altezza alla culminazione superiore viene valutata partendo dal punto cardinale sud. Viceversa, la stella culmina inferiormente dal "lato nord", quindi è da nord che viene valutata l'altezza a tale culminazione.

Date le due “origini” diverse per prendere le altezze, esse non si possono “mediare” acriticamente. Bisogna ricondursi a un’altezza alla culminazione superiore valutata dal punto nord, per far coincidere le due origini.

Naturalmente quest’ultima non è un’altezza vera e propria: sarà maggiore di 90° , però ci permette di ottenere il risultato voluto: infatti, chiamando quest’ultima altezza h' ,

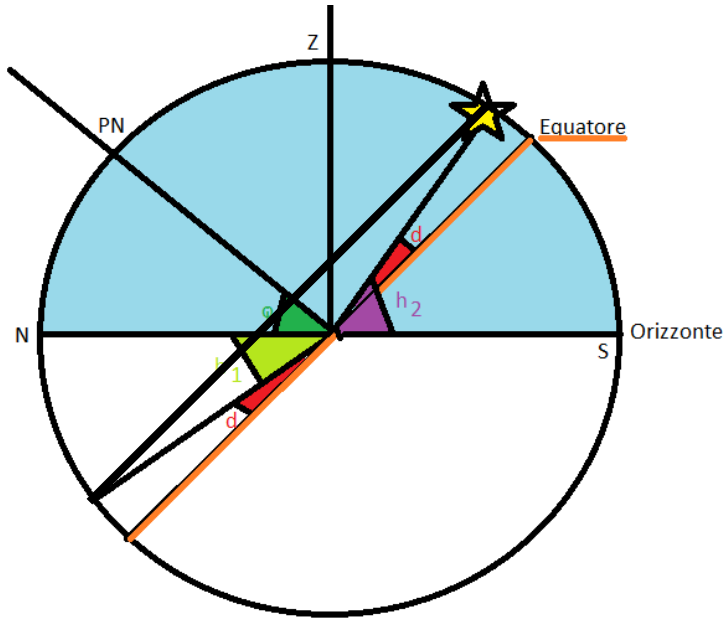
$$\begin{aligned}h_2 &= 90^\circ - \varphi + \delta \\h' &= 180^\circ - h_2 = 90^\circ + \varphi - \delta \\h_1 &= \varphi - 90^\circ + \delta \\ \frac{h' + h_1}{2} &= \frac{90^\circ + \varphi - \delta + \varphi - 90^\circ + \delta}{2} = \varphi\end{aligned}$$

In *Figura 2*, h' è pari al supplementare dell’angolo viola scuro (h_2). Dalla figura stessa ci si può convincere di come adesso stiamo valutando entrambe le “altezze” (o meglio, le distanze angolari prese con il loro segno a seconda che la stella sia sopra o sotto l’orizzonte) dal punto cardinale Nord.

Dopo aver letto quest’ultima osservazione, per il lettore sarà facile comprendere quanto affermato immediatamente dopo aver fornito la relazione all’inizio del paragrafo: il problema posto si può risolvere in ogni caso riconducendosi alla stessa origine, tuttavia a livello osservativo l’impiego di stelle circumpolari fa sì che l’origine per le altezze sia già la stessa, ossia il punto cardinale nord. Infatti una stella circumpolare si discosta “poco” dal polo nord celeste!

Nota: se avessimo sommato le due altezze in questo secondo caso ($\delta < \varphi$) e diviso per due, avremmo trovato la declinazione della stella come si può facilmente intuire dalla *Figura 2*, che riportiamo di seguito.

Infatti sappiamo che:



$$h_1 = \varphi - 90^\circ + \delta$$

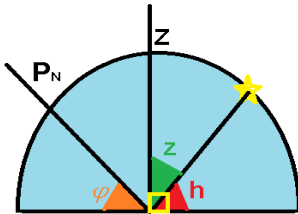
$$h_2 = 90^\circ - \varphi + \delta$$

$$\frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{\varphi - 90^\circ + \delta + 90^\circ - \varphi + \delta}{2} = \frac{2\delta}{2} = \delta$$

Se esaminiamo la figura, possiamo convincerci di nuovo della validità di questa relazione: prolungando verso il meridiano sud la semiretta che individua la posizione della culminazione inferiore della stella, ci accorgiamo che l'intersezione con la sfera celeste di tale prolungamento dista dalla posizione della culminazione superiore di un angolo pari a 2δ . Ma tale distanza angolare è anche uguale ad $h_1 + h_2$ (con h_1 presa col suo segno negativo), dunque divisa per due dà proprio $\frac{2\delta}{2} = \delta$

Distanza zenitale

$$z = 90^\circ - h$$



La distanza zenitale indica quanto dista la stella dallo zenit, che si trova sulla verticale dell'osservatore. Per trovarla, basta sottrarre a 90° (la verticale e l'orizzonte sono separati da un angolo retto) l'altezza della stella h .

FORMULE INVERSE:

$$h = 90^\circ - z$$

Ascensione retta

Tra l'ascensione retta α , il suo angolo orario H ed il tempo siderale relativi ad un dato osservatore vale la relazione:

$$T_s = \alpha + H$$

NOTA: Quando il punto γ passa al meridiano $T_s = 0$ (Il tempo siderale è definito come l'angolo orario del punto γ); quando la stella passa al meridiano $H=0$ e:

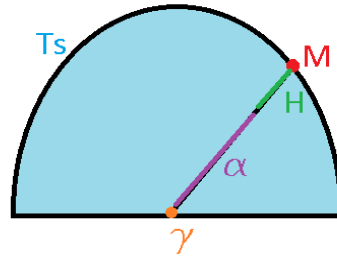
$$T_s = \alpha$$

Il **tempo siderale coincide con l'ascensione retta** delle stelle che passano al meridiano. Per conoscere l'ascensione retta di una stella α , bisogna calcolare la differenza tra il tempo siderale del luogo T_s di osservazione e l'angolo orario H della stella stessa.

$$\alpha = T_s - H$$

L'angolo orario si trova dalla formula:

$$H = T_s - \alpha$$



Coordinate orarie dei punti cardinali Nord e Sud:

Emisfero **boreale**: Nord ($12h$; $90^\circ - \text{latitudine}$)

Sud ($0h$; $\text{latitudine} - 90^\circ$)

Emisfero **australe**: Nord ($0h$; $\text{latitudine} + 90^\circ$)

Sud ($12h$; $-90^\circ - \text{latitudine}$)

Declinazione del Sole

A causa dell'inclinazione dell'eclittica sull'equatore celeste, la declinazione del Sole varia in modo **non uniforme** nel corso dell'anno; una buona approssimazione è data dalla relazione:

$$\delta_{\odot} = 23^{\circ}27' * \sin\left(360^{\circ} * \frac{N + 284}{365}\right)$$

Dove:

N = numero dei giorni trascorsi dall'inizio dell'anno (1° gennaio)

Dato da:

$$N = \text{int}\left(275 * \frac{M}{9}\right) - 2\text{int}\left(\frac{M + 9}{12}\right) + D - 30$$

Per gli anni ordinari

$$N = \text{int}\left(275 * \frac{M}{9}\right) - \text{int}\left(\frac{M + 9}{12}\right) + D - 30$$

Per gli anni bisestili ¹

Dove:

M = mese dell'anno

D = giorno del mese

Ricordiamo che anche per il Sole valgono le seguenti relazioni:

Se **culmina a nord** dello Zenit:

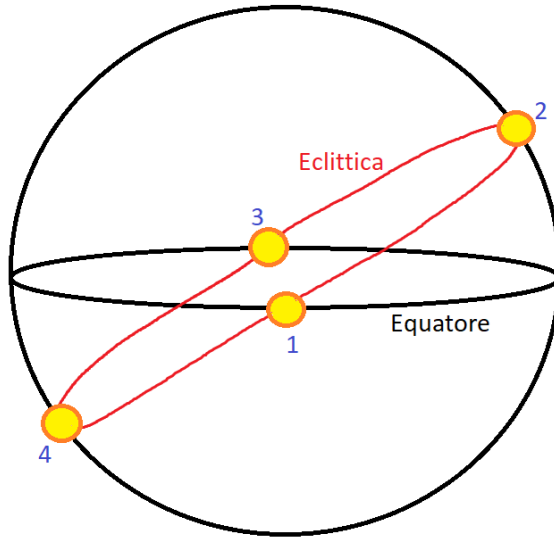
$$\varphi = \frac{h_{max} + h_{min}}{2}$$

Se **culmina a sud** dello Zenit:

$$\delta = \frac{h_{max} + h_{min}}{2}$$

¹ *int* significa "parte intera". Per il calcolo, infatti, bisogna considerare solo la parte intera del numero...

Coordinate equatoriali del Sole



1. Equinozio di Primavera

Il Sole si trova nel punto γ (dato dall'intersezione tra l'Eclittica e l'Equatore), dunque nell'origine del sistema di coordinate equatoriali.

Perciò le sue coordinate sono:

$$AR = 0h \text{ e } \delta = 0^\circ$$

2. Solstizio d'Estate

Il Sole si è spostato di 90° (6 ore) dalla posizione 1 (equinozio di Primavera) e si trova alla massima distanza dall'equatore (ricordiamo che l'angolo tra l'Eclittica e l'Equatore vale $\varepsilon = 23^\circ 26'$). Le sue coordinate sono:

$$AR = 6h \text{ e } \delta = +23^\circ 26'$$

3. Equinozio d'Autunno

Il Sole si trova nel punto ω (anch'esso dato dall'intersezione tra l'Eclittica e l'Equatore, ma opposto al punto γ). Dunque le sue coordinate sono:

$$AR = 12h \text{ e } \delta = 0^\circ$$

4. Solstizio d'Inverno

Il Sole si è spostato di 6 ore dal punto ω e si trova nuovamente alla massima distanza dall'Equatore ma al di sotto di esso. Le sue coordinate quindi sono:

$$AR = 18h \text{ e } \delta = -23^\circ 26'$$

Altezza dei pianeti

Per calcolare l'altezza massima dei pianeti utilizziamo la formula:

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta$$

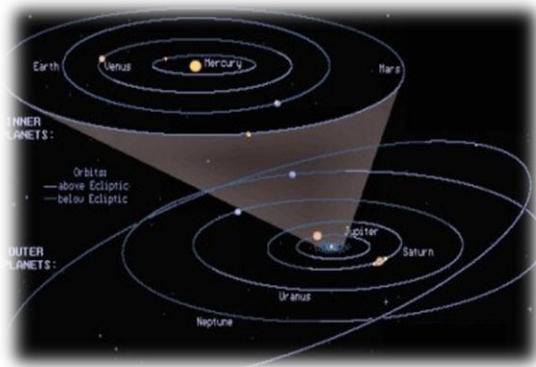
Dove:

$$\delta = \varepsilon + i$$

Ricordiamo che ε è il valore dell'obliquità dell'eclittica ($23^\circ 27'$ circa) e i è l'inclinazione dell'orbita del pianeta rispetto ad essa.

La seguente tabella riporta le varie **inclinazioni orbitali** di alcuni corpi celesti:

Pianeta/Satellite	i
Mercurio	7.01°
Venere	3.39°
Terra	0.00°
Luna	5.15°
Marte	1.85°
Giove	1.31°
Saturno	2.49°
Urano	0.77°
Nettuno	1.77°
Plutone (pianeta nano)	17.14°



Possiamo notare che tutti i **pianeti** sono pressappoco **allineati lungo il piano dell'eclittica** (solo Mercurio arriva a 7°).

TEMPO

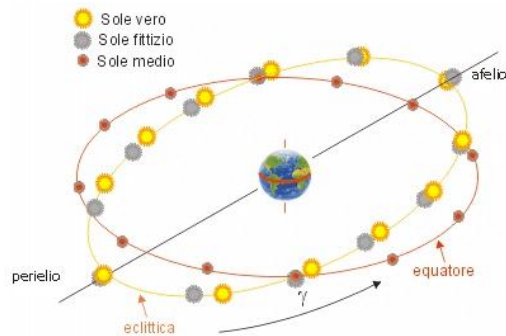
Misura del tempo

La misura del tempo viene effettuata dal **movimento di rotazione diurna della volta celeste** (rotazione della Terra) e dal **movimento annuo del Sole** (rivoluzione della Terra attorno al Sole)².

La rotazione della Terra attorno al suo asse è quasi costante³ quindi l'angolo di rotazione, rispetto ad un qualsiasi riferimento iniziale consente di misurare il tempo. Come riferimento iniziale si prende **l'istante del passaggio del punto al meridiano del luogo**. La durata del giorno dipende da questo punto scelto.

In astronomia i punti adottati sono:

- il **punto γ** ;
- il centro del disco apparente del Sole (**Sole vero**);
- il **Sole medio** (un sole ideale che parte dal punto γ assieme al Sole vero e



² Più precisamente, oggi la misura del tempo non è data dalla rotazione terrestre, ma dall'oscillazione dell'atomo di Cesio-133; il secondo è infatti definito, in seguito alla decisione della XIII conferenza generale sui pesi e sulle misure del 1967, come la durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini, da ($F=4, MF=0$) a ($F=3, MF=09$), dello stato fondamentale dell'atomo di Cesio-133 (def. confermata dalla 26ª CGPM del 2018). Il secondo così definito è chiamato "secondo atomico".

³ In realtà, il periodo di rotazione della Terra, a causa delle interazioni mareali e, in più modesta parte, dello scioglimento dei ghiacciai alle alte latitudini, aumenta lentamente: nel 1900, per esempio, il giorno solare medio si è allungato di 0.002 secondi atomici e di conseguenza il tempo universale accumula un ritardo rispetto al tempo atomico di circa 1 secondo ogni 500 giorni, da cui l'introduzione, preferibilmente in data 30 giugno e 31 dicembre, di un cosiddetto secondo intercalare (leap second).

percorre l'equatore celeste con una velocità angolare costante, in modo da ritornare all'equinozio di primavera assieme al Sole vero).

Le tre unità di tempo definite da questi punti si chiamano:

- **giorno siderale,**
- **giorno solare vero,**
- **giorno solare medio.**

Il tempo da esse misurato è:

- **tempo siderale,**
- **tempo solare vero,**
- **tempo solare medio.**

Nota: Non sono tempi diversi, ma solo diverse unità di misurare il tempo!

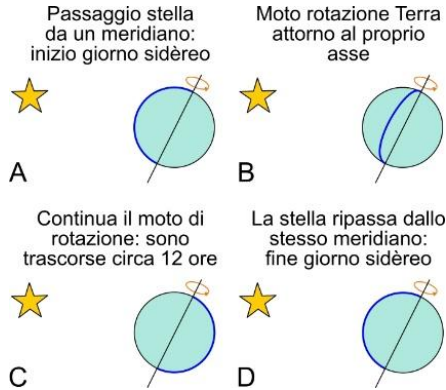
Giorno/tempo siderale

Si definisce giorno siderale l'intervallo di tempo compreso tra due successivi passaggi del punto γ allo stesso meridiano del luogo.

Si definisce tempo siderale l'intervallo di tempo compreso tra il passaggio al meridiano del punto di primavera ad un'altra posizione qualsiasi.

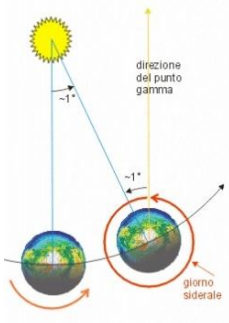
$$t_s = H + \alpha$$

(Tempo siderale = angolo orario + ascensione retta, per un astro qualsiasi)



55

Giorno/tempo solare vero



Il giorno solare vero è l'intervallo di tempo compreso tra due passaggi superiori o inferiori del centro del Sole.

Il tempo solare vero è l'intervallo di tempo compreso tra il passaggio inferiore del Sole e il passaggio in un altro punto qualsiasi della sua traiettoria apparente in cielo.

$$\text{Al meridiano il } T_{\text{sole vero}} = H_{\text{Sole vero}} + 12^h$$

Giorno/tempo solare medio

Il giorno solare medio è l'intervallo compreso tra due passaggi superiori o inferiori del Sole medio.

Il tempo solare medio è l'intervallo di tempo compreso tra il passaggio inferiore del Sole medio e il passaggio in un altro punto della sua traiettoria.

56

$$T_{sole\ medio} = H_{Sole\ medio} + 12^h$$

Equazione del tempo

Si definisce equazione del tempo la **differenza tra il tempo medio ed il tempo solare vero allo stesso istante.**

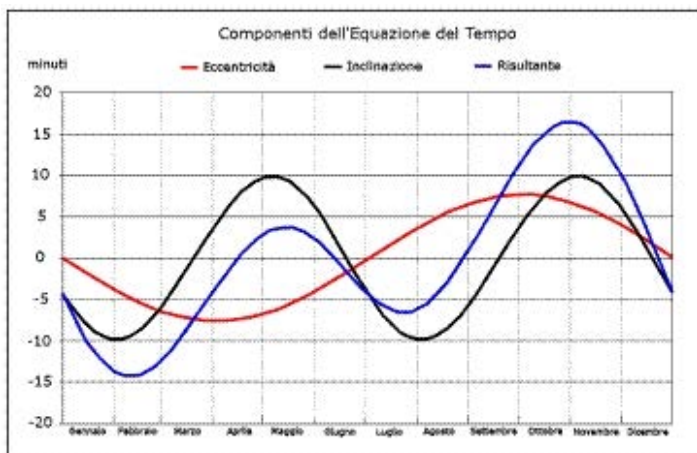
$$E = T_{sole\ medio} - T_{sole\ vero}$$

$$E = H_{Sole\ medio} - H_{Sole\ vero}$$

$$E = \alpha_{Sole\ medio} - \alpha_{Sole\ vero}$$

Il tempo solare medio ad un dato istante è dato dal tempo solare vero più l'equazione del tempo:

$$T_{sole\ medio} = T_{sole\ vero} + E$$



Relazione tra tempo solare e tempo siderale

Consideriamo la posizione del Sole a 24 ore di distanza:

$$t_{1s} = H_{s1} + \alpha_{s1}$$

$$t_{2s} = H_{s2} + \alpha_{s2}$$

Calcolando la differenza tra le due espressioni si ha:

$$t_{2s} - t_{1s} = (H_{s2} - H_{s1}) + (\alpha_{s2} - \alpha_{s1})$$

$$(H_{s2} - H_{s1}) = 24$$

Mentre la differenza in ascensione retta ($\alpha_{s2} - \alpha_{s1}$) dà lo spostamento angolare diurno del sole medio sull'equatore che in gradi è $\frac{24}{365.25}$

Per cui:

$$t_{2s} - t_{1s} = 24 \text{ h} + \frac{24}{365.25}$$

$$t_{2s} - t_{1s} = 24 \left(1 + \frac{1}{365.25}\right)$$

$$t_{2s} - t_{1s} = 24 * \frac{366.25}{365.25}$$

$$\text{Un giorno solare medio} = \frac{366.25}{365.25} \text{ giorni siderali}$$

$$\text{Un giorno siderale} = \frac{365.25}{366.25} \text{ giorni solari veri}$$

Il rapporto $K = \frac{366.25}{365.25} = \mathbf{1.002738}$ serve per convertire gli intervalli di tempo solare medio in intervalli di tempo siderali.

$$\Delta T_s = K \Delta T_m$$

Il rapporto $K' = \frac{365.25}{366.25} = \mathbf{0.997270}$ serve per convertire gli intervalli di tempo siderali in intervalli di tempo solare medio:

$$\Delta T_m = K' \Delta T_s$$

24 ore di tempo medio corrispondono a 24h 03m 56,55s di tempo siderale; viceversa un giorno siderale è 23h 56m 04s di tempo solare medio.

Se s è il tempo siderale ad un certo istante ad un dato meridiano, mentre alla mezzanotte precedente sullo stesso meridiano il tempo siderale era S , dalla mezzanotte sono passati $(s - S)$ ore, minuti, secondi di tempo siderale che corrispondono a $(s - S) * K'$ di tempo solare medio.

Poiché a mezzanotte il tempo solare medio è 0^h , $T_m = (s - S) * K'$ rappresenta il tempo solare medio all'istante del tempo siderale s .

Se al meridiano di quel luogo, alla mezzanotte di una certa data il tempo siderale era S , all'istante di tempo medio solare sarà:

$$s = S + T_m * K$$

Nota:

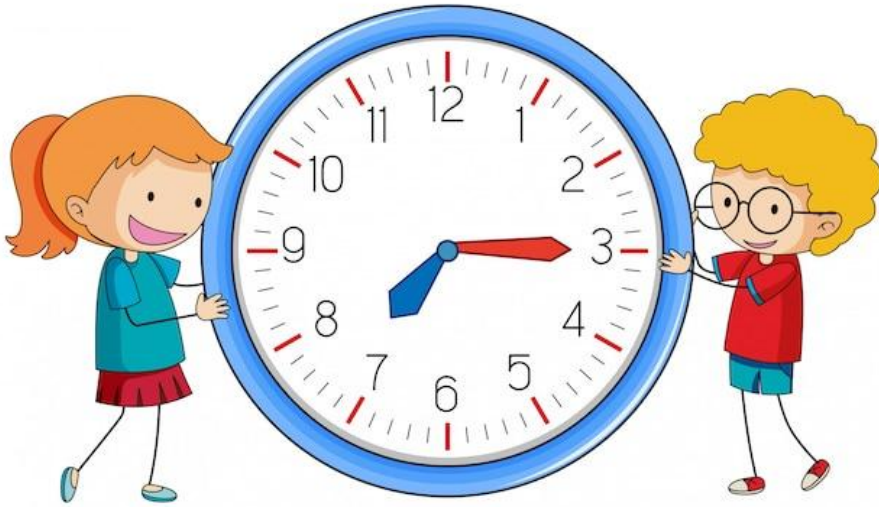
È sempre necessario conoscere il tempo siderale S alla mezzanotte del meridiano dato. Per questo sono stati costruiti **annuari** che forniscono il tempo siderale S_0 alla mezzanotte del meridiano fondamentale di GW.

Il tempo siderale S alla mezzanotte ad una data longitudine λ è dato da:

$$S = S_0 - \frac{\lambda^h}{24^h} (3^m 56^s .55)$$

Inoltre, attorno all'equinozio di autunno (circa il 23 settembre) il Sole medio si trova nei pressi del punto Ω , che in quel momento si trova al meridiano inferiore (mentre il punto γ è al meridiano superiore).

Il 23 settembre corrisponde al 256° giorno del nostro calendario ed è proprio in questa data che il tempo solare medio e il tempo siderale medio coincidono.



Perciò, se contiamo il numero di giorni in tempo medio (n) trascorsi dal 23 settembre, si può scrivere la relazione che lega il tempo medio locale e il tempo siderale locale:

$$TSL - TML = 0.0657 * n$$

Conoscendo poi la longitudine del luogo, è possibile riferire il tempo medio a Greenwich.

Ora locale e longitudine

Si definisce tempo locale medio il tempo regolato sul meridiano del luogo.

Nella vita quotidiana è scomodo utilizzare questo tempo, per cui il primo luglio 1919 sono stati introdotti i **fusi orari**. In base a questa suddivisione il tempo medio è determinato solo per **24 meridiani** geografici principali separati da **15° gradi** (un'ora). I fusi orari sono numerati da 0 a 23 ed il **meridiano passante per GW** costituisce l'**origine** (fuso = 0).



Il tempo medio locale è dato da:

$$t_l = t_f - \Delta\lambda$$

Dove:

$$\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_o$$

Nota:

- 1) La differenza tra le ore locali (siderali o solari) di due meridiani misurate allo stesso istante è **sempre uguale alle differenze di longitudini**;
- 2) Poiché i confini dei fusi orari non distano quasi mai esattamente 7°.5 dal meridiano centrale la differenza $t_l - t_f$ può essere **leggermente maggiore o minore di $\pm 30^m$** . Ciò avviene per ragioni pratiche: quando possibile, infatti, i fusi orari hanno dei confini tali da non separare in due regioni distinte i territori di un medesimo Stato (ciò vale per Stati non troppo estesi in longitudine).

Tempo universale

Il **tempo solare medio del meridiano di GW** si chiama **Tempo Universale (TU)**⁴. Per quanto precedentemente detto, il tempo medio locale è uguale al tempo universale più la longitudine del luogo espressa in ore e considerata positiva ad est di GW:

$$t_l = TU + \lambda$$

Anno tropico, civile, solare e siderale

Anno tropico (o solare): è il tempo che intercorre tra due passaggi consecutivi del Sole al punto γ : esso corrisponde al compimento del ciclo completo delle stagioni.

Anno civile: viene definito con una durata di 365 giorni esatti, dove ogni giorno è inteso come giorno solare medio. Ogni 4 anni, però, introduciamo un giorno aggiuntivo alla fine di febbraio portando l'anno civile alla durata di 366 giorni (anno bisestile).

Anno siderale: è il tempo necessario affinché la Terra completi la propria orbita attorno al Sole

⁴ Per essere precisi, dal 1972 usiamo il Tempo Universale Coordinato (UTC), che scorre come il tempo atomico internazionale e che viene corretto con il famoso secondo intercalare (*vd. nota 3 sopra*) quando ha uno sfasamento superiore a 0.9 secondi rispetto al tempo universale definito in questo Bignamino.

Giorno giuliano (JD)

Il giorno giuliano (JD, Julian Day) è il numero di giorni passati dal mezzogiorno del lunedì 1° gennaio 4713 a.C. Il sistema dei giorni giuliani è stato progettato per fornire agli astronomi un singolo sistema di date che potesse essere usato per lavorare con differenti calendari e per unificare diverse epoche storiche, in quanto non ha anni bisestili, cambi di calendario... La data giuliana è il giorno giuliano combinato con la frazione di giorno trascorso, a partire dal mezzogiorno del Tempo Universale. Quando si ha a che fare con il JD, bisogna tener conto della riforma gregoriana, tramite cui si passò dal 4 ottobre al 15 del 1582.

PER SAPERNE DI PIÙ...

Per evitare le complicazioni che si manifestano quando si deve calcolare il numero di giorni che intercorrono tra due date, Giuseppe Scaligero (1540-1609) ideò un modo diverso per indicare i giorni: la data giuliana. Scaligero pensò bene a far iniziare il conteggio dei giorni dal mezzodì del 1° gennaio del 4712 a.C., una data così lontana che (o almeno così credeva) non fosse possibile avere osservazioni astronomiche precedenti. Ricordiamo quindi che il giorno giuliano inizia alle ore 12:00 UT.



Puoi calcolare il giorno giuliano corrispondente ad una determinata data a questo link oppure scannerizzando il QR code allegato:

<http://www.archaeoastronomy.it/Calcolo%20JD/JD.html>

TABELLA DI DATA GIULIANA

Anno	JD -	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic
1970	2440	587	618	646	677	707	738	768	799	830	860	891	921
1971	2440	952	983	*011	*042	*072	*103	*133	*164	*195	*225	*256	*286
1972	2441	317	348	377	408	438	469	499	530	561	591	622	652
1973	2441	683	714	742	773	803	834	864	895	926	956	987	*017
1974	2442	048	079	107	138	168	199	229	260	291	321	352	382
1975	2442	413	444	472	503	533	564	594	625	656	686	717	747
1976	2442	778	809	838	869	899	930	960	991	*022	*052	*083	*113
1977	2443	144	175	203	234	264	295	325	356	387	417	448	478
1978	2443	509	540	568	599	629	660	690	721	752	782	813	843
1979	2443	874	905	933	964	994	*025	*055	*086	*117	*147	*178	*208
1980	2444	239	270	299	330	360	391	421	452	483	513	544	574
1981	2444	605	636	664	695	725	756	786	817	848	878	909	939
1982	2444	970	*001	*029	*060	*090	*121	*151	*182	*213	*243	*274	*304
1983	2445	335	366	394	425	455	486	516	547	578	608	639	669
1984	2445	700	731	760	791	821	852	882	913	944	974	*005	*035
1985	2446	066	097	125	156	186	217	247	278	309	339	370	400
1986	2446	431	462	490	521	551	582	612	643	674	704	735	765
1987	2446	796	827	855	886	916	947	977	*008	*039	*069	*100	*130
1988	2447	161	192	221	252	282	313	343	374	405	435	466	496
1989	2447	527	558	586	617	647	678	708	739	770	800	831	861
1990	2447	892	923	951	982	*012	*043	*073	*104	*135	*165	*196	*226
1991	2448	257	288	316	347	377	408	438	469	500	530	561	591
1992	2448	622	653	682	713	743	774	804	835	866	896	927	957
1993	2448	988	*019	*047	*078	*108	*139	*169	*200	*231	*261	*292	*322
1994	2449	353	384	412	443	473	504	534	565	596	626	657	687
1995	2449	718	749	777	808	838	869	899	930	961	991	*022	*052
1996	2450	083	114	143	174	204	235	265	296	327	357	388	418
1997	2450	449	480	508	539	569	600	630	661	692	722	753	783
1998	2450	814	845	873	904	934	965	995	*026	*057	*087	*118	*148
1999	2451	179	210	238	269	299	330	360	391	422	452	483	513
2000	2451	544	575	604	635	665	696	726	757	788	818	849	879

* (questo simbolo indica che il “*prefisso*” del giorno riportato nella colonna “JD-” è aumentato di 1)

Le date riportate in tabella si riferiscono al giorno 0 del mese

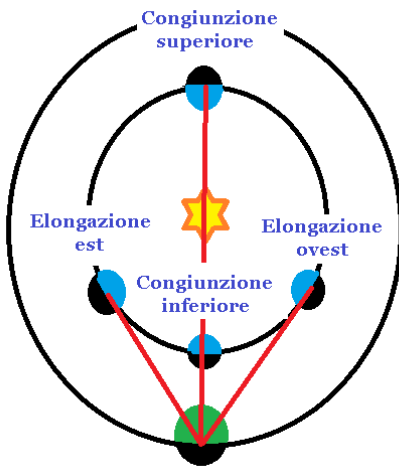
Es: 16 novembre 1984 = 2446005 + 16 = 2446021 JD

MECCANICA CELESTE

Moto apparente dei pianeti

64

I pianeti si muovono in vicinanza dell'eclittica, ma il loro movimento visto dalla Terra è più complicato di quello del Sole e della Luna. Il Sole e la Luna, rispetto alle stelle fisse, si muovono di moto diretto, cioè **antiorario**. Per i pianeti si osserva, in generale, che essi si muovono di moto diretto; tuttavia, in alcuni tratti, variabili da pianeta a pianeta, il loro moto è **retrogrado**: il



pianeta, dopo avere raggiunto una posizione di stazionarietà, inverte il moto, descrivendo una traiettoria tipicamente a forma di *cappio*. Ciò è molto più evidente per i pianeti interni Mercurio e Venere, che oscillano avanti e indietro rispetto alla posizione del Sole, venendosi a trovare ora da una parte ora dall'altra rispetto ad esso. Quando il pianeta è in **congiunzione superiore** è invisibile, perché sorge e tramonta con il Sole. Continuando nel suo moto apparente, dopo qualche

tempo potrà essere visto dopo il tramonto ad occidente (si troverà a sinistra del Sole). L'**elongazione orientale** (cioè la distanza angolare del pianeta dal Sole quando il pianeta si trova a sinistra del Sole) cresce nei giorni seguenti; contemporaneamente, però, decresce la sua velocità angolare apparente. Quando il pianeta raggiunge la stessa velocità angolare del Sole, per qualche istante si muove mantenendo la stessa distanza angolare dall'astro diurno: il pianeta ha in questo momento raggiunto la **massima elongazione orientale**. Per Venere la massima elongazione è di circa 46° , per Mercurio varia dai 18° ai 28° . Da questo momento il pianeta comincia il suo avvicinamento al Sole ritornando, con moto retrogrado, in congiunzione con esso ma questa volta in configurazione di **congiunzione inferiore**. Il pianeta è adesso invisibile, a meno che esso non transiti sul disco del Sole: in questo caso, con opportuni strumenti (come ad esempio un telescopio), è possibile osservarne il disco che si proietta su quello del Sole! Continuando nel suo moto retrogrado, il pianeta

si sposta via via verso occidente (a destra del Sole) ed è visibile prima del sorgere del Sole (**elongazione occidentale**).

La figura alla pagina precedente mostra che i pianeti inferiori non possono **mai trovarsi in quadratura o opposizione**, cioè l'angolo Sole-Terra-Pianeta non potrà mai essere uguale rispettivamente a 90° o 180° (in generale, quest'angolo non potrà mai essere più grande dell'elongazione massima, nettamente inferiore a 90°).

I pianeti esterni invece possono assumere qualsiasi distanza dal Sole (da 0° a 180°) e quindi possono trovarsi nelle **due precedenti configurazioni**. Raggiunta l'elongazione massima di 180° , il pianeta si trova dalla parte opposta a quella del Sole, la velocità retrograda è massima ed esso raggiunge anche il massimo della luminosità.

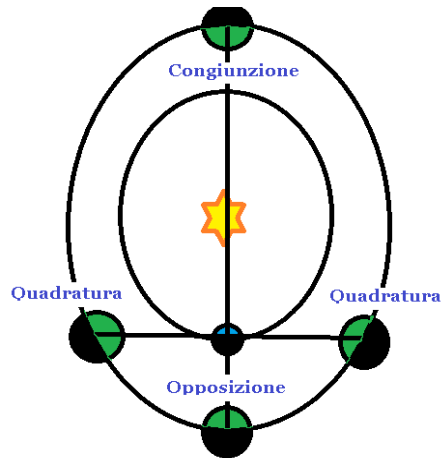
Oggi noi sappiamo che il moto apparente dei pianeti è il risultato della composizione del moto della Terra e di quello dei pianeti attorno al Sole: semplicemente ciò vuol dire che noi osserviamo un oggetto in movimento essendo noi stessi in movimento. Le velocità dei pianeti variano: più sono vicini al Sole, più velocemente si muovono. I due pianeti interni, essendo più vicini al Sole, sorpassano la Terra durante il loro moto, mentre è la Terra a sorpassare i pianeti esterni quando sono vicini all'opposizione: ecco perché essi sembrano muoversi all'indietro.

Se indichiamo con T il nostro anno siderale, con P il periodo sidereo del pianeta e con S il periodo sinodico (il tempo intercorso tra due congiunzioni o due opposizioni successive) la composizione delle velocità ci consente di calcolare la velocità relativa del pianeta rispetto alla Terra.

Per i pianeti interni (la Terra si muove più lentamente):

$$\frac{2\pi}{S} = \frac{2\pi}{P} - \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{T}$$



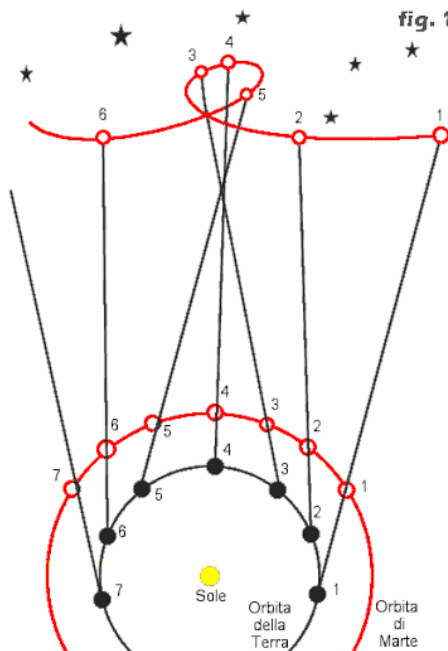
Per i pianeti esterni (la Terra si muove più velocemente):

$$\frac{2\pi}{S} = \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{P}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{P}$$

66

Marte, Giove e Saturno (i pianeti esterni visibili ad occhio nudo) si possono trovare dunque in qualsiasi posizione lungo l'eclittica - anche a mezzanotte,



in posizione direttamente opposta a quella del Sole -: quando questo avviene raggiungono il massimo della luminosità. Marte sembra muoversi più rapidamente, Giove un po' meno, e Saturno è il più lento. La loro **velocità varia**: più sono vicini al Sole e più rapidamente si muovono (vedi la sezione “*terza legge di Keplero*”). Quando i tre pianeti esterni sono vicini all'opposizione, la Terra, che orbita più vicina al Sole, li sorpassa, e quindi essi sembrano muoversi all'indietro. Il moto retrogrado dei due pianeti interni ha una causa simile. Essendo più vicini al Sole, sono essi che sorpassano la Terra durante il loro moto.



TRA CONCILI E CONGIUNZIONI SINODICHE...

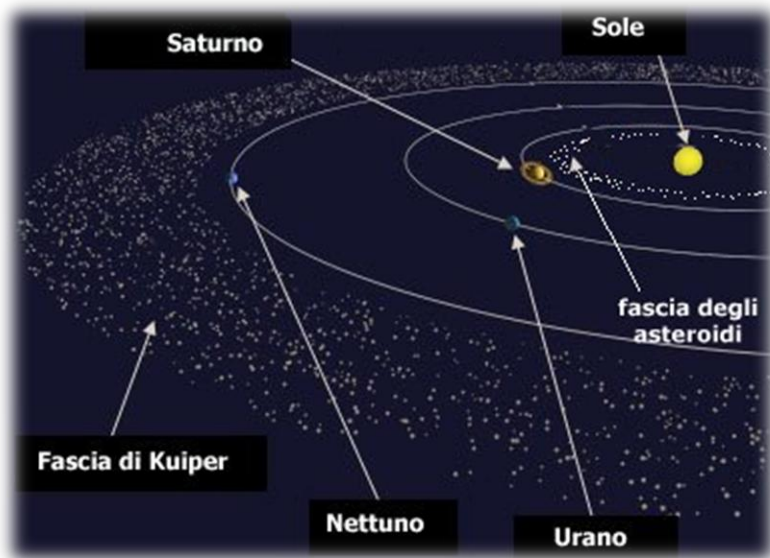


Il termine “**sinodico**” deriva dal latino synodicum, a sua volta ricavato dal greco *συνοδικός* (synodikós) derivato da *συνodos* (synodos) “riunione, concilio”, le cui radici sono *σύν* «con, insieme» e *ὁδός* «via» e quindi **camminare insieme, allinearsi...**

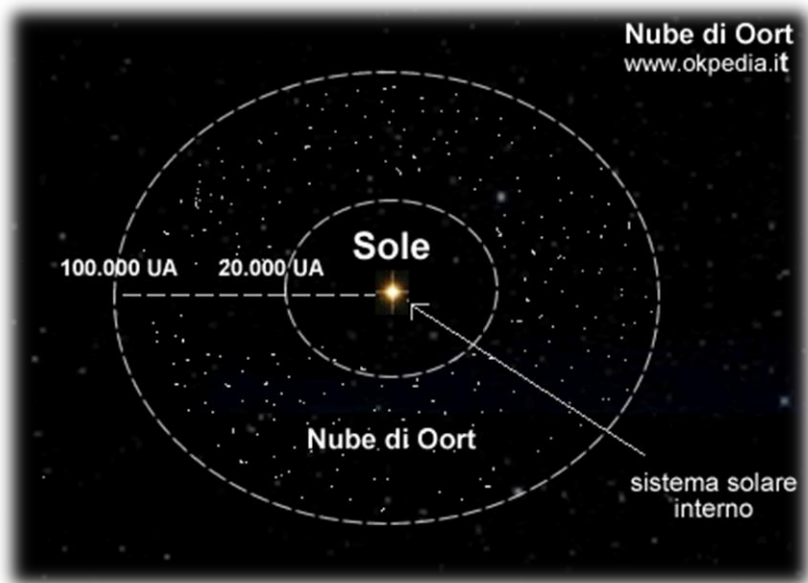
Sommario di quanto è noto oggi sui pianeti

Viene qui riportato un breve sommario dei componenti del sistema solare. In genere vengono distinte quattro classi di oggetti:

1. I pianeti maggiori, in ordine di distanza dal Sole - **Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove, Saturno, Urano e Nettuno**. Tutti tranne i due più interni hanno dei satelliti, e tutti e quattro i più esterni hanno degli anelli, composti da piccoli ciottoli di materia in orbita attorno al pianeta.
2. **Asteroidi** o pianetini, in maggioranza - anche se non tutti - posti tra Marte e Giove. Il loro diametro arriva fino a 500 km.
3. La "**fascia di Kuiper**" composta da oggetti ghiacciati oltre l'orbita di Nettuno, di cui il più noto (anche se secondo per dimensioni, come recentemente scoperto) è **Plutone**, scoperto nel 1930 e delle dimensioni della nostra Luna. La fascia ha preso il nome dell'astronomo belga Gerard Kuiper, si estende probabilmente a una distanza doppia di quella di Nettuno e si stima che consista di circa 100 000 oggetti (finora ne sono stati identificati circa 1 000), molti dei quali con un diametro di soli 100 km o meno.



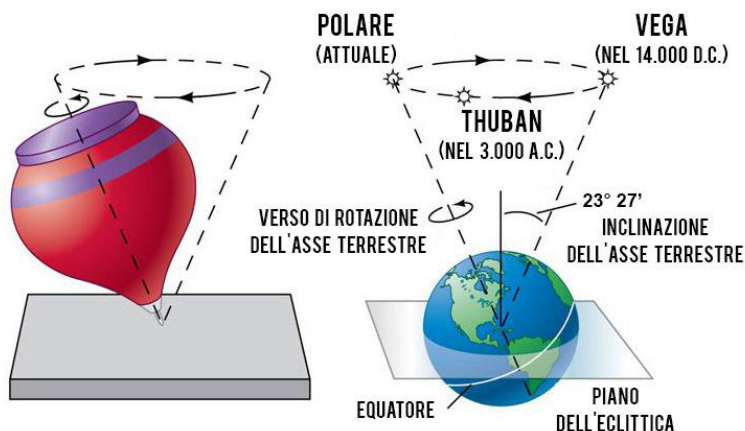
4. **Comete**, tradizionalmente divise in "non ricorrenti" (il nome ufficiale è "comete a lungo periodo") e comete "periodiche". Si ritiene che le comete **non ricorrenti** provengano dalla "**nube di Oort**", un enorme agglomerato quasi **sferico** di oggetti ghiacciati agli estremi limiti del sistema solare. Tali oggetti sono debolmente legati al Sole e, di tanto in tanto, l'attrazione gravitazionale di qualche stella lontana cambia lievemente il moto di alcuni di essi, lanciandoli in direzione del Sole. Se si verifica tale eventualità, essi diventano visibili come comete, quando la radiazione del Sole fa evaporare una parte della loro superficie generando la chioma e la coda della cometa. Un tempo le comete **periodiche** si ritenevano oggetti inizialmente non ricorrenti, la cui traiettoria era poi stata deviata facendo sì che esse venissero catturate dall'attrazione gravitazionale dei pianeti più grandi. Oggi si ritiene che provengano dalla fascia di Kuiper, in particolare dalla classe di oggetti noti come **Centauro**.



Moti millenari della Terra

Oltre ai moti di rotazione e rivoluzione, la Terra è soggetta anche a movimenti che si sviluppano su lunghissimi intervalli di tempo, noti come **moti millenari**. Questi fenomeni sono causati principalmente dall'azione gravitazionale esercitata dal Sole, dalla Luna e dagli altri pianeti del Sistema Solare. I moti millenari si suddividono in due grandi categorie:

- **Variazioni dell'asse di rotazione.** L'asse di rotazione della Terra, oggi, è inclinato di circa 23.5° rispetto al piano dell'orbita terrestre, l'eclittica. Questa inclinazione non è costante: varia lentamente, in un periodo di circa 41.000 anni, da 22.1° e 24.5° . In circa 26.000 anni, la direzione verso cui punta l'asse cambia spostando il polo celeste da una stella all'altra. Il fenomeno che descrive questa rotazione millenaria dell'asse terrestre è detto **precessione**.



Durante il moto di rivoluzione attorno al Sole, l'asse di rotazione terrestre tende a mantenere la propria orientazione nello spazio. Questo comportamento è spiegato dalla **conservazione del momento angolare**, una grandezza vettoriale che, in assenza di forze esterne, si mantiene costante in modulo, direzione e verso. La Terra, ruotando su se stessa, si comporta come un **giroscopio**: resiste alle sollecitazioni che tentano di modificarne l'assetto rotazionale, mantenendo stabile il proprio asse. Tuttavia, la Terra non è una sfera perfetta: ha la forma di un **ellissoide oblato**, cioè leggermente schiacciata ai poli e rigonfia all'equatore. Questo rigonfiamento equatoriale è il risultato della rotazione terrestre e rappresenta una

massa eccedente rispetto alla forma sferica. Le forze gravitazionali esercitate dal Sole, dalla Luna e, in misura minore, dagli altri pianeti, agiscono su questa massa eccedente in modo differenziale: l'attrazione è più intensa sull'equatore che sui poli. Ne deriva una coppia di forze che genera un momento torcente che agisce perpendicolarmente al momento angolare e tende a riallineare l'asse di rotazione perpendicolarmente al piano dell'eclittica. Il nostro asse di rotazione, ruotando, genera una risposta dinamica e, invece di riallinearsi alla perpendicolare all'eclittica, si muove attorno ad esso di moto circolare. Questo fenomeno è noto come **precessione assiale**. L'asse terrestre sembra descrive un cono nello spazio, con vertice al centro della Terra, completando un giro completo in circa 26.000 anni, periodo chiamato **anno platonico**.

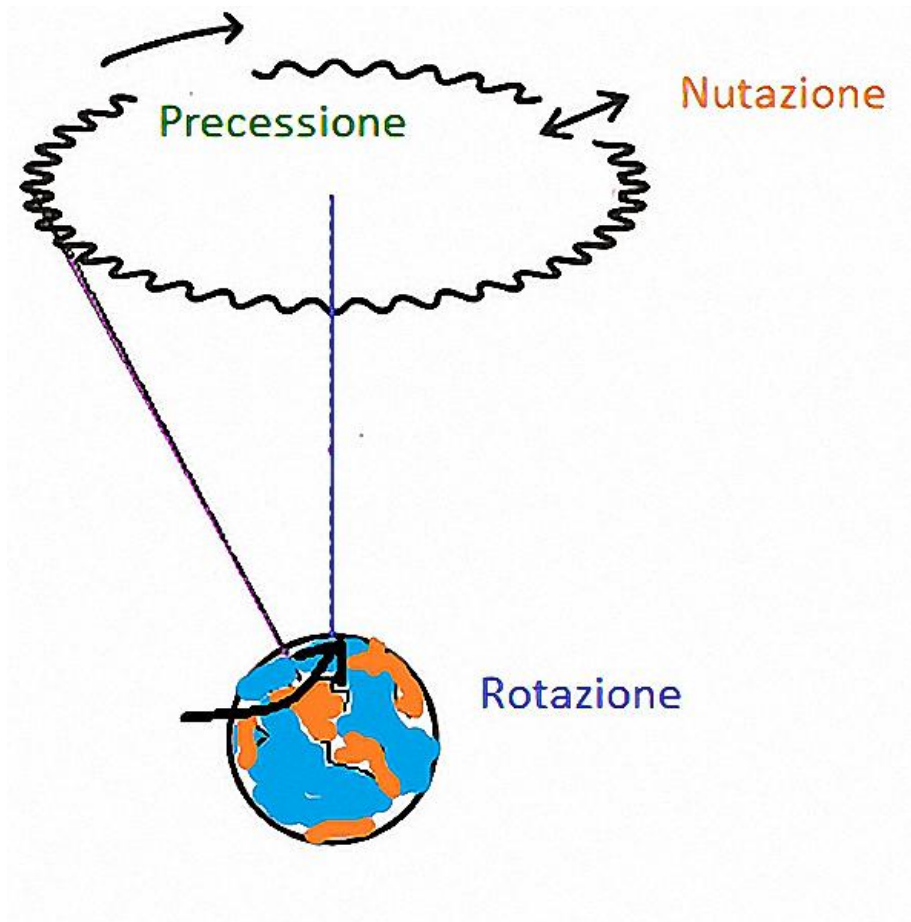
Poiché l'equatore celeste è perpendicolare all'asse terrestre, anch'esso segue il moto di precessione, modificando gradualmente la sua orientazione rispetto alle stelle fisse. Di conseguenza, anche la **linea degli equinozi**, l'intersezione tra l'equatore celeste e il piano dell'eclittica, ruota nello spazio con la stessa velocità angolare dell'asse ed il punto γ , intersezione tra l'equatore celeste ed l'eclittica che definisce l'equinozio di primavera ed è stato assunto come origine del sistema equatoriale, anticipa di 50.3 secondi d'arco ogni anno, per cui il Sole incontra il punto γ ogni anno in anticipo rispetto all'anno precedente, da cui il termine "**precessione degli equinozi**".

Ai tempi di Ipparco il Sole, all'equinozio di primavera, si proiettava nella costellazione d'Ariete, oggi nei Pesci, la prossima sarà la costellazione dell'Acquario che, appunto, precede la costellazione dei Pesci. Il polo nord celeste, che oggi cade abbastanza vicino alla stella Alpha dell'Orsa Minore, tra 14.000 anni si troverà in vicinanza della stella Vega della costellazione della Lira.

- **La precessione luni-solare.** È dovuta per 2/3 circa alla Luna ed il restante 1/3 al Sole. L'orbita che la Luna percorre attorno al nostro pianeta non è complanare alla nostra. La interseca in due punti, i nodi, e l'angolo tra i due piani è di circa 5° . Varia nel tempo, e determina una consistente variazione della posizione del piano orbitale del nostro satellite: il fenomeno che ne deriva è la **retrogradazione dei nodi**. Per effetto di questa variazione il momento della quantità di moto della Terra non ruota in modo uniforme attorno all'asse dell'eclittica e conseguentemente, il polo nord celeste non si muove di moto circolare uniforme ma presenta un moto oscillatorio, che lo porta ad avvicinarsi e ad allontanarsi dal polo nord dell'eclittica.

Questo fenomeno prende il nome di **nutazione**, ha un periodo di 18.6 anni coincidente con il periodo di retrogradazione dei nodi.

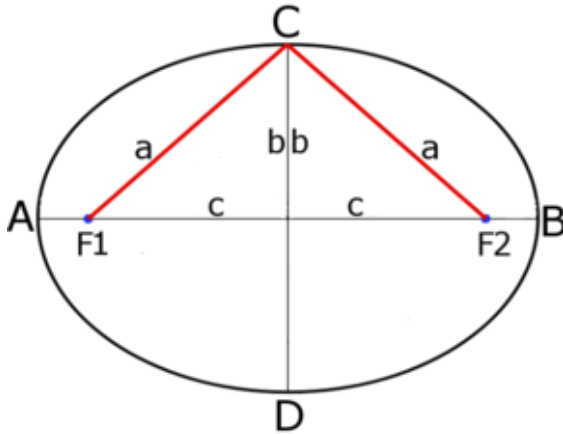
La comprensione del moto di precessione è essenziale per lo studio della dinamica terrestre, in quanto comporta importanti conseguenze in ambito astronomico. Nel corso dei millenni, esso determina una variazione della posizione apparente delle stelle nel cielo, modifica progressivamente la data degli equinozi e incide sulla misurazione del tempo, influisce sul clima su scala geologica modificando la distribuzione stagionale della radiazione solare, contribuendo ai cicli glaciali e interglaciali descritti dalla teoria di Milanković.



Le leggi del moto dei pianeti

Prerequisito: l'ellisse

Luogo geometrico dei punti del piano per i quali si mantiene costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.



Detta in parole più semplici, l'ellisse non è altro che una circonferenza "schiacciata". Un elemento fondamentale che ci permette di capire di quanto questa viene compressa è l'**eccentricità** e . L'eccentricità è definita come il rapporto tra la semidistanza focale e il semiasse maggiore:

$$e = \frac{c}{a}$$

FORMULE INVERSE:

$$c = ae$$

$$a = \frac{c}{e}$$

Infatti, nell'ellisse possiamo individuare:

- **Semiasse maggiore** (a)
- **Semiasse minore** (b)
- **Semidistanza focale** (c)

Indicheremo quindi con $2a$ il semiasse maggiore (AB), con $2b$ il semiasse minore (CD) e con $2c$ la distanza focale (F_1F_2).

ATTENZIONE:

L'eccentricità dell'ellisse è **SEMPRE** compresa tra 0 e 1 ($0 < e < 1$). Se questa fosse uguale a 0, i due fuochi andrebbero a coincidere con l'origine e l'ellisse diventerebbe una circonferenza. Se fosse uguale a 1, diventerebbe una parabola; se fosse $e > 1$ diventerebbe una iperbole.

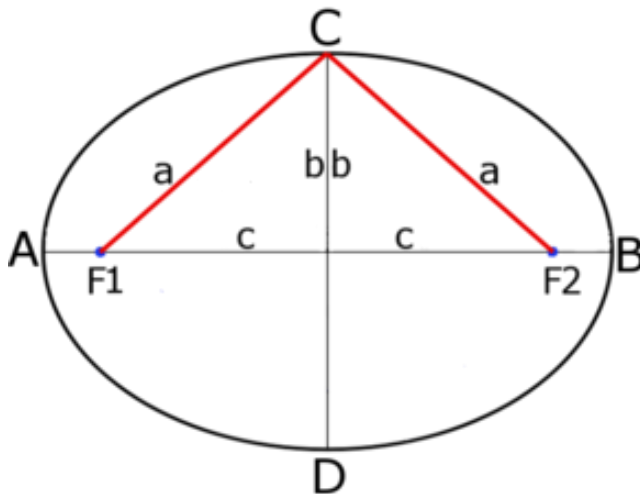
Dando un'occhiata alla figura, si nota che la somma delle distanze dai due punti fissi detti fuochi non è solo costante, ma è anche pari alla lunghezza dell'asse maggiore ($2a$). Quindi, si può anche applicare il **teorema di Pitagora**⁵:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

FORMULE INVERSE:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

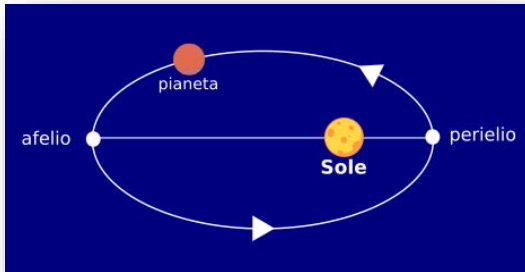


⁵ Poiché (vd. figura): $CF_1 = CF_2$, $CF_1 + CF_2 = 2a$ si può scrivere come $2CF_2 = 2a$. Semplificando: $CF_2 = a$

LE LEGGI DI KEPLERO

Prima legge di Keplero

Enunciato: **i pianeti descrivono intorno al Sole orbite ellittiche, in cui questo occupa uno dei fuochi.**



Si può quindi notare che la distanza di un pianeta attorno al Sole non si mantiene costante, bensì ci sarà un punto in cui questo sarà più vicino al Sole (**perielio**) e uno in cui sarà più lontano (**afelio**).

75

Possiamo quindi calcolare le due distanze:

$$d_a = a(1 + e)$$

$$d_p = a(1 - e)$$

FORMULE INVERSE:

$$a = \frac{d_a}{1 + e}$$

$$a = \frac{d_p}{1 - e}$$

$$e = \frac{d_a}{a} - 1$$

$$e = 1 - \frac{d_p}{a}$$

Inoltre, si nota anche che dalla somma delle due distanze otteniamo l'asse maggiore dell'orbita:

$$2a = d_a + d_p$$

E il semiasse è quindi dato da:

$$a = \frac{d_a + d_p}{2}$$

76

FORMULE INVERSE:

$$d_a = 2a - d_p$$

$$d_p = 2a - d_a$$

La distanza focale è data dalla differenza delle due distanze:

$$2c = d_a - d_p$$

$$c = \frac{d_a - d_p}{2}$$

FORMULE INVERSE:

$$d_a = 2c + d_p$$

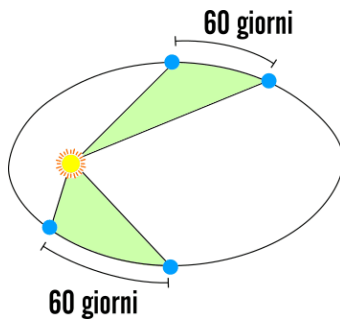
$$d_p = d_a - 2c$$

Quindi l'eccentricità dell'orbita può essere anche scritta come:

$$e = \frac{d_a - d_p}{d_a + d_p} = \frac{2c}{2a}$$

Seconda legge di Keplero

Enunciato: **il raggio vettore che congiunge il Sole al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali**



Dalla seconda legge comprendiamo che la **velocità del pianeta intorno al Sole non è costante**: al perielio viaggerà più velocemente che all'afelio. Quindi, si può affermare che le velocità sono inversamente proporzionali alle distanze:

$$\frac{V_a}{V_p} = \frac{d_p}{d_a}$$

FORMULE INVERSE:

$$V_a = \frac{d_p V_p}{d_a}$$

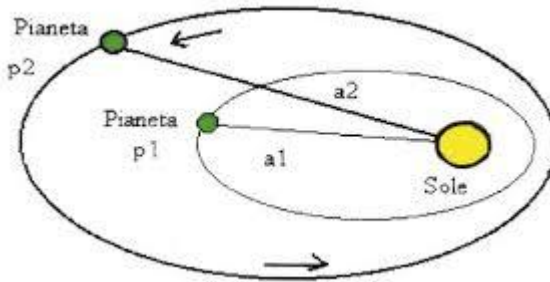
$$V_p = \frac{V_a d_a}{d_p}$$

$$d_a = \frac{V_p d_p}{V_a}$$

$$d_p = \frac{V_a d_a}{V_p}$$

Terza legge di Keplero

Enunciato: **i cubi dei semiassi maggiori sono proporzionali ai quadrati dei periodi di rivoluzione**



$$\frac{a^3}{T^2} = k$$

Dalla terza legge, si nota che esiste una relazione tra periodo di rivoluzione e lontananza dal corpo centrale. Sono infatti legati tra loro dal valore di una costante che è stata indicata con k.

Per i corpi orbitanti intorno ad una massa comune (come ad esempi o per i corpi del Sistema solare) questa legge può essere anche scritta come:

$$\frac{a_t^3}{T_t^2} = \frac{a_m^3}{T_m^2} = \frac{a_s^3}{T_s^2} = \dots$$

PER I CORPI DEL SISTEMA SOLARE (che orbitano intorno al Sole), se si inserisce in formula il valore del semiasse maggiore in unità astronomiche (UA) e il periodo di rivoluzione in anni, il valore della costante è uguale a 1. Infatti, ricavandola per la Terra:

$$\frac{(1 \text{ UA})^3}{(1 \text{ anno})^2} = 1$$

E se $k = 1$ per la Terra, vale per tutti gli altri corpi orbitanti intorno al Sole.

LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Con le leggi di Keplero siamo ancora in quella parte di fisica che descriviamo come cinematica: descriviamo perfettamente i moti dei pianeti ma non risaliamo alle cause. Newton avanzò l'ipotesi che sia i gravi in caduta libera che i pianeti vengono deviati dalla condizione di moto rettilineo uniforme dall'esistenza di una forza centrale. Nel 1684 Newton, “poggiandosi sulle spalle dei giganti” (Keplero ed il nostro Galilei), dimostrò che la forza che fa “fluttuare” i pianeti attorno al Sole dipende dall'inverso del quadrato della distanza da esso.

Integrando il suo secondo principio della dinamica con la terza legge di Keplero perviene a:

$$F_g = \frac{4\pi^2 m}{K r^2}$$

Questa forza deve dipendere anche dalla massa M del Sole ed allora:

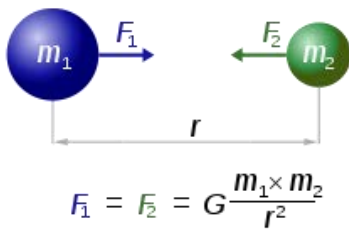
$$F_g = \frac{4\pi^2 mM}{MK r^2}$$

Dove K è la costante della terza legge di Keplero. Ponendo la quantità:

$$\frac{4\pi^2}{MK} = G$$

(notare che contiene la costante K e la massa del Sole) otteniamo la nota formula:

$$F_g = \frac{G mM}{r^2}$$



Newton dedusse che questa legge è valida non solo per i corpi del sistema solare ma in tutto l'Universo: è la Legge di Gravitazione Universale. Nel 1798 Cavendish ideò la bilancia a torsione e trovò il valore per la costante $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ ⁶.

⁶ Il valore della costante G, misurato in seguito da diversi esperimenti, è rimasto oggi praticamente lo stesso con solo poche cifre decimali in più: $6.67384(80) \times 10^{-11}$ ecc ecc...

TERZA LEGGE DI KEPLERO GENERALIZZATA

Approssimando l'orbita di un corpo a circolare e considerando trascurabile la massa del corpo orbitante, la condizione di equilibrio per la quale esso orbita è data da:

$$F_c = F_g$$

$$\text{Forza centrifuga} = \text{Forza gravitazionale}$$

La forza centrifuga è espressa come:

$$F_c = m a_c$$

E quella gravitazionale (dalla legge di gravitazione universale di Newton) come:

$$F_g = \frac{GMm}{a^2}$$

Sostituendo in formula:

$$m a_c = \frac{GMm}{d^2}$$

Notiamo che, semplificando m , otteniamo un modo per esprimere l'accelerazione:

$$a_c = \frac{GM}{d^2}$$

Ma tale accelerazione, essendo essa centripeta, equivale anche a:

$$a_c = \frac{v^2}{a} = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2 a} = \frac{4\pi^2 a}{T^2}$$

Sostituendo in formula:

$$\frac{4\pi^2 a}{T^2} = \frac{GM}{a^2}$$

Da cui:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

FORMULE INVERSE:

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM T^2}{4\pi^2}}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}}$$

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{G T^2}$$

Nota: nel caso in cui la massa del corpo orbitante non fosse trascurabile, la terza legge di Keplero generalizzata diventerebbe:

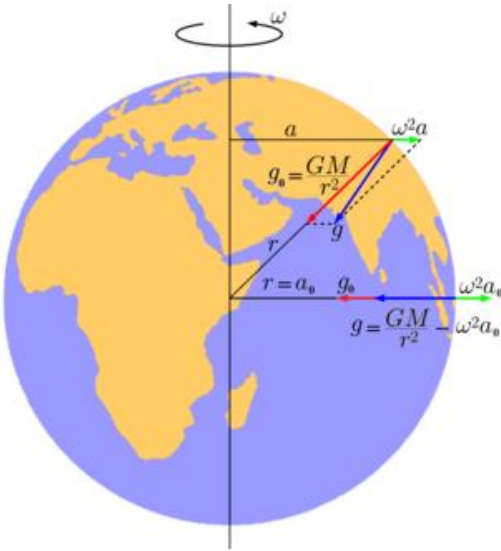
$$\frac{d^3}{T^2} = \frac{G (M + m)}{4\pi^2}$$

Nel Sistema solare la somma delle due masse si considera uguale alla sola massa del Sole data la relativa piccola massa dei pianeti.

NOTA:

I corpi lasciati cadere verso il basso, quando la resistenza dell'aria è trascurabile, cadono con la stessa accelerazione g , detta **accelerazione di gravità**. Sulla superficie terrestre l'accelerazione di gravità è $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. In realtà il valore di g cambia da punto a punto, perché dipende fra l'altro dall'altezza del punto sul livello del mare e dalla sua latitudine. Ora che conosciamo la legge di gravitazione universale possiamo dire che i corpi cadono per effetto della forza di gravitazione che si esercita tra il corpo e la Terra. Allora:

$$g = \frac{GM}{d^2}$$



Se il corpo si trova sulla Terra o prossimo alla superficie, sostituendo a questa formula i valori relativi alla massa della Terra e al suo raggio troviamo per l'accelerazione il valore noto di **9.8 m/s²**.

Un altro fattore che influisce sul valore di g è la rotazione terrestre in quanto ogni corpo su di essa è soggetto ad una forza centripeta per cui:

$$g' = g - \omega^2 R_T$$

All'Equatore



***"Rationem vero harum
Gravitatis proprietatum
ex phænomenis nondum
potui deducere, &
hypotheses non fingo."***

"In verità non sono riuscito a dedurre la causa di queste proprietà della gravità dai fenomeni, e non avanzo ipotesi."

Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, liber tertius*

Una precisazione sulla Terza legge di Keplero generalizzata...

Forza centrifuga o centripeta?

TUTTO DIPENDE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO SCELTO!

Nel calcolo dell'espressione della terza legge di Keplero generalizzata abbiamo uguagliato la legge di gravitazione universale alla forza centrifuga perché ci siamo posti in un sistema di riferimento non inerziale, che ruota assieme al pianeta.

Il pianeta ruota, quindi ha un'accelerazione non nulla: il nostro sistema è accelerato rispetto ad un altro che ha origine nel centro del Sole. In un sistema non inerziale agiscono forze apparenti. Nel sistema di riferimento da noi scelto, la forza apparente che tiene il pianeta su un'orbita circolare è quella centrifuga, che è una forza fittizia uguale ed opposta a quella centripeta che lo manterrebbe nella sua orbita se fosse osservato da un punto fisso dello spazio.

Esempio:

Consideriamo un'auto che prende una curva, vista da un osservatore sulla strada, che è sistema inerziale. L'auto non slitta: è mantenuta sulla sua traiettoria dalla forza di attrito statico tra il suolo e le ruote, che ha il ruolo di forza centripeta. L'auto è accelerata: il passeggero si trova dentro un sistema non inerziale, quindi sentirà l'effetto di una pseudoforza, cioè la forza centrifuga che è diretta in verso opposto alla forza centripeta menzionata in precedenza. Infatti, quando la nostra auto prende una curva ci sentiamo spinti verso l'esterno, nonostante non ci sia nessuno che materialmente ci spinge!

L'osservatore esterno dirà:



I passeggeri, per il principio d'inerzia, tendono a mantenere inalterata la propria velocità, opponendo una certa "resistenza" o inerzia ad assecondare la curva

Può dire così perché nel suo sistema di riferimento i passeggeri hanno una velocità non nulla, quella dell'auto che li trasporta!

Il passeggero dirà:

84

Prima ero fermo rispetto alla mia macchina, ora sto cominciando a muovermi verso l'esterno, quindi sto accelerando... in effetti sento qualcosa che mi spinge verso l'esterno da un lato, sento l'effetto di una forza, anche se nessuno mi sta spingendo!

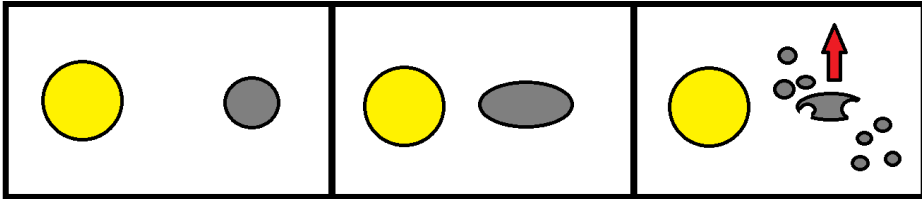


È la pseudoforza!

Si perviene all'espressione della terza legge di Keplero generalizzata utilizzando l'una o l'altra forza.

Limite di Roche

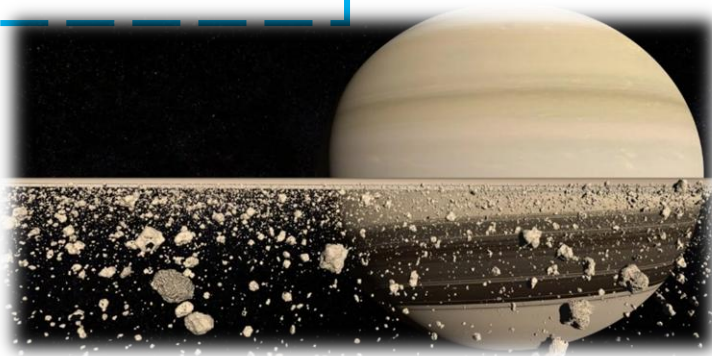
Il limite di Roche è la distanza minima dal centro di un corpo celeste al di sotto della quale un secondo corpo celeste minore che vi orbita intorno si frammenta a causa delle forze di marea.

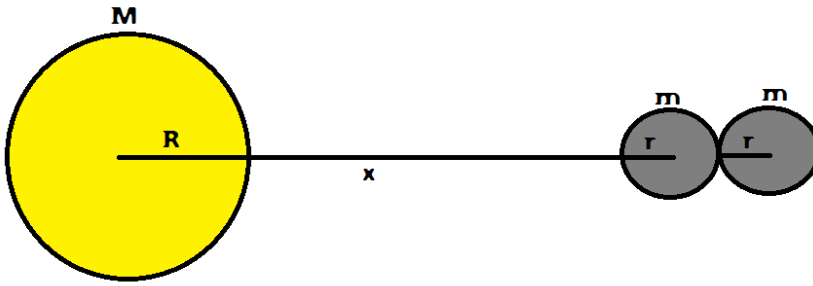


85

Quando un pianeta nelle fasi appena successive alla sua formazione è avvolto da un disco di frammenti, la materia oltre il limite di Roche può aggregarsi formando uno o più satelliti, mentre all'interno di tale limite le forze di marea impediscono la formazione di satelliti sufficientemente grossi. Questo si è verificato nel Sistema solare nei 4 pianeti che presentano gli anelli (Giove, Saturno, Urano e Nettuno). Per ciascuno di essi, gli anelli si trovano internamente al valore del limite di Roche calcolato per ogni pianeta.

Per quanto riguarda Saturno, fu Edouard Albert Roche, studiando i suoi anelli, a verificare che il limite di Roche si posizionava appena al di fuori dell'anello più esterno. Come ulteriore conferma, le sonde Voyager mostrarono che gli anelli non sono corpi compatti, ma composti da cristalli di ghiaccio.





Immaginiamo una cometa costituita da due sfere di raggio r e massa m . Basta pensare a due palle di neve sporche, ognuna di raggio r , tenute insieme dalla forza di gravitazione universale che ognuna esercita sull'altra. Questa forza è data dalla relazione di Newton:

$$F_{att} = \frac{Gmm}{d^2} = \frac{Gm^2}{(2r)^2} = \frac{Gm^2}{4r^2}$$

Consideriamo adesso che la cometa si trovi ad una distanza x da un pianeta di massa M e raggio r . La forza di attrazione gravitazionale F , tra il pianeta e la palla di neve più vicina, sarà più grande della forza F' che il pianeta esercita sulla palla più lontana. Quindi:

$$F = \frac{GMm}{x^2}$$

$$F' = \frac{GMm}{(x + 2r)^2}$$

Le due palle risentiranno di una forza risultante (F_{mar}) che tende a separarle. Questa forza equivale alla differenza $F' - F$. Si ha dunque:

$$F_{mar} = F - F'$$

$$F_{mar} = \frac{GMm}{x^2} - \frac{GMm}{(x + 2r)^2}$$

Poiché $\gg r$:

$$F_{mar} = -\frac{4GMmr}{x^3}$$

Le due masse si separeranno se la forza F_{mar} è superiore alla forza F_{att} :

$$F_{mar} > F_{att}$$

$$-\frac{4GMmr}{x^3} > \frac{Gm^2}{4r^2}$$

Cambiamo di segno:

$$\frac{4Mr}{x^3} < \frac{m}{4r^2}$$

$$\frac{M}{x^3} < \frac{m}{16r^3}$$

Ponendoci al “limite”:

$$\frac{M}{x^3} = \frac{m}{16r^3}$$

$$x^3 = \frac{16r^3 M}{m}$$

$$x = \sqrt[3]{16r^3 \frac{M}{m}}$$

Estraendo dalla radice⁷:

$$x = 2.44 r \sqrt[3]{\frac{M}{m}}$$

Questa è la formula nota come **Limite di Roche**.

⁷ Non vi preoccupate: 2.44 non è la radice cubica di 16! Il calcolo del limite di Roche è compresso e il suo risultato non può essere rappresentato in una formula algebrica esatta. Lo stesso Roche ha derivato la sua soluzione in modo approssimato, inserendo il coefficiente 2.44 perché teneva meglio conto dell’oblazione del primario e della massa del satellite.

Ricordiamo che:

r = raggio del corpo minore (nel nostro caso, la cometa)

M = massa del pianeta

m = massa del corpo minore

88

Ora, esprimendo le masse in funzione del volume e della densità:

$$M = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$$

$$m = V_c\rho_c = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_c$$

La formula diventa:

$$x = 2.44 r \sqrt[3]{\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{\frac{4}{3}\pi r^3\rho_c}}$$

$$x = 2.44 r \sqrt[3]{\frac{R^3\rho}{r^3\rho_c}}$$

$$x = 2.44 r \frac{R}{r} \sqrt[3]{\frac{\rho}{\rho_c}}$$

$$x = 2.44 R \sqrt[3]{\frac{\rho}{\rho_c}}$$

Dove:

R = raggio del pianeta

ρ = densità del pianeta

ρ_c = densità del corpo minore (nel nostro caso, della cometa)

ATTENZIONE!!



La formula si applica solo su corpi “incoerenti”, cioè non compattati. Infatti nella formula consideriamo solo la forza mareale e gravitazionale, non considerando le forze di coesione della materia...

Sfera di Hill

La *sfera di Hill* (il cui raggio è detto *raggio di Hill*) indica le dimensioni della sfera di influenza gravitazionale di un corpo celeste rispetto alle perturbazioni di un altro corpo, di massa maggiore, attorno al quale esso orbita. È stata definita dall'astronomo americano George William Hill (1838- 1914), sulla base del lavoro dell'astronomo francese Édouard Roche (1820-1883). Per questa ragione è anche conosciuta come la *Sfera di Roche*. Considerando un corpo centrale attorno al quale orbita un secondo corpo, la sfera di Hill è determinata dalle seguenti forze:

- *Gravità* dovuta al *corpo centrale*;
- *Gravità* dovuta al *corpo secondario*;
- *Forza centrifuga* misurata in un sistema di riferimento avente origine sul corpo centrale e ruotante con la stessa velocità angolare del secondo corpo.

La sfera di Hill è la più grande sfera, centrata sul secondo corpo, al cui interno la somma delle tre forze è sempre orientata verso il secondo corpo. Un terzo corpo più piccolo può orbitare intorno al secondo all'interno della sfera di Hill, con questa forza risultante come forza centripeta.

La sfera di Hill si estende fra i punti di Lagrange L1 e L2⁸, che si trovano sulla linea che congiunge i centri dei due corpi. La regione di influenza del secondo corpo è più piccola lungo quella direzione e funge da fattore di limitazione per la dimensione della sfera di Hill. Oltre quella distanza, un terzo oggetto in orbita intorno al secondo spenderebbe almeno parte della relativa orbita oltre la sfera di Hill e verrebbe progressivamente perturbato

⁸ Nel problema dei tre corpi, i punti di Lagrange, tecnicamente chiamati punti di oscillazione, sono quei punti dello spazio in cui due corpi dotati di grande massa, tramite l'interazione della rispettiva forza gravitazionale, consentono ad un terzo corpo dotato di massa molto inferiore di mantenere una posizione stabile relativamente ad essi. In un sistema planetario comporta che un piccolo oggetto (satellite o asteroide), il quale condivide la stessa orbita di un pianeta e posizionato in un punto di Lagrange, manterrà costanti le distanze fra i corpi celesti maggiori (stella e pianeta). Perché ciò accada, la risultante delle accelerazioni gravitazionali impresse dai corpi celesti all'oggetto deve essere esattamente l'accelerazione centripeta necessaria a mantenere in orbita l'oggetto a quella particolare distanza (dal corpo celeste più grande), con la stessa velocità angolare del pianeta più piccolo. Questi punti sono detti di Lagrange in onore del matematico Joseph-Louis de Lagrange che nel 1772 ne calcolò la posizione.

dalle forze di marea del corpo centrale, finendo per orbitare attorno a quest'ultimo.

ATTENZIONE:

Non confondere la Sfera di Roche (per semplicità e per non creare confusione ci riferiremo a essa con il nome di Sfera di Hill) con il Limite di Roche descritto in questo Bignamino!

Formule

Se un corpo minore di massa m , orbita attorno ad uno maggiore di massa M con un semiasse maggiore a e una eccentricità di e , allora il raggio r della sfera di Hill del corpo minore è:

$$r \approx a(1 - e) * \sqrt[3]{\frac{m}{3M}}$$

Se l'eccentricità è trascurabile:

$$r \approx a * \sqrt[3]{\frac{m}{3M}}$$

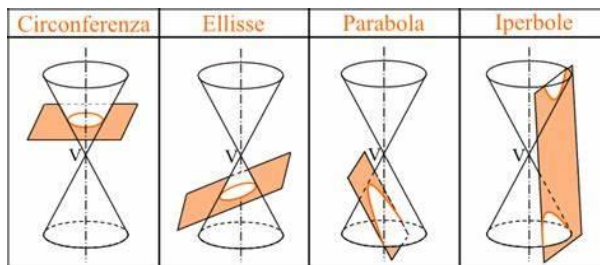
Piccola esercitazione: *Quale periodo massimo può avere un ipotetico satellite stabile della Terra? [Suggerimento: il raggio della Sfera di Hill è il raggio orbitale massimo che può avere un satellite stabile, quindi...]*

È doveroso sottolineare come la sfera di Hill rappresenti solamente un'approssimazione della effettiva regione di stabilità orbitale e altre forze (per es. la pressione di radiazione) possono perturbare l'orbita dell'oggetto. Inoltre il terzo oggetto deve avere una massa trascurabile rispetto agli altri due, in maniera da non influenzare il sistema con la propria gravità.

Considerazioni sulle orbite (coniche)

La Legge della Gravitazione Universale ci insegna che la forza d'attrazione gravitazionale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza delle due masse che si attraggono, ovvero $F \propto \frac{1}{d^2}$; a causa di questa caratteristica dell'interazione gravitazionale si può dimostrare che le orbite descritte dai corpi celesti attorno a un oggetto "attrattore" seguono particolari curve, le **coniche**. Le coniche sono curve che si ottengono dall'intersezione di *un piano* con un *cono a due falde*. Si ottengono così *circonferenza, ellisse, iperbole e parabola*.

93



Circonferenza: il piano è perpendicolare all'asse (tratteggiato);

Ellisse: il piano è obliquo;

Parabola: il piano è parallelo a una delle generatrici (le due rette incidenti in V in figura);

Iperbole: il piano è parallelo all'asse del cono.

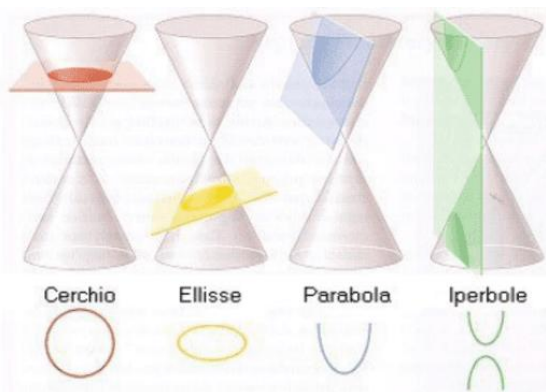
Ciò che distingue l'una dall'altra queste curve è un parametro, l'*eccentricità*:

CIRCONFERENZA: $e = 0$

ELLISSE: $0 < e < 1$ (più questo valore si avvicina ad 1 più l'ellisse è schiacciata)

PARABOLA: $e = 1$

IPERBOLE: $e > 1$ (quanto più maggiore di uno è questo valore tanto più l'iperbole è "aperta")



Velocità orbitale

Affinché il corpo rimanga in orbita è necessario che in ogni punto dell'orbita la forza centripeta sia uguale alla forza di attrazione gravitazionale:

$$\begin{aligned}
 F_C &= F_G \\
 m \frac{v^2}{R} &= \frac{GmM}{R^2} \\
 \frac{v^2}{R} &= \frac{GM}{R^2} \\
 v^2 &= \frac{GM}{R} \\
 v &= \sqrt{\frac{GM}{R}}
 \end{aligned}$$

A questa velocità si dà il nome di **prima velocità cosmica**, valida per orbite circolari.

E SE L'ORBITA NON È CIRCOLARE?

Il problema si risolve con l'applicazione del principio di conservazione dell'energia meccanica che altro non è che la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

E poiché le velocità orbitali variano al variare della distanza alla prima equazione è necessario associare la seconda legge di Keplero.

Per cui il problema è risolto dalla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \\ v_a d_a = v_p d_p \end{cases}$$

Nel caso della forza gravitazionale, l'**energia potenziale** è $U = -\frac{mMG}{R}$

L'**energia cinetica** è $K = \frac{1}{2}mv^2$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} v_a d_a = v_p d_p \\ \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GmM}{d_a} = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GmM}{d_p} \end{cases}$$

95

Le soluzioni sono:

$$v_a = \sqrt{2GM \frac{d_p}{d_a(d_p + d_a)}}$$

$$v_p = \sqrt{2GM \frac{d_a}{d_p(d_p + d_a)}}$$

Ricordando che: $d_a = a(1 + e)$; $d_p = a(1 - e)$; $a = \frac{d_a + d_p}{2}$; $e = \frac{d_a - d_p}{d_a + d_p}$

Le due velocità possono anche essere espresse in funzione del semiasse maggiore e dell'eccentricità dell'orbita.

Quindi :

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)}$$

$$v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)}$$

Considerazioni sulle orbite (dinamica)

All'inizio di questi appunti abbiamo evidenziato come gli oggetti orbitanti seguano delle traiettorie che sono curve coniche e abbiamo individuato quest'ultime, catalogandole anche a seconda dell'eccentricità; in seguito abbiamo enunciato il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$K + U = \text{costante}$$

Possiamo procedere nella classificazione delle orbite a seconda del valore assunto da questa costante (l'energia meccanica). In particolare:

- Se questa costante è **negativa**, allora l'oggetto segue un'orbita chiusa (**circonferenza, ellisse**);
- Se essa è **nulla**, allora il corpo si muove su un'orbita **parabolica** (a distanza infinita la sua velocità è nulla);
- Se essa è **positiva**, allora la traiettoria è **iperbolica** (e il corpo giunge a distanza infinita con velocità – chiamata “velocità d'eccesso iperbolico” – non nulla).

Velocità di fuga

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

A questa velocità si dà il nome di *seconda velocità cosmica* o *velocità di fuga*.

Raggio di Schwarzschild

Immaginiamo ora di poter comprimere un corpo celeste di massa M (quindi via via il raggio R diminuisce): la velocità di fuga di un altro corpo dalla sua superficie aumenterà al diminuire del raggio. Quando il raggio raggiungerà un valore “critico”, la velocità di fuga eguaglierà quella della luce, e neanche la luce potrà allontanarsi indefinitamente dal corpo: esso è diventato un *buco nero*.

Al raggio “critico” associato a ogni massa M si dà il nome di Raggio di Schwarzschild, in onore del matematico, astronomo e astrofisico tedesco Karl Schwarzschild (1873-1916); il raggio si ricava così:

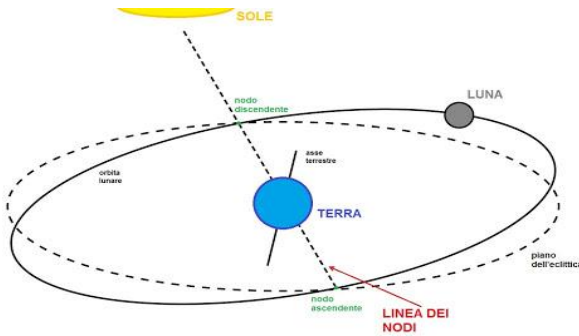
$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R_s}} \quad \rightarrow \quad c^2 = \frac{2GM}{R_s} \quad \rightarrow \quad R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Dove c è la velocità della luce ($c = 299792458$ m/s).

Eclissi

Eclissi di Luna

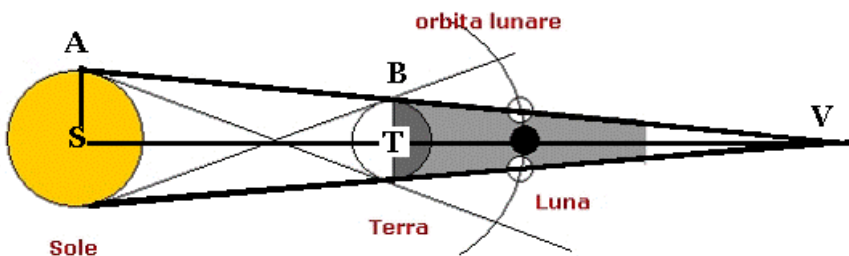
Una **eclisse di Luna** si verifica quando la Terra si interpone tra il nostro satellite ed il Sole, cioè quando la Luna entra nel cono d'ombra della Terra che è rivolto dalla parte opposta al Sole e pertanto l'eclisse può avvenire solo quando la Luna è in opposizione, cioè quando è piena. Poiché la Luna si sposta



da ovest verso est essa entra nel cono d'ombra della Terra oscurandosi dalla parte lunare sinistra. Se l'orbita della Luna attorno alla Terra giacesse sullo stesso piano dell'orbita della

Terra attorno al Sole ad ogni plenilunio avremmo una eclisse totale di Luna. Queste due orbite sono inclinate di $5^{\circ} 9'$ e si incontrano i due punti che definiscono i **nodi**. Perché si abbia una eclisse, Sole e Luna non solo devono essere all'opposizione ma devono essere vicinissimi ai nodi. In media la distanza angolare del Sole dal nodo deve essere minore di $9^{\circ}.9$ per un'eclisse **parziale** e non più di $4^{\circ}.6$ per un'eclisse **totale**.

CALCOLO della LUNGHEZZA del CONO D'OMBRA DELLA TERRA



I triangoli VAS e VBT sono simili (vedi figura)

$$VS : VT = AS : BT$$

Ma:

$$VS = VT + TS$$

Sostituendo si trova che:

$$VT = \frac{TS \cdot BT}{AS - BT}$$

100

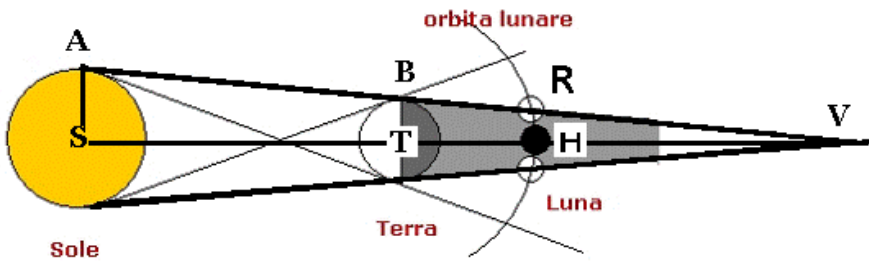
Siccome sappiamo che il raggio del Sole è circa 109.25 raggi terrestri abbiamo:

$$VT = \frac{ST \cdot BT}{109.25BT - BT}$$

$$VT = \frac{ST}{109.25 - 1}$$

La lunghezza del cono d'ombra si può calcolare dividendo la distanza media Terra-Sole per 109.25

Si può calcolare anche il semidiametro apparente visto dalla Terra dell'ombra che la Terra proietta sul piano dove si trova la Luna.



Poiché il raggio angolare della Luna è di $15'.5$, perché una eclisse di Luna possa avere luogo è necessario che la distanza tra i centri dell'ombra terrestre e della Luna sia inferiore a:

$$41' + 15'.5 = 56'.5$$

Con questo dato si può calcolare quanto è spostato il centro dell'orbita terrestre dal nodo lunare.

Dalla proporzione:

$$BT:RH = VT:HV$$

$$RH = \frac{VH \cdot BT}{VT}$$

Dato che:

$$VH = VT - TH$$

$$\begin{aligned} RH &= \frac{BT (VT - TH)}{VT} = \\ &= \frac{BT}{VT} \left(1 - \frac{TH}{VT}\right) = \end{aligned}$$

Dalla formula precedente:

$$VT = \frac{ST}{108.25}$$

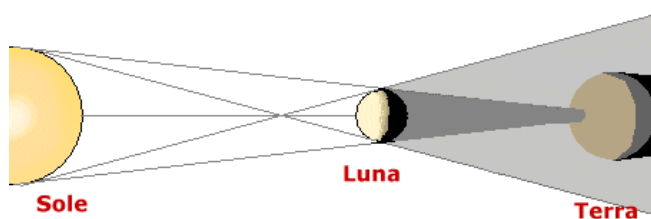
Sostituendo:

$$\begin{aligned} RH &= \frac{BT \cdot 108.25}{ST} (1 - TH) = \\ &= \frac{R_{TERRA}}{D_{TS}} 108.25 (1 - D_{TL}) \end{aligned}$$

Si trova che questo valore è di $10^{\circ}.6$. Quindi un'eclisse lunare si può verificare (anche di breve durata) solo nel caso in cui l'orbita terrestre è spostata meno di $10^{\circ}.6$ dal nodo lunare (ad est o ad ovest). La Terra si muove lungo l'eclittica di circa $59'$ al giorno. Per percorrere questa distanza impiega 10.8 giorni e la distanza doppia in 21.6 giorni, poiché una rivoluzione sinodica si compie in 29.5 giorni. Una Luna piena può verificarsi ad una distanza superiore ai $10^{\circ}.6$ ad ovest e la successiva Luna piena ad una distanza superiore ad est e quindi nel corso di questa rivoluzione non si verificheranno eclissi. Si può verificare che in un anno non ci siano eclissi, mentre al massimo in un anno se ne potrebbero verificare tre: la prima cadrebbe poco dopo il primo gennaio, la seconda sei mesi dopo (in prossimità di giugno) e la terza a fine dicembre (dodici mesi sinodici dopo la prima, 354 giorni).

Eclissi di Sole

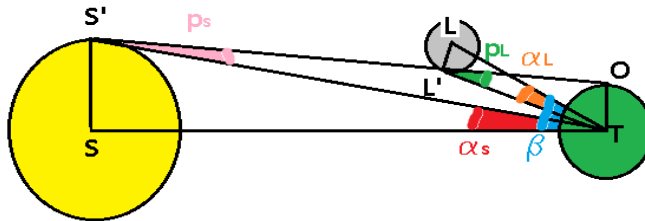
Un'eclissi di Sole si verifica quando la Luna, attorno alla sua congiunzione, si trova allineata tra la Terra e il Sole, molto **vicino ad uno dei nodi o esattamente in esso**. Benché di dimensioni estremamente diverse, i due corpi celesti si trovano a distanze tali da mostrare lo **stesso diametro apparente**, il



che consente alla Luna di coprire il disco del Sole. Perché ci sia una eclisse di Sole è necessario che al momento del **novilunio** il Sole sia distante dal

nodo inferiore al massimo $15^{\circ}.5$. Questo valore è più alto di quello calcolato per l'eclisse di Luna, e quindi si capisce perché le eclissi di Sole sono più frequenti. Il cono d'ombra massimo della Luna ha un valore che non supera i 270 km sulla superficie della Terra, mentre la lunghezza del cono d'ombra è circa 374.000 km per cui il vertice di questo cono non sempre raggiunge la Terra: in questo caso si hanno **eclissi anulari**. In località differenti della Terra, l'eclisse di Sole si verifica in tempi diversi. Il moto della Luna attorno alla Terra e la rotazione della Terra attorno al proprio asse fanno sì che l'ombra lunare si sposti da ovest verso est formando una striscia d'ombra lunga un migliaio di km e larga da 200 a 270 km. Poiché la Luna si sposta da ovest verso est l'eclisse inizia dal bordo ovest del Sole.

CONDIZIONE perché si possa verificare un'eclissi di Sole



103

Perché si verifichi un'eclisse di Sole è necessario che nel periodo della Luna nuova questa si trovi in prossimità di uno dei nodi della sua orbita, cioè in vicinanza dell'eclittica. Indichiamo con S, T, L, i centri del Sole, della Terra, della Luna, che giacciono tutti su di un piano perpendicolare al piano dell'eclittica. Il verificarsi dell'eclisse dipende dalla latitudine geocentrica della Luna (nella figura l'angolo LTS (vertice in T) = β)

Dalla figura:

$$\beta = LTL' + L'TS' + STS'$$

Dalla figura si evince che:

LTL' è il raggio angolare della Luna = α_L

STS' è il raggio angolare del Sole = α_S

$$\beta = \alpha_L + L'TS' + \alpha_S$$

$$\underline{L'TS' = ?}$$

Consideriamo l'angolo $TL'O$ esterno al triangolo $TL'S'$:

$$TL'O = L'TS' + TS'L'$$

$$TL'O = L'TS' + TS'O$$

$$L'TS' = TL'O - TS'O$$

$$TL'O = p_L = 57' 2'' \text{ (parallasse orizzontale della Luna)}$$

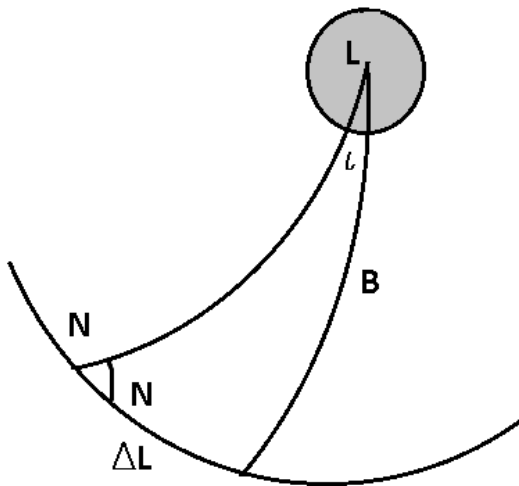
$$TS'O = p_S = 8''.8 \text{ (parallasse orizzontale del Sole)}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha_L + \alpha_S + p_L - p_S \\ \beta &= 15'.5 + 16'.3 + 57'.2 - 8''.8 \\ \beta &= 88'.46\end{aligned}$$

Perché si verifichi una eclisse anche di breve durata è necessario che la latitudine geocentrica della Luna sia **inferiore a 88'.46**.

104

La **parallasse orizzontale equatoriale della Luna** è l'angolo sotto il quale, dal centro della Luna, è visibile il raggio equatoriale della Terra. La **parallasse orizzontale equatoriale del Sole** è l'angolo sotto il quale, dal centro del Sole, è visibile il raggio equatoriale della Terra.

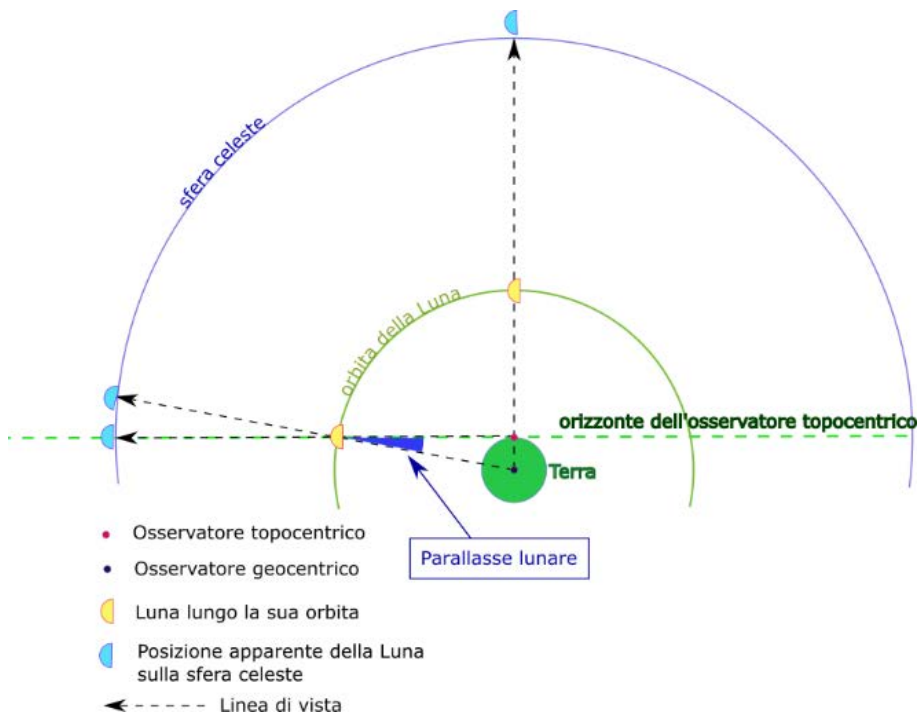


La distanza angolare del centro della Luna rispetto al nodo (longitudine) si può calcolare con la:

$$\sin \Delta \lambda = \frac{\tan \beta}{\tan i}$$

$$\Delta \lambda = 16^\circ.5$$

Il Sole, muovendosi alla velocità di 59' al giorno, percorre 33° di eclittica in 34 giorni. Essendo il periodo sinodico di 29.5 giorni, è evidente che nel corso di questo periodo si ha una Luna nuova (o anche due). Questo assicura che nel corso di un anno si verifichino, almeno, due eclissi di Sole in vicinanza dei nodi. Se la prima si verifica ai primi di gennaio, la seconda si ha alla Luna nuova successiva, così una eventuale terza e quarta eclisse si verificherebbero poco meno di sei mesi dopo e la quinta 354 giorni dopo la prima.



Ciclo di Saros

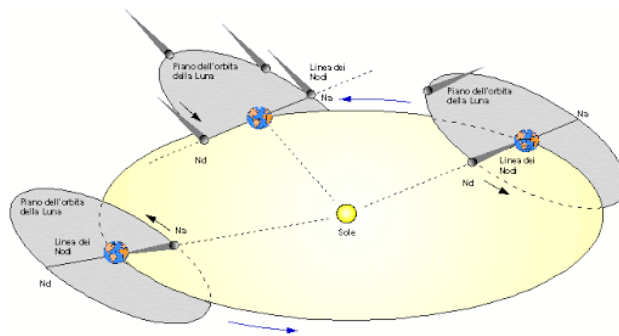
In base a quanto fin qui detto, il numero massimo di eclissi che si possono verificare in un anno è **7**:

- 2 Luna + 5 Sole
- 3 Luna + 4 Sole

e viceversa. Questa combinazione è piuttosto rara, l'evento più frequente è 2 Luna + 2 Sole. Il numero minimo è costituito da due eclissi (entrambe di Sole).

Fin dall'antichità era noto che le eclissi si succedevano pressoché nello stesso ordine in un periodo di circa 18 anni e 11.3 giorni. La spiegazione è alquanto semplice.

Le fasi lunari si succedono ogni 29.53 giorni (mese sinodico) mentre il ritorno



allo stesso nodo della Luna avviene ogni 27.21 giorni. I nodi hanno un moto di retrogradazione: in un giorno percorrono un angolo pari a **3'10''.64** e completano il giro in **18 anni e 11.3 giorni**.

Il Sole si sposta di moto diretto in media di 59'8''.33 al giorno rispetto al nodo. Il moto del Sole è dunque di 62'19'' e quindi l'intervallo di tempo fra due passaggi consecutivi del centro del Sole per lo stesso nodo è di 346.62 giorni (anno draconico). Il **Saros** è l'intervallo di tempo perché questi tre periodi tornino nella stessa successione. La natura si diverte!!!!

Succede che:

- 223 lunazioni (223 mesi sinodici) corrispondono a giorni 6585.19 (223 * 29.53)
- 242 mesi draconici corrispondono a giorni 6585.02
- Quest'intervallo di tempo corrisponde a 18 anni e circa 11 giorni

Se dividiamo questi 6585.19 giorni per l'anno draconico otteniamo un valore di circa 19.

Dunque, come mostrato, questi tre periodi ritornano nella stessa successione dopo circa 6585 giorni, cioè un ciclo di Saros. Le condizioni in cui si producono le eclissi non saranno mai le stesse poiché, essendo 223 mesi sinodici più corti di 0.04 mesi draconici, dopo 18 anni la Luna non si troverà esattamente allo stesso posto rispetto al nodo. Il ciclo di Saros contiene 6585 giorni interi più circa $\frac{1}{3}$ di giorno: questo comporta che le zone di visibilità delle eclissi sulla superficie terrestre in 18 anni si spostano di circa 120° verso Ovest.

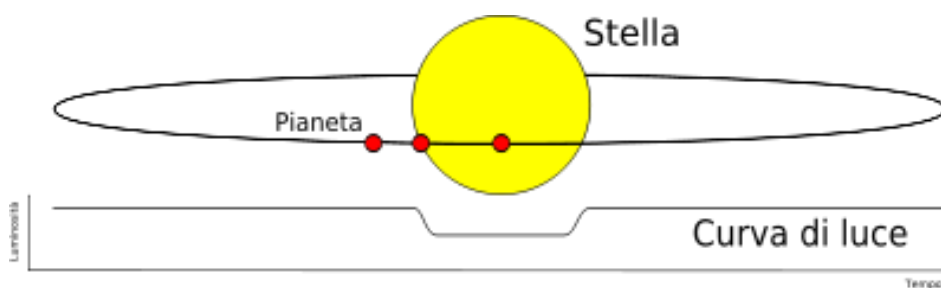
Esopianeti

Un **planeta extrasolare** o esopianeta è un pianeta non appartenente al sistema solare, orbitante cioè attorno a una stella diversa dal Sole. La scoperta degli esopianeti è resa possibile da metodi di **osservazione indiretta** e da osservazioni al **telescopio**. I pianeti, in confronto alle stelle, emettono molta meno luce nell'universo: per tale motivo, l'individuazione diretta dei pianeti extrasolari risulta estremamente difficile (in condizioni normali di visibilità, i pianeti hanno solitamente una luminosità pari a circa un milione di volte meno di quella di una stella). In aggiunta a questa intrinseca difficoltà di rilevazione, la maggiore luminosità delle stelle, attorno alle quali orbitano i pianeti, causa un bagliore che tende a coprire la luce debolmente riflessa dai corpi celesti del rispettivo sistema. Al 2008, sono stati determinati 6 metodi di osservazione indiretta dei pianeti extrasolari:

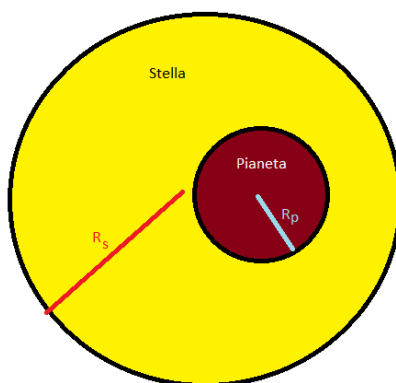
- **Astrometria:** consiste nella misurazione precisa della posizione di una stella nel cielo e nell'osservare in che modo questa posizione cambia nell'arco del tempo. Se la stella ha un pianeta, allora l'influenza gravitazionale del pianeta stesso causerà alla stella un leggero movimento circolare o un'orbita ellittica attorno a un comune centro di massa. Questo movimento è rivelato attraverso misure di effetto Doppler.
- **Velocità radiali:** questo metodo è conosciuto anche col nome di **metodo Doppler**. Le variazioni nelle velocità con cui la stella si allontana dalla Terra possono far dedurre la presenza di un pianeta, a causa di "sbilanciamenti" delle linee spettrali della stella.
- **Variazioni degli intervalli di emissioni di una Pulsar:** una pulsar (il residuo densissimo di una stella che è esplosa in supernova), ruotando, emette onde radio a intervalli estremamente regolari. Leggere anomalie negli intervalli delle emissioni possono essere usate per tracciare cambiamenti nel moto della pulsar, causati dalla presenza di pianeti
- **Metodo del transito:** se un pianeta transita di fronte alla propria stella, allora è osservabile una diminuzione della luminosità della stella eclissata. L'ammontare della variazione dipende dalla dimensione del pianeta e della stella stessa. I pianeti extrasolari si distinguono dalle stelle variabili a eclisse dal fatto che nella curva di luce dei primi c'è un'unica variazione, nelle seconde ve ne sono due.

- **Variazione del tempo di transito:** in sistemi dove è già stato scoperto un pianeta in transito, è possibile trovarne altri osservando eventuali variazioni del periodo orbitale del pianeta già noto a causa dell'attrazione gravitazionale di un altro pianeta non transitante.
- **Micro lente gravitazionale:** l'effetto della lente gravitazionale avviene quando i campi gravitazionali di due corpi celesti "cooperano" per focalizzare la luce di una stella lontana.

Metodo dei transiti



Nel momento in cui si verifica un transito si ha la seguente situazione:



Un vantaggio del metodo dei transiti è che le dimensioni del pianeta possono essere determinate dalla curva di luce della stella. Supponendo trascurabile la brillantezza superficiale del pianeta (molto minore di quella della stella), è possibile mettere in relazione il rapporto dei flussi con quello delle aree irradianti:

$$\frac{F_t}{F_s} = \frac{A_s - A_p}{A_s}$$

Supponendo i corpi perfettamente sferici:

$$\frac{F_t}{F_s} = 1 - \frac{\pi R_p^2}{\pi R_s^2}$$

Semplificando:

$$1 - \frac{F_t}{F_s} = \left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2$$

$$\frac{F_s - F_t}{F_s} = \left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2$$

$$\frac{\Delta F}{F_s} = \left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2$$

Analizzando le curve di luce (come quella riportata a fianco) è possibile notare che il “calo” di luminosità dipende soltanto dalla variazione di flusso che ci arriva sulla Terra (viene solitamente chiamata “profondità del transito”). Perciò, la “variazione di magnitudine” (se si scrive sotto forma di rapporto con una magnitudine di riferimento) segue lo stesso andamento che, come visto, dipende dai raggi dei due corpi.

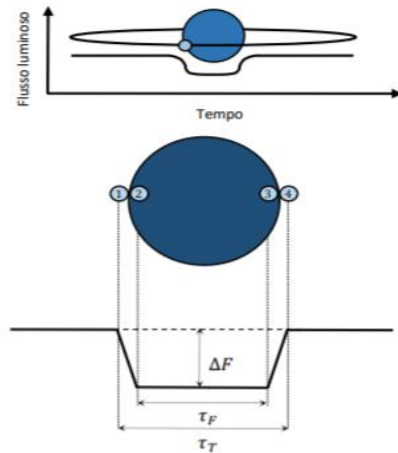


Figura 10: rappresentazione schematica di un transito planetario primario e della risultante curva di luce. Sono indicati la profondità del transito, la durata totale del transito ed il tempo di eclisse totale, oltre ai contatti.

Perciò:

$$\Delta m \propto \frac{\Delta F}{F} \propto \left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2$$

Da questa formula è dunque possibile ottenere una buona stima del raggio del pianeta.

112

Infatti, sostituendo nella formula di Pogson:

$$m_t - m_s = -2.5 \log\left(\frac{F_t}{F_s}\right)$$

$$-\Delta m = -2.5 \log\left(1 - \frac{R_p^2}{R_s^2}\right)$$

Sapendo che $\log\left(1 - \frac{R_p^2}{R_s^2}\right) = \frac{\ln\left(1 - \frac{R_p^2}{R_s^2}\right)}{\ln(10)}$ (cambiamento di base), allora:

$$-\Delta m = -2.5 \frac{\ln\left(1 - \frac{R_p^2}{R_s^2}\right)}{\ln(10)}$$

$\ln(10) = \sim 2.30$, perciò:

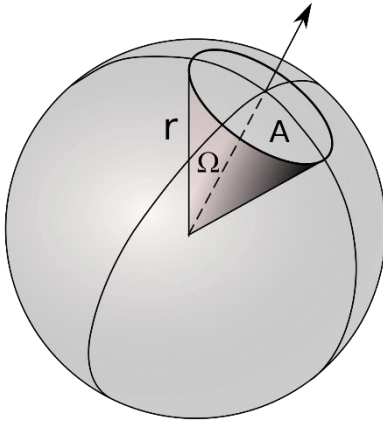
$$-\Delta m = -2.5 \frac{\ln\left(1 - \frac{R_p^2}{R_s^2}\right)}{2.30}$$

Assumendo adesso un raggio del pianeta molto più piccolo di quello della stella e “semplificando” tra loro il 2.5 con il 2.3 (ricordiamoci che si tratta di un’approssimazione!!), otteniamo:

$$\Delta m = \frac{R_p^2}{R_s^2}$$

STRUMENTI OTTICI

Angolo solido



Si definisce angolo solido la porzione di sfera intercettata dalle semirette che lo individuano. Esso si misura con la seguente relazione (vd. figura a lato per la notazione):

$$\Omega = \frac{A}{R^2}$$

L'angolo solido complessivo comprendente tutta la superficie sferica, sulla base della formula precedente, è uguale a:

$$\Omega_s = \frac{A_s}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$

L'angolo solido totale di una sfera è pertanto pari a 4π . L'unità di misura è sr (steradiane) ed è un **numero puro**.

Per avere la misura in gradi quadrati si deve

$$\text{moltiplicare: } 4\pi \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)^2 \quad \text{o dividere: } \frac{4\pi}{\pi^{\square 2}}$$

$$4\pi \text{ sr} = 41253 \text{ gradi quadrati} \rightarrow 1 \text{ grado quadrato} = 3.046 \cdot 10^{-4} \text{ sr}$$

Campo dello strumento

Il campo di uno strumento è definito dall'angolo solido sotto il quale l'oculare viene visto dal centro dell'obiettivo. Il campo corretto dalle aberrazioni ottiche di norma è $\frac{1}{2}^\circ$

Apertura assoluta

L'apertura assoluta dipende dal diametro D dello strumento. La quantità di luce raccolta è proporzionale all'area dell'obiettivo $\cong D^2$

Apertura relativa

Si definisce apertura relativa il rapporto:

$$\frac{D}{f} = \frac{\text{apertura assoluta (diametro)}}{\text{focale dell'obiettivo}}$$

Rapporto focale

L'inverso dell'apertura relativa $\frac{f}{D}$ definisce il rapporto focale.

L'energia raccolta dall'obiettivo è distribuita sull'area dell'immagine la cui grandezza sul piano focale è data da:

$$d = f \cdot \tan \alpha$$

Con α =diametro angolare dell'oggetto:

$$d = f \alpha \text{ se } \alpha \text{ è espresso in radianti.}$$

Potere risolutivo

Il potere risolutivo è la minima distanza angolare tra due sorgenti di luce che possono essere viste separate ("risolte", in termine tecnico) secondo un criterio detto di Rayleigh. Due sorgenti puntiformi (di uguale luminosità) risultano risolte quando la loro distanza angolare θ è uguale a:

$$\theta(rad) = \frac{1.22 \cdot \lambda}{D} = \frac{1.22 * \text{lunghezza d'onda}}{\text{diametro}}$$

Si ottiene un risultato in radianti. Se vogliamo ottenere θ in secondi d'arco, invece:

$$\theta(") = \frac{2.5 \cdot 10^5 \cdot \lambda}{D}$$

Con λ =lunghezza d'onda della luce. Per l'occhio umano, si può assumere λ pari a 5500Å (regione di massima sensibilità dell'occhio)⁹. Il potere risolutivo dell'occhio, assumendo la pupilla con un diametro di 3 mm, è uguale a:

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D} = 1.22 \cdot \frac{5500 \cdot 10^{-9}m}{3 \cdot 10^{-3}m} = 2.24 \cdot 10^{-4}rad = 46"$$

Il fattore di conversione da radianti a secondi è il **NUMERO MAGICO**:

$$1 rad = 206265''$$

Nella determinazione del potere risolutivo interviene l'apertura dello strumento e non l'ingrandimento.

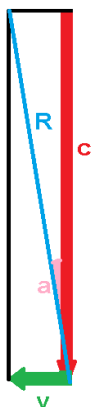
Ingrandimento

L'ingrandimento dello strumento è dato dal rapporto tra la focale dell'obiettivo f e la focale dell'oculare f' :

$$g = \frac{f}{f'}$$

⁹ Questo potere risolutivo è quello teorico della lente o specchio obiettivo: tuttavia, nella pratica, la risoluzione è peggiorata dalle turbolenze atmosferiche e dipende dal seeing.

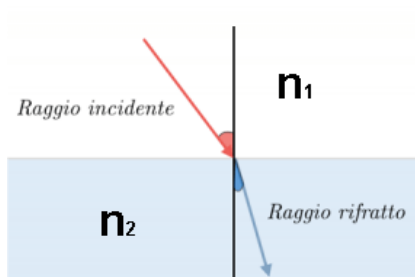
Aberrazione della luce



Quando i raggi di una stella arrivano sulla Terra, la loro direzione di provenienza appare leggermente deviata a causa della velocità orbitale del pianeta v . I vettori delle velocità (della luce e del pianeta) si combinano per dare un vettore risultante di poco inclinato dalla direzione di provenienza dei raggi.

$$a = \arctan \frac{v}{c}$$

Rifrazione



Il fenomeno della rifrazione ha origine dal cambiamento di velocità delle onde luminose quando passano da un mezzo trasparente all'altro. Esiste una proporzione tra le due diverse velocità e i seni degli angoli $\theta_{\text{incidenza}}$ e $\theta_{\text{rifrazione}}$ che i raggi formano con la linea normale alla superficie nel punto

colpito dal raggio. Se consideriamo gli indici di rifrazione n_1 e n_2 dei materiali, la proporzione è inversa.

$$\frac{\sin \theta_{\text{incidenza}}}{\sin \theta_{\text{rifrazione}}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

Rifrazione atmosferica

All'entrata nell'atmosfera terrestre, i raggi luminosi provenienti da un corpo celeste che si trova a distanza zenitale z vengono rifratti (deviati verso il basso) di un angolo r . Quindi i corpi celesti si osservano in una posizione leggermente più alta del reale. In particolare, possiamo vedere oggetti che si trovano anche sotto l'orizzonte geometrico del luogo (es. Il sole al tramonto). Per distanze zenitali inferiori a 70° , il valore della rifrazione è direttamente proporzionale alla tangente della distanza zenitale stessa attraverso la seguente relazione:

Altezza	Rifrazione
0°	$35'$
5°	$10'$
10°	$5'$
20°	$2.5'$
45°	$1'$
60°	$0.5'$
90°	$0'$

117

$$r'' = 58.2'' \tan(z)$$

Oltre questo valore, fino all'orizzonte, la rifrazione aumenta fino a raggiungere il valore massimo di $35'$

Formula di Bennett e Saemundsson

Bennett ha sviluppato una formula empirica semplice per calcolare la rifrazione partendo dall'altezza apparente. Se h_a è l'altezza apparente in gradi, la rifrazione R in minuti d'arco è data da:

$$R = \cot g \left(h_a + \frac{7.31}{h_a + 4.4} \right)$$

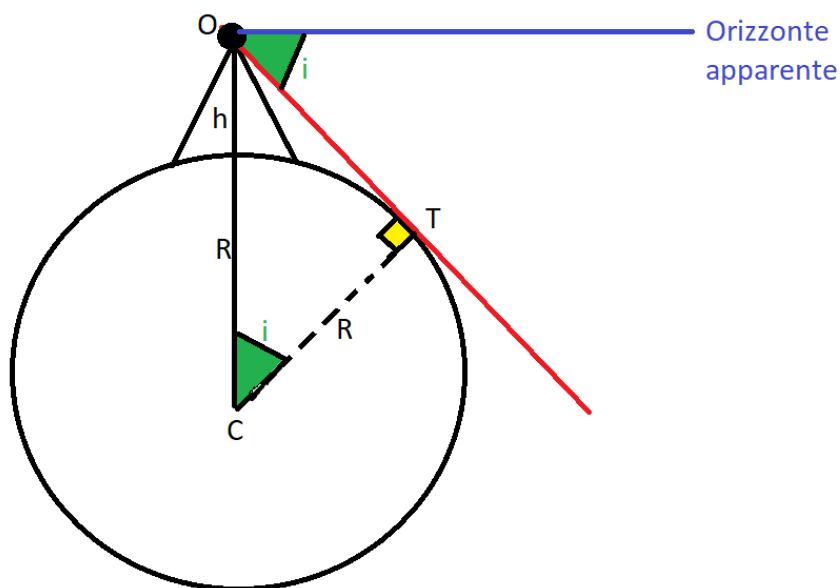
La formula ha una precisione di $0.07'$. Saemundsson ha sviluppato una formula per determinare la rifrazione partendo dall'altezza vera (mantenendo le stesse unità di misura della formula di Bennett):

$$R = 1.02 \cot g \left(h + \frac{10.3}{h + 5.11} \right)$$

La formula corrisponde a quella di Bennett a meno di $0.1'$.

Depressione dell'orizzonte

Oltre alla rifrazione, se l'osservatore è posto ad un'altezza h dalla superficie avrà un altro fattore che produrrà un'ulteriore “abbassamento dell'orizzonte”.



$$i = \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

La “depressione dell'orizzonte” è quindi un effetto dovuto sia all'atmosfera terrestre che alla quota alla quale si trova l'osservatore:

$$D = d + i$$

All'orizzonte, dove la rifrazione vale circa $35'$:

$$D = 35' + i$$

Riassumendo...

CENNI TEORICI SUI TELESCOPI

Il telescopio è uno strumento che raccoglie la luce o altre radiazioni elettromagnetiche provenienti da un oggetto lontano, la concentra in un punto (detto fuoco) e ne produce un'immagine ingrandita. Possiamo paragonare un telescopio a un “grande occhio” che sopperisce al fatto che la nostra pupilla, di dimensioni ridotte, riesce a raccogliere un quantitativo insufficiente di luce emessa da un oggetto lontano. Un telescopio è caratterizzato dalle seguenti componenti e grandezze:

- **OBIETTIVO:** è la parte del telescopio rivolta verso l'oggetto da osservare. Il suo diametro D prende il nome di **APERTURA**. Telescopi con una grande apertura sono capaci di raccogliere più luce e di fornire un'immagine a più alta risoluzione. L'obiettivo fa convergere i raggi luminosi in un punto, il *fuoco*, la cui distanza dall'obiettivo è chiamata **LUNGHEZZA FOCALE**;
- **OCULARE:** la parte del telescopio (nel caso di telescopi ottici) che raccoglie la luce proveniente dall'obiettivo e che la trasmette poi all'occhio. Anche per l'oculare è possibile definire una **LUNGHEZZA FOCALE**.

Ingrandimento

L'ingrandimento di un telescopio è dato dal rapporto fra la lunghezza focale dell'obiettivo e la lunghezza focale dell'oculare:

$$i = f_{ob}/f_{oc}$$

Rapporto focale

Rapporto esistente tra la lunghezza focale dell'obiettivo e l'apertura stessa del telescopio:

$$F = \frac{f_{ob}}{D}$$

Negli strumenti è specificato da una F seguita da un numero (es.: $F4$, $F4.5$, $F6...$).

Campo visivo

Esso è dato dal rapporto fra il campo visivo apparente dell'oculare (l'ampiezza angolare dell'immagine fornita dall'oculare soltanto) e il numero di ingrandimenti:

$$FoV = \frac{FoV_{oc}}{i}$$

Pupilla d'uscita

Essa è il diametro del fascio luminoso che esce dall'oculare:

$$p = \frac{D}{i}$$

Potere risolutivo

Esso è l'angolo minimo che deve separare due oggetti affinché lo strumento li possa distinguere: è dato dal criterio di Rayleigh:

$$\vartheta(rad) = \frac{1,22\lambda}{D}$$

$$\vartheta^\circ = \frac{69,9\lambda}{D}$$

λ lunghezza d'onda della luce osservata

Magnitudine limite

È la magnitudine visuale massima che può essere osservata con uno strumento di apertura D (in cm):

$$m_{lim} = 6,8 + 5\log D$$

Ingrandimento minimo utile

è l'ingrandimento che fornisce una pupilla d'uscita pari al diametro della pupilla umana (6-7 mm):

$$i_{min} = D(mm)/7$$

Formula di Dawes

Ci consente di trovare l'apertura minima di un telescopio atto a distinguere un oggetto che si vede sotto un angolo α :

$$D(mm) = \frac{120}{\alpha''}$$

121

Dimensioni dell'immagine sul piano focale

L'immagine che si forma sul piano focale di un telescopio con lunghezza focale dell'obiettivo f relativa a un oggetto di dimensione angolare α è:

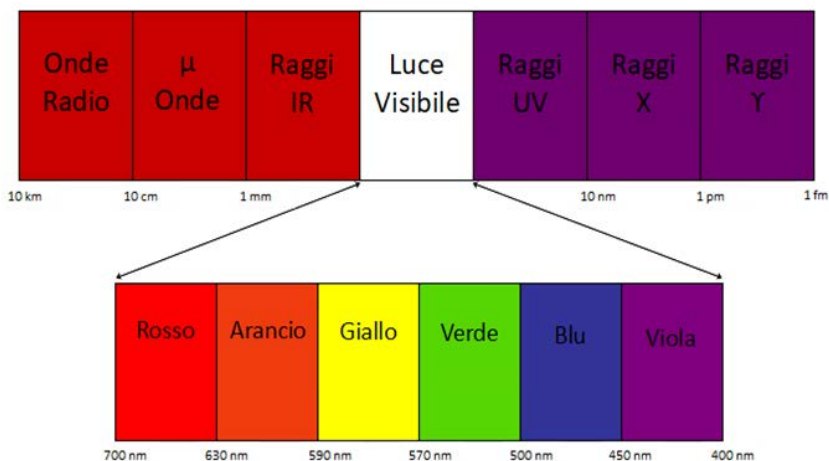
$$l = 2f \tan (\alpha/2)$$

ASTROFISICA

Tutte le informazioni che riceviamo dalle stelle ci provengono dalla “luce” che emettono¹. È solo attraverso l’analisi e la “decodificazione” dei messaggi contenuti in questa radiazione elettromagnetica che è la luce che noi possiamo ottenere informazioni sulle proprietà fisiche e chimiche delle stelle e delle galassie.

Radiazione elettromagnetica

Una radiazione elettromagnetica è, dal punto di vista dell’elettromagnetismo classico, un fenomeno ondulatorio dovuto alla contemporanea propagazione di perturbazioni periodiche di un campo elettrico e di un campo magnetico, oscillanti su piani tra di loro ortogonali. Le stelle emettono tipicamente radiazione di “corpo nero” e come tale irradiano energia in tutte le lunghezze d’onda secondo una distribuzione che viene chiamata spettro della radiazione elettromagnetica.



I parametri che permettono di distinguere tra loro le varie radiazioni elettromagnetiche sono:



In realtà, un altro “canale” di trasmissione delle informazioni per la comprensione dei fenomeni celesti si è aperto grazie ai risultati positivi ottenuti dagli interferometri per onde gravitazionali LIGO e VIRGO; in particolare, gli interferometri menzionati, il 17 agosto 2017, hanno rilevato un segnale di onda gravitazionale (rilevazione annunciata poi ufficialmente il 16 ottobre dello stesso anno), mentre altri telescopi in orbita e a terra sono riusciti a individuare per la prima volta la sua controparte elettromagnetica; l’evento che ha generato il segnale è stato la collisione di due stelle di neutroni (che ha portato a un’esplosione nota col termine di *kilonova*) nella galassia NGC 4993: esso ha segnato la nascita della cosiddetta “astronomia *multi-messaggero*”, per il fatto che è stato possibile confrontare due “linguaggi” diversi, permettendo così di ampliare le frontiere della conoscenza di questi fenomeni “estremi”.

123

Parametri di un’onda

Come tutti i fenomeni ondulatori la radiazione elettromagnetica è caratterizzata da questi parametri:



Lunghezza d'onda λ :

la distanza tra due creste o tra due ventri. Si misura in metri e/o con i suoi sottomultipli.

Periodo T :

l’intervallo di tempo, misurato in secondi, in cui avviene un’oscillazione completa, ovvero l’intervallo di tempo impiegato dall’onda per ritornare

nella medesima posizione (per esempio, il tempo intercorso tra due creste o tra due ventri successivi).

- ✚ **Frequenza ν** : è il numero di creste che si susseguono nello stesso punto nell'unità di tempo; è l'inverso del periodo:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Si misura in Hertz (Hz).

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ oscillazione al secondo}$$

- ✚ **Ampiezza A** : rappresenta la variazione massima dell'onda. L'ampiezza di un'onda periodica è l'altezza di una sua cresta rispetto alla posizione di riposo.

- ✚ **Intensità di un'onda**: è proporzionale al quadrato dell'ampiezza.

- ✚ **Potenza**: ogni onda porta con sé un'energia e quindi una potenza. Tale potenza decresce con il quadrato della distanza dalla sorgente.

La **lunghezza d'onda λ** e la **frequenza ν** di una radiazione elettromagnetica sono grandezze legate tra loro dalla relazione:

$$\lambda \cdot \nu = c$$

(c –la velocità della luce- nel vuoto ha un valore di 299 792 458 m/s.) Questa formula ci dice che le due grandezze sono **inversamente proporzionali**.

La radiazione elettromagnetica può essere interpretata come un insieme di “pacchetti” di energia a cui si dà il nome di fotoni: grazie a questi “pacchetti energetici” la luce può interagire con la materia a livello microscopico: per esempio può eccitare un elettrone in un atomo cedendo a esso la sua energia. Continuando il paragone, possiamo immaginare che più la radiazione è intensa, più i pacchetti sono numerosi; più la radiazione cresce di frequenza, più essi sono “capienti”. Quest'ultima caratteristica è descritta dalla **Legge di Planck**, che lega l'energia del fotone alla sua frequenza:

$$E = h \cdot \nu$$

(dove h è la costante di Planck)

$$E = h \frac{c}{\lambda}$$

Equivalenza massa-energia

Tra l'energia e la massa esiste una fondamentale relazione, scoperta dal fisico Albert Einstein, espressa dall'equazione

$$E = mc^2$$

dove c è la velocità della luce (pari a $3 \cdot 10^8$ m/s). L'equazione di Einstein implica che energia e massa sono equivalenti: la massa può essere trasformata in energia e l'energia può essere trasformata in massa. Ciò comporta il **principio di conservazione della massa-energia**: non vi è conservazione della massa o dell'energia considerate separatamente ma vi è conservazione dell'insieme delle due: a una diminuzione della massa pari a Δm deve corrispondere un aumento dell'energia pari a $\Delta m \cdot c^2$. Poiché il prodotto $m \cdot c^2$ è un numero molto grande, la trasformazione di una massa anche molto piccola di materia determina la produzione di una quantità enorme di energia, come avviene, per esempio, nelle *reazioni di fissione e di fusione nucleari* (queste ultime avvengono nel nucleo delle stelle: si veda, per una maggiore comprensione, il problema “*Carburante stellare*” della sezione *Miscellanea*).

Grandezze fotometriche



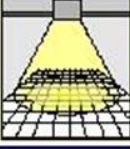

Grandezze fotometriche		Simbolo e unità di misura
<p><i>Flusso luminoso</i>: quantità di luce emessa da una sorgente luminosa nell'unità di tempo</p>		Φ lumen (lm)
<p><i>Intensità luminosa</i>: quantità di flusso luminoso emesso in una determinata direzione e nell'unità di angolo solido, misurato in steradiani (sr), che la contiene</p>		$I = \frac{\Phi}{\omega}$ candela (cd) $cd = lm / sr$
<p><i>Illuminamento</i>: quantità di flusso luminoso per unità di superficie</p>		$E = \frac{\Phi}{S}$ lux (lx) $lx = lm / m^2$
<p><i>Luminanza</i>: intensità luminosa emessa in una determinata direzione da una sorgente luminosa o, per riflessione, da una superficie illuminata riferita all'unità di superficie normale a tale direzione</p>		$L = \frac{I}{S}$ candela / m ² (cd / m^2)

Immagine dal web (fonte: VOLTIMUM)

Flusso luminoso

Quantità di energia luminosa emessa da una determinata sorgente nell'unità di tempo. Lo indichiamo con la lettera Φ . L'unità di misura nel SI è il lumen (lm); 1 watt = 683 lumen.

Illuminamento

Rapporto tra il flusso luminoso ricevuto da una superficie e l'area della superficie stessa ($E = \frac{\varphi}{S}$)

L'unità di misura nel SI è il lux (lx), ovvero il lumen al metro quadrato (lm/m^2).

Nota:

Dalla definizione di illuminamento si ricavano due importanti corollari di natura geometrica che risultano molto utili per comprendere la distribuzione della luce nello spazio:

- 1) Per una sorgente puntiforme la diminuzione del livello di illuminamento su di una superficie varia in relazione al quadrato della distanza dalla fonte: raddoppiando la distanza dalla fonte il livello di illuminamento sulla superficie diviene quindi $\frac{1}{4}$;
- 2) Il livello d'illuminamento su di una superficie è massimo quando i raggi luminosi giungono perpendicolari ad essa e diminuisce proporzionalmente al loro angolo d'incidenza secondo la relazione: $E = E_n * \cos(i)$, dove E_n è l'illuminamento normale e i è l'angolo d'incidenza tra raggi luminosi e la normale alla superficie.

Intensità luminosa

Flusso luminoso emesso all'interno dell'angolo solido unitario in una direzione data.

$$I = E = \frac{\varphi}{\omega}$$

ed è una grandezza vettoriale. L'unità di misura nel SI è la candela (cd).

Luminanza

La luminanza è il rapporto tra l'intensità luminosa di una sorgente nella direzione di un osservatore e la superficie emittente apparente così come viene vista dall'osservatore stesso

$$L = \frac{I}{S * \cos \alpha}$$

α è l'angolo compreso tra la direzione di osservazione e l'asse perpendicolare alla superficie emittente. La luminanza si esprime in cd/m^2 .

Parametri fisici delle stelle

Le grandezze fondamentali che permettono di caratterizzare le stelle sono:

- ⇒ la distanza (d)
- ⇒ lo spettro della radiazione e.m. emessa
- ⇒ la luminosità totale o bolometrica (L)
- ⇒ la temperatura superficiale (T)
- ⇒ il raggio (R)
- ⇒ la massa (M)

Le stelle possono essere approssimate a **corpi neri**, in quanto le uniche onde elettromagnetiche che non vengono assorbite dalla loro superficie sono quelle aventi una lunghezza d'onda di dimensione pari o maggiore del diametro della stella stessa. Per studiare le proprietà dell'emissione continua delle stelle è utile introdurre il concetto di corpo nero.

CORPO NERO

Il corpo nero è un corpo che assorbe tutta la radiazione che gli cade sopra. Appare perfettamente nero perché **assorbe il 100% della radiazione** che incide su di esso e **non ne riflette nessuna**. Il corpo nero è un **oggetto teorico**: nessun materiale assorbe tutta la radiazione incidente.

Il corpo nero ha uno spettro di emissione caratteristico che dipende solo da un parametro: la **temperatura**.

Lo studio della radiazione emessa dal corpo nero ha portato alla formulazione delle seguenti leggi:

Legge dello spostamento di Wien

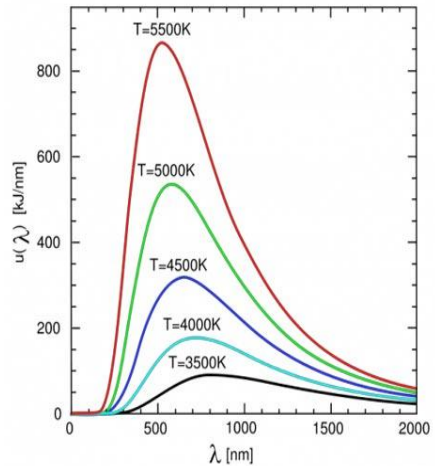
La frequenza massima, ν_{max} di uno spettro di corpo nero a temperatura T cresce linearmente con T .

$\nu_{max} \propto T$, il che comporta una proporzionalità inversa fra la temperatura assoluta e la lunghezza d'onda

$$\lambda_{max} T = b$$

$$b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Per cui si ha: $\lambda_{max} T = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$



129

Legge di Stefan-Boltzmann

L'energia erogata per unità di superficie e per unità di tempo è proporzionale alla quarta potenza della temperatura T :

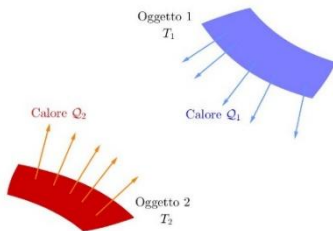
$$I = \sigma T^4$$

Applicazioni in astrofisica

Per una stella, che approssimiamo ad una sfera di raggio R e superficie $S = 4\pi R^2$ la legge di Stefan-Boltzmann diventa:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Poiché le stelle non sono dei corpi neri perfetti, la temperatura è la temperatura efficace, quella che la superficie della stella avrebbe se si comportasse da corpo nero¹⁰.

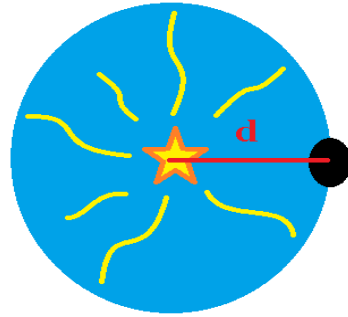


¹⁰ Lo spettro esistente in natura che si avvicina di più a quello di un corpo nero è quello della radiazione cosmica di fondo (CMB, ossia *Cosmic Microwave Background*) a 2.725 K, ma anche lo spettro delle stelle approssima sufficientemente a quello di un corpo nero.

Flusso e luminosità

Il flusso di energia è dato dal rapporto fra l'energia emessa dalla stella nell'unità di tempo e la superficie della sfera di raggio pari alla distanza d dalla stella. Notiamo dunque che il flusso misurato sulla superficie terrestre dipende dalla luminosità della stella e dalla sua distanza.

$$\varphi = \frac{L}{4\pi d^2}$$

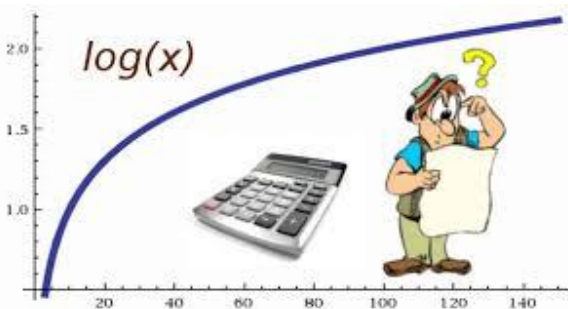


Logaritmi

Definizione

Il termine logaritmo è composto da due parole greche: *logos* = "ragione" e *arithmos* = "numero". “**Numero di ragioni**”: questa definizione appare naturale pensando alla ragione delle progressioni aritmetiche e geometriche che sono alla base della costruzione di Nepero.

La storia di come nasce questo procedimento di calcolo è molto interessante: qui ci piace evidenziare che la motivazione alla base della scoperta dei logaritmi ed anche il motivo del loro successo fu la ricerca di efficienti strumenti di calcolo in grado di alleggerire il pesante fardello di cui erano gravati gli astronomi del tempo i quali, per



poter predire il corso dei pianeti, si dovevano confrontare con grandi difficoltà di calcolo. Basta pensare al **calcolo dell'orbita del pianeta Marte del povero Keplero**. Quando **Nepero** pubblicò il suo lavoro sui logaritmi gli astronomi dissero che aveva regalato loro *metà della vita*! I logaritmi rendono infatti **possibile trasformare prodotti in somme, quozienti in differenze, elevamenti a potenza in prodotti e calcoli di radici in quozienti**: le operazioni vengono molto semplificate.

Che cosa è un logaritmo?

Generalmente si risponde che è una **operazione inversa**.

Partiamo da una operazione conosciuta: l'*estrazione di radice quadrata* di un numero:

$$\sqrt{25} = 5$$

La radice quadrata di 25 è quel numero che elevato a due restituisce 25, cioè il numero 5: infatti $5^2 = 25$. Concludiamo dicendo che la **radice è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza**.

Il concetto di logaritmo è abbastanza simile a quello della radice quadrata solo che non ci riporta al numero di partenza **ma al suo esponente**.

Introduciamo la scrittura:

$$\log_5 25 = 2$$

Essa significa che:

$$5^2 = 25$$

Definiamo logaritmo di un numero b (**argomento** del logaritmo) quel numero a cui bisogna **elevare** la **base** per ottenere il **numero** b. In notazione matematica:

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

Anche il **logaritmo** è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza!

$$\log_2 8 = x$$

La domanda è **“qual è l'esponente che devo dare alla base (2) per ottenere il numero (8)?”**

Scriviamo, applicando la definizione:

$$2^x = 8$$

E siccome:

$$8 = 2^3$$

Allora, sostituendo:

$$2^x = 2^3$$

E perciò*:

$$x=3$$

(*se le basi sono uguali, l'uguaglianza sarà verificata se saranno uguali anche gli esponenti)

È abbastanza evidente che i logaritmi e le potenze costituiscono due modalità di scrittura diversa, ma rappresentano la stessa cosa.

Osservazione importante: la base dei logaritmi e l'argomento devono essere numeri reali positivi; in più, la base deve anche essere diversa da 1:

$$b > 0$$

$$0 < a < 1$$

$$a > 1$$

Quindi, per esempio, non esistono $\log_2(-5)$, $\log_1 12$, ecc.

133

Proprietà dei logaritmi

Il logaritmo del prodotto di 2 o più numeri positivi corrisponde alla somma dei logaritmi dei singoli fattori:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

(Nota: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$)

Il logaritmo del quoziente di 2 numeri positivi è eguale alla differenza tra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

(Nota: $a^x : a^y = a^{x-y}$)

Il logaritmo della potenza a esponente reale di un numero positivo è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo del numero:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Una estensione di questa ultima proprietà è

$$\log_a \sqrt[n]{b^m} = \log_a b^{\frac{m}{n}}$$

(che possiamo scrivere come $\frac{m}{n} \log_a b$)

134

A volte per calcolare un logaritmo può risultare utile effettuare un **cambiamento di base**.

Il $\log_a b$, la cui base è a , può essere scritto utilizzando un'altra base, per esempio il numero c :

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Ricorda inoltre che:

$$\log_a 1 = 0 \quad (\text{infatti } a^0 = 1) \quad e \quad \log_a a = 1 \quad (\text{infatti } a^1 = a)$$

Se la **base** di un logaritmo è il **Numero di Nepero** (chiamato meno frequentemente anche Numero di Eulero e indicato con $e = 2,718281828459\dots$) allora il logaritmo prende il nome di **logaritmo naturale** e si indica con ***ln***.

Quindi se vediamo $\ln 5$, niente paura! Si tratta di $\log_e 5$

Se la **base** di un logaritmo è **10**, il logaritmo prende il nome di **logaritmo decimale** e la base generalmente si **omette**; questo tipo di logaritmo è il più usato in astrofisica.

Quindi se vediamo $\log 7$, ciò vuol dire $\log_{10} 7$

I logaritmi sono utilizzati nella vita di tutti i giorni: ad esempio il gommista quando misura la pressione di una gomma utilizza uno strumento con una scala non lineare ma logaritmica; le scale sulla macchina fotografica sono logaritmiche; i nostri organi di senso sono "logaritmici". Questo ci permette di percepire un intervallo di informazioni molto più esteso di quello che avremmo se i nostri sensi fossero lineari. Pogson, quando capì che il nostro occhio percepisce una differenza di una magnitudine (► per le *magnitudini* consulta le pagine successive del *Bignamino*) tra due stelle quando il rapporto tra le loro luminosità è uguale a 2,5 e che questo conserva la classificazione di Ipparco, formulò la sua formula in funzione del logaritmo del rapporto delle loro luminosità.

135

Niente paura!

Oggi avete le calcolatrici, e non si devono utilizzare le famigerate *tavole logaritmiche* che si utilizzavano un tempo per calcolare un logaritmo.

Bisogna solo stare attenti ad utilizzare **CORRETTAMENTE** la calcolatrice!



Nepero

约翰·内皮尔

Magnitudine delle stelle

Quando si guarda il cielo si vede subito che le stelle ci appaiono più o meno brillanti (o luminose), ovvero sembrano avere diversa **intensità luminosa**. Gli astronomi descrivono la luminosità stellare osservata in termini di **magnitudine apparente m** .

Nel II secolo a.C. Ipparco di Nicea, utilizzando l'unico strumento a sua disposizione (l'occhio umano), introdusse una classificazione delle stelle in **6 classi** di luminosità che chiamò **MAGNITUDINI**.

La scala scelta da Ipparco prevedeva che le stelle più luminose venissero collocate nella prima classe, quelle un po' meno luminose nella seconda e, giù giù, fino a quelle appena visibili a occhio nudo, collocate nella sesta classe.

Con l'osservazione del cielo attraverso gli strumenti ci si pose il problema di estendere la scala delle grandezze anche alle stelle non visibili ad occhio nudo.

Un grossissimo contributo venne dallo studio della fisiologia dell'occhio, strumento sul quale erano state fatte le prime classificazioni. La risposta dell'occhio umano agli stimoli luminosi non è di tipo lineare, la reazione alla luce ne reagisce alla sensazione della luce in modo **logaritmico**.

Pogson è riuscito a dare una formulazione matematica alla scala delle magnitudini individuata da Ipparco. Pogson stabilì che il **rapporto fra le intensità luminose di una stella di prima e di sesta grandezza era pari a 100**.



Magnitudine apparente

Se I_1 è l'intensità luminosa di una stella di magnitudine m_1 ed I_2 l'intensità di una stella di magnitudine m_2 se $m_1 - m_2 = -5$ ed il rapporto $\frac{I_1}{I_2} = 100$

$$m_1 - m_2 = K \log \frac{I_1}{I_2}$$

$$-5 = K * 2$$

$$K = -2,5$$

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{I_1}{I_2}$$

L'equazione di Pogson spiega il perché la magnitudine decresce quando l'intensità luminosa cresce.

Quando si parla di intensità luminosa di una stella in realtà ci si riferisce al flusso di energia, φ , che abbiamo visto essere legato alla luminosità dalla:

$$\varphi = \frac{L}{4\pi d^2}$$

Se nella formula di Pogson $m_1 - m_2 = -2.5 * \log \frac{I_1}{I_2}$ sostituiamo alle intensità luminose il flusso si ottiene (a parità di luminosità):

$$m_1 - m_2 = -5 \log \frac{d_2}{d_1}$$

La magnitudine apparente di una stella dipende dalla distanza.

UTILE PER GLI ESERCIZI:

Con gli strumenti, un fotometro per esempio, calcoliamo il rapporto I_1/I_2 e così possiamo conoscere la differenza di magnitudine $m_1 - m_2$. Se la differenza di magnitudine è di 1 unità:

$$\begin{aligned} -1 &= -2.5 \log \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \\ \log \left(\frac{I_1}{I_2} \right) &= 0.4 \rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10^{0.4} \rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 2.512 = \sqrt[5]{100} \end{aligned}$$

E se la stella apparentemente più debole fosse in realtà più brillante ma più lontana?

Magnitudine assoluta

Per rispondere a questa domanda è stata introdotta la scala delle magnitudini assolute indipendente dalla distanza. Per costruire questa scala è stata presa una distanza di riferimento pari a 10 pc. Quale sarà la magnitudine di una stella di cui si conosce la distanza e la magnitudine apparente se viene posta alla distanza di 10 pc?

$$M - m = -5 \log \frac{d}{10 \text{ pc}}$$

$$M - m = 5 - 5 \log d$$

Questa ultima viene anche indicata come formula del **modulo di distanza**. Il modulo di distanza (μ) è uguale alla differenza tra la magnitudine apparente e quella assoluta di un astro.

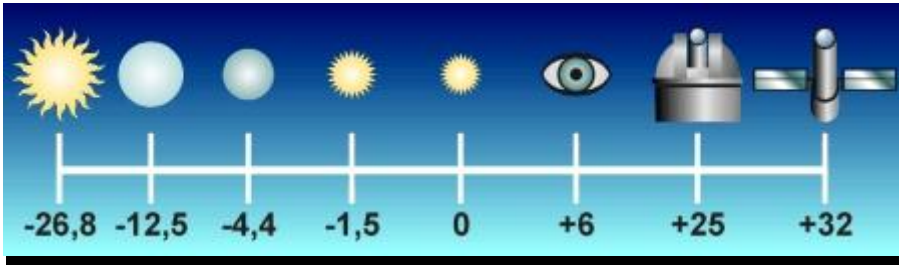
$$\mu = m - M$$

La scala delle magnitudini assolute consente di poter confrontare la luminosità intrinseca delle stelle.

M = magnitudine assoluta (stella alla distanza di 10 pc)

m = magnitudine apparente

d = distanza della stella in pc



Magnitudine apparente di alcuni oggetti celesti: da sinistra verso destra, Sole, Luna piena, Venere, Sirio, Vega, magnitudine limite dell'occhio, magnitudine limite di un telescopio, magnitudine limite del telescopio spaziale Hubble.

Magnitudine di un sistema multiplo

Se vogliamo calcolare la **magnitudine complessiva** di due o più sorgenti luminose, è errato ritenere di poter sommare le magnitudini! Infatti **possiamo sommare i flussi, ma le magnitudini dipendono da essi in relazione logaritmica!** La relazione che ci permette di determinare la cosiddetta *magnitudine integrata* (ossia la magnitudine complessiva, "totale") di n oggetti di magnitudine m_1, m_2, \dots, m_n è la seguente:

$$m_{int} = -2.5 \log (10^{-0.4m_1} + 10^{-0.4m_2} + \dots + 10^{-0.4m_n})$$

Magnitudine integrata e superficiale

Se invece vogliamo calcolare la **magnitudine superficiale** di un oggetto esteso di superficie angolare S (misurata in arcmin^2 o arcsec^2), ossia la magnitudine di un quadratino di superficie di lato uguale a 1 arcsec^2 o 1 arcmin^2 , allora applichiamo la seguente formula:

$$m_{\text{sup}} = m_{\text{int}} + 2.5 \log(S)$$

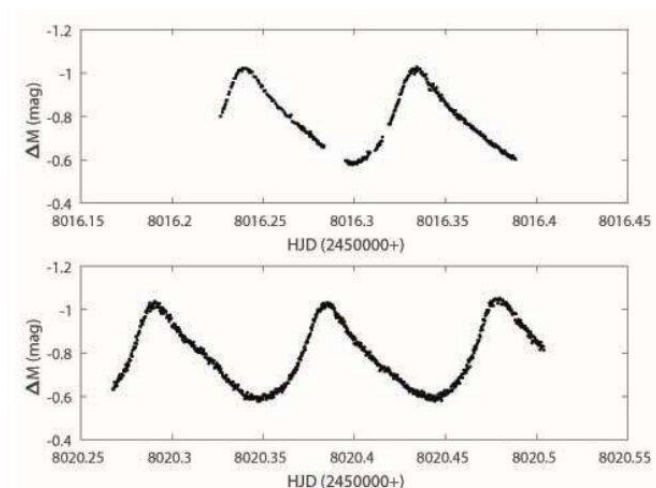
Se S è misurata in arcmin^2 , la m_{sup} è espressa in $\text{mag}/\text{arcmin}^2$. Se S è misurata in arcsec^2 , m_{sup} è espressa in $\text{mag}/\text{arcsec}^2$.

Relazione Periodo – Luminosità

Le stelle variabili cefeidi sono una categoria particolare di stelle pulsanti molto luminose la cui magnitudine assoluta media è legata al periodo di variabilità. Il loro studio ha permesso di determinare in modo pressoché preciso le distanze cosmiche.

Per una cefeide di periodo P vale la seguente relazione:

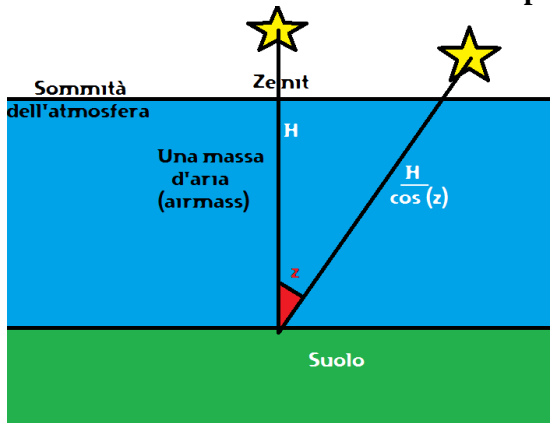
$$M = -2.85 \log P - 1.37$$



Estinzione atmosferica

Estinzione è il termine usato in astronomia per descrivere **l'assorbimento e la diffusione della radiazione elettromagnetica** emessa da un oggetto a causa della materia presente tra l'oggetto e l'osservatore. L'atmosfera terrestre perturba la luce proveniente dalle stelle provocando oltre al fenomeno della **rifrazione** e del **seeing**¹¹ anche **l'assorbimento della radiazione**. Un osservatore riceve un flusso minore di quello che avrebbe osservato fuori dall'atmosfera. Questa attenuazione prende il nome di estinzione della luce della stella, dal punto di vista osservativo si percepisce una magnitudine apparente inferiore da quella osservata fuori dall'atmosfera. La quantità di estinzione **dipende dalla quantità di aria** (airmass) che la luce deve attraversare. La quantità d'aria sopra l'osservatore (allo Zenit) definisce 1 airmass.

Lo strato di atmosfera che la luce attraversa **dipende dal suo angolo zenitale**.



Se si sta osservando una stella allo Zenit, la sua luce sta attraversando 1 airmass. Poiché lo spessore degli strati atmosferici è piccolissimo rispetto al raggio terrestre, l'atmosfera che circonda un osservatore si può considerare piana per angoli zenitali inferiori a 70°.

¹¹ In astronomia, con il termine **seeing** ci si riferisce a particolari fenomeni atmosferici che **peggiorano l'immagine di oggetti astronomici**. Le condizioni di seeing per una determinata notte e una determinata località descrivono quanto l'atmosfera terrestre perturba (per turbolenza e temperatura) l'immagine dei corpi celesti osservati. Il seeing ha molti fattori che lo influenzano quali: la turbolenza atmosferica, l'umidità, le condizioni dello strumento utilizzato, l'inquinamento luminoso e la trasparenza del cielo.

Ed allora si nota che la massa d'aria (A) dipende da:

$$A = \frac{1}{\cos(z)}$$

Lo strato che la luce deve percorrere è maggiore di 1 airmass. Indichiamo con m_a la magnitudine apparente osservata e con m_0 la magnitudine apparente osservata fuori dall'atmosfera. Si dimostra che:

$$m_a = m_0 + kA$$

$$m_a - m_0 = kA$$

$$\Delta m = kA$$

$$\Delta m = k \frac{1}{\cos(z)}$$

Poiché l'angolo z è legato all'altezza h della stella dalla relazione:

$$z = 90^\circ - h$$

Allora:

$$\Delta m = k \frac{1}{\cos(90^\circ - h)}$$

Il coefficiente dipende dalle proprietà locali dell'atmosfera e dalla lunghezza d'onda della luce, oltre che all'ora delle osservazioni. Le condizioni dell'atmosfera possono cambiare da una notte all'altra, a volte anche nel corso di una stessa notte. Per misure di precisione, il coefficiente k deve essere determinato volta per volta.

Calcoli empirici, con ipotesi molto semplificative, mostrano che allo Zenit:

$$\Delta m = 0.21$$

Mentre ad una distanza zenitale di 89° , appena 1° sopra l'orizzonte:

$$\Delta m = 5.49$$

Per distanze zenitali minori di 70° ($z < 70^\circ$) e per osservazioni effettuate da luoghi dove l'inquinamento luminoso è assente e la qualità del cielo è eccellente il coefficiente di estinzione è $k = 0.21$ e la variazione di magnitudine si può calcolare con la seguente formula:

$$\Delta m = 0.21 \frac{1}{\cos(90^\circ - h)}$$

143

Alla distanza zenitale di 90° ($h = 0$) l'applicazione di questa formula porterebbe ad una estinzione infinita. L'assorbimento atmosferico comporta **l'impossibilità di osservare gli astri che si trovano appena sopra l'orizzonte**, se si escludono quelli più luminosi.

L'applicazione di formule complesse e metodi interpolativi di dati osservativi porta alla seguente tabella dove sono tabulati i valori fino a $z = 90^\circ$:

h	z	A	$m - m_0$
90°	0°	1.00	0.21
75°	15°	1.04	0.22
60°	30°	1.15	0.24
45°	45°	1.41	0.30
30°	60°	2.00	0.42
15°	75°	3.9	0.82
10°	80°	5.8	1.2
7°	83°	7.5	1.6
5°	85°	10	2
2°	88°	19	4
0°	90°	40	8

COSMOLOGIA ELEMENTARE

Redshift

Su grandi scale, le galassie si stanno allontanando con velocità via via maggiore all'aumentare della loro distanza. Lo stesso **spazio-tempo si sta espandendo e sta portando le galassie con sé**. Com'è possibile mettere in luce il fenomeno dell'allontanamento delle galassie?

145

Data una sorgente caratterizzata da un certo spettro a righe di emissione o di assorbimento, se essa possiede una componente della velocità non nulla nella direzione di osservazione (componente radiale), tale moto può essere rivelato dallo spostamento delle righe spettrali. In particolare:

1. Se la sorgente si sta allontanando dall'osservatore, allora le righe saranno spostate a lunghezze d'onda maggiori rispetto alla loro posizione in laboratorio (laboratorio = sorgente in quiete). Dal momento che nello spettro visibile le lunghezze d'onda maggiori sono quelle corrispondenti al colore rosso, a tale fenomeno si dà il nome di spostamento verso il rosso (o redshift).
2. Se la sorgente si sta avvicinando all'osservatore, allora le righe saranno spostate a lunghezze d'onda minori rispetto alla loro posizione in laboratorio. Dal momento che nello spettro visibile le lunghezze d'onda minori sono quelle corrispondenti al colore blu, a tale fenomeno si dà il nome di spostamento verso il blu (o blueshift).

Come quantificare le entità degli spostamenti delle righe spettrali?

Introduciamo la seguente relazione per il calcolo del redshift.

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{rest}}{\lambda_{rest}}$$

Dove z è il redshift, λ_{obs} è la lunghezza d'onda osservata della riga e λ_{rest} la lunghezza d'onda della riga corrispondente a sorgente in quiete. Se z è positivo, cioè $\lambda_{obs} > \lambda_{rest}$, allora siamo in presenza di uno spostamento verso

il rosso. Viceversa, se z è negativo, cioè $\lambda_{obs} < \lambda_{rest}$, allora siamo in presenza di uno spostamento verso il blu.

Redshift ottico e legge di Hubble-Lemaître

146

La cosmologia moderna nasce con la **legge di Hubble-Lemaître**:

$$v = Hd$$

Che lega in modo proporzionale la velocità radiali v di allontanamento delle galassie alla loro distanza d (H è la costante di Hubble, il cui valore attualmente stimato è attorno a $H = 2.176 \cdot 10^{-18} \text{ Hz}$ ($67.15 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}$): le **galassie più distanti si allontanano più velocemente**. Questa legge deriva da osservazioni che mostrano che tutte le righe spettrali delle galassie sono spostate verso il rosso (redshift) e che tale effetto è proporzionale alla luminosità apparente delle galassie, legata alla loro distanza.

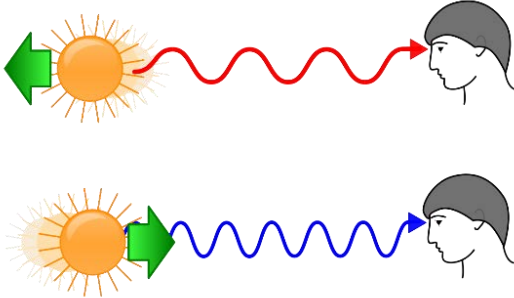
Maggiore è la distanza della galassia, tanto maggiore sarà il redshift:

$$z = \frac{Hd}{c}$$

Per $z \ll 1$ vale l'approssimazione del redshift come effetto Doppler ($z \approx \frac{v}{c}$) e quindi z è direttamente proporzionale alla velocità di allontanamento delle galassie.

Redshift cosmologico

Il **redshift cosmologico** è lo spostamento relativo in frequenza di un'onda elettromagnetica dovuto all'espansione dell'universo. Si spiega ipotizzando che le lunghezze d'onda varino allo stesso modo delle distanze per effetto dell'espansione dell'universo. La lunghezza d'onda è proporzionale al fattore di scala dell'universo.



147

NOTA: Il redshift cosmologico non è dovuto all'effetto Doppler, non è dovuto ai moti relativi delle galassie. Le cause e le grandezze fisiche coinvolte sono completamente diverse.

Redshift relativistico

Quando z si avvicina al valore di 1, allora la formula da utilizzare diventa la seguente (la quale tiene conto degli effetti relativistici):

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

Redshift gravitazionale

La relatività generale prevede che la luce che si muove attraverso campi gravitazionali molto intensi sperimenterà uno spostamento verso il rosso o verso il blu.

Il redshift gravitazionale (chiamato anche **spostamento di Einstein**) è dovuto dal fatto che un fotone, quando emerge da un campo gravitazione, perde energia e quindi presenta uno spostamento verso il rosso che dipende dall'intensità del campo gravitazionale misurata nel punto in cui si trova il fotone:

$$z = \frac{GM}{rc^2}$$

Tale relazione vale se $r \gg r_s$, con:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

(raggio di Schwarzschild)

(M massa della stella, r raggio della stella)

La formula generale è:

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - r_s}} - 1$$

Effetto Doppler

L'effetto Doppler è un fenomeno fisico che consiste nel cambiamento apparente, rispetto al valore originario, della frequenza o della lunghezza d'onda percepita da un osservatore raggiunto da un'onda emessa da una sorgente che si trovi in movimento rispetto all'osservatore stesso. Se la sorgente e l'osservatore si muovono entrambi rispetto al mezzo di propagazione delle onde, l'effetto Doppler totale è derivato dalla combinazione dei due movimenti. Tale effetto è facilmente percepibile quando ascoltiamo le sirene di un'ambulanza passante accanto a noi, che sembrano suonare in modi differenti a seconda che questa si allontani o si avvicini.

Se una sorgente si sta allontanando emettendo onde di frequenza f , allora un osservatore stazionario percepirà le onde con una frequenza f' data da:

$$f' = \frac{v}{v + v_s} f$$

Mentre, se si sta avvicinando:

$$f' = \frac{v}{v - v_s} f$$

Dove v è la velocità delle onde nel mezzo, mentre v_s è la velocità della sorgente rispetto al mezzo (considerando solo la componente nella direzione che unisce la sorgente all'osservatore). In termini relativi si può anche scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} &= \frac{f' - f}{f} = \frac{\frac{v}{(v - v_s)} f - f}{f} = \\ &= \frac{\left(\frac{v}{v - v_s} - 1\right) f}{f} = \frac{v}{v - v_s} - 1 = \\ &= \frac{v - v + v_s}{v - v_s} = \frac{v_s}{v - v_s} \end{aligned}$$

Formula che è equivalente a quella analizzata in precedenza:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{v_s}{c}$$

In generale, la formula della frequenza osservata è la seguente:

$$f' = f \left(\frac{v \pm v_r}{v \pm v_s} \right)$$

Dove v_r è la velocità dell'osservatore, v_s la velocità della sorgente e v la velocità delle onde nel mezzo considerato. Si distinguono 4 casi:

1. Se l'osservatore va verso la sorgente e questa si avvicina all'osservatore, allora si considera il segno + al numeratore e il segno – al denominatore;
2. Se l'osservatore va verso la sorgente e questa si allontana da lui, allora si considera il segno + sia al numeratore che al denominatore;
3. Se l'osservatore si allontana dalla sorgente e questa si allontana dall'osservatore, allora si considera il segno – al numeratore e il segno + al denominatore;
4. Se l'osservatore si allontana dalla sorgente e questa si avvicina a lui, si considera il segno – sia al numeratore che al denominatore.

Un modo per ricordare i vari casi può essere il seguente:

meno (1) e più (2) se mi avvicino

più (3) e meno (4) se mi allontano

MISCELLANEA

151

Risoluzione del sistema per il calcolo delle velocità su orbite non circolari

$$\begin{cases} v_a d_a = v_p d_p \\ \frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GmM}{d_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GmM}{d_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GmM}{d_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GmM}{d_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{1}{2} m \frac{v_p^2 d_p^2}{d_a^2} - \frac{GmM}{d_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GmM}{d_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{1}{2} \frac{v_p^2 d_p^2}{d_a^2} - \frac{1}{2} v_p^2 = \frac{GM}{d_a} - \frac{GM}{d_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{1}{2} v_p^2 \left(\frac{d_p^2}{d_a^2} - 1 \right) = GM \left(\frac{1}{d_a} - \frac{1}{d_p} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{1}{2} v_p^2 \left(\frac{d_p^2 - d_a^2}{d_a^2} \right) = GM \left(\frac{d_p - d_a}{d_a d_p} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ v_p^2 = 2GM \left(\frac{d_p - d_a}{d_a d_p} \right) \left(\frac{d_a^2}{d_p^2 - d_a^2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ v_p^2 = 2GM \left(\frac{d_p - d_a}{d_a d_p} \right) \left[\frac{d_a^2}{(d_p + d_a)(d_p - d_a)} \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ v_p = \sqrt{2GM \frac{d_a}{d_p(d_p + d_a)}} \end{cases}$$

Sostituendo la formula appena trovata nella prima equazione, si ottiene:

$$v_a = \sqrt{2GM \frac{d_p}{d_a(d_p + d_a)}}$$

Possiamo scrivere le due velocità anche in funzione (cioè in dipendenza) del semiasse maggiore e dell'eccentricità dell'orbita. Se chiamiamo il semiasse maggiore dell'orbita ellittica a , valgono le seguenti relazioni:

$$d_a = a(1 + e) \qquad d_p = a(1 - e)$$

153

Quindi:

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{2GM \frac{a(1 + e)}{a(1 - e)[a(1 - e) + a(1 + e)]}} = \\ &= \sqrt{2GM \frac{1 + e}{(1 - e)[a(1 - e + 1 + e)]}} = \\ &= \sqrt{\frac{2GM}{2a} \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right)} = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right)} \end{aligned}$$

Sostituendo anche nel caso di Va :

$$v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1 - e}{1 + e} \right)}$$

Si ricorda inoltre che:

$$a = \frac{d_a + d_p}{2} \qquad e = \frac{d_a - d_p}{d_a + d_p}$$

Angolo di fase

Dalla Terra T si vede il disco di un pianeta O, il cui diametro è AC, illuminato dal Sole S. Il disco, visto da T, appare luminoso da A a B e scuro da B a C. Si dice **fase del pianeta** il rapporto:

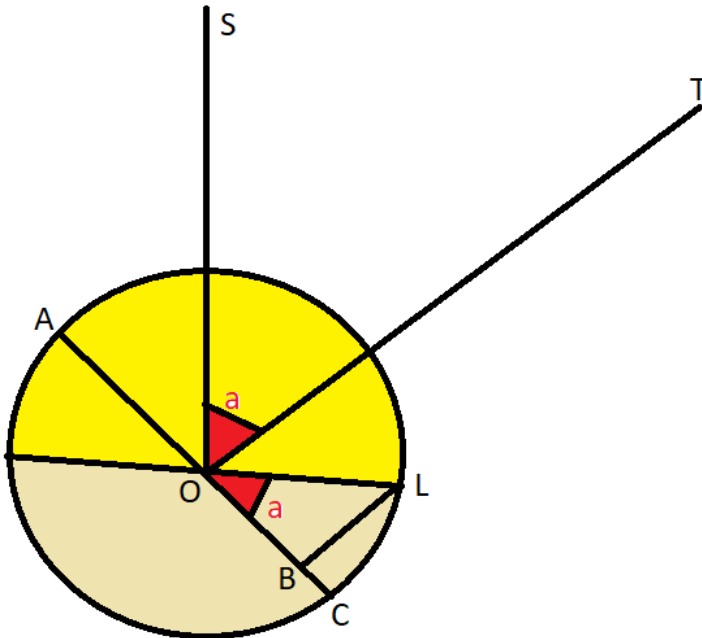
$$q = \frac{AB}{AC}$$

154

Se $\alpha = SOT$, allora $OB = OL * \cos\alpha = OA * \cos\alpha$, cioè:

$$q = \frac{AB}{AC} = \frac{AO + AO\cos\alpha}{2AO} = \frac{AO(1 + \cos\alpha)}{AO * 2}$$

$$q = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

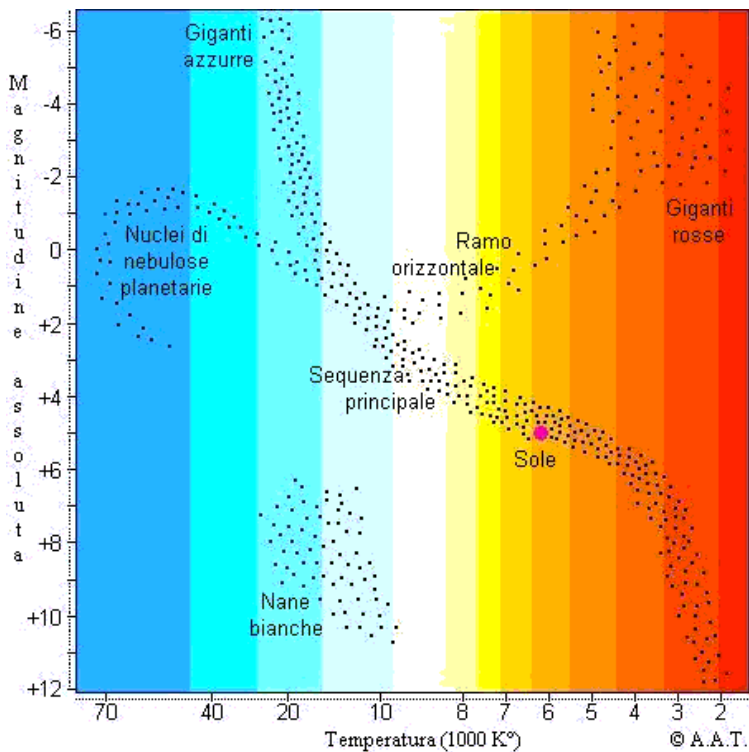


Stelle

Evoluzione stellare e Diagramma H-R

L'evoluzione stellare è l'**insieme dei cambiamenti** che una stella sperimenta nel corso della sua esistenza. La stella nel corso della sua vita subisce variazioni di luminosità, raggio e temperatura anche molto pronunciate. Tuttavia, dato che il ciclo vitale di una stella si estende per un tempo molto lungo su “scala umana”, risulta impossibile per un uomo seguire passo passo l'intero ciclo di vita. Uno strumento ancora oggi fondamentale per inquadrare immediatamente lo stato e l'evoluzione di una stella è il **diagramma Hertzsprung-Russell** (diagramma H-R). Esso riporta temperatura superficiale e luminosità (o classe spettrale e magnitudine), che variano insieme al raggio in funzione dell'età, della massa e della composizione chimica della stella e così permette di sapere in che fase essa si trovi.

155



Il diagramma Hertzsprung-Russell (dal nome dei due astronomi che verso il 1910 lo idearono indipendentemente) è uno “strumento” teorico che mette in relazione la **temperatura** (riportata in ascissa, o la classe spettrale) e la

luminosità (riportata in ordinata, o la magnitudine assoluta) delle stelle. Nel diagramma la temperatura aumenta spostandosi verso sinistra lungo l'ascissa e la luminosità cresce salendo lungo l'ordinata.

Dal grafico, è possibile notare che la disposizione delle stelle nel grafico non è casuale, ma è addensata in alcune regioni. La maggior parte di esse (tra cui il Sole adesso) si dispone lungo la **sequenza principale**, una linea che attraversa il grafico in modo trasversale. Le stelle di questa sequenza presentano una luminosità che è in forte relazione con la temperatura: le stelle più calde (posizionate a sinistra nella sequenza principale) hanno una luminosità che è milioni di volte superiore a quella delle stelle rosse di bassa temperatura.

Nel grafico sono presenti anche le zone delle stelle a bassa temperatura e alta luminosità (zona delle **stelle giganti rosse e supergiganti rosse**), che diventano altamente luminose grazie alle loro dimensioni imponenti, e la zona delle stelle di alta temperatura e bassa luminosità (zona delle **stelle nane bianche**), che hanno un diametro molto minore di quello delle stelle di pari temperatura situate nella sequenza principale.

Ammassi stellari

Un ammasso stellare è un gruppo di stelle molto denso. In generale, le stelle nascono in gruppi che, inizialmente legati gravitazionalmente, giungono col tempo a disgregarsi. Essendo nate dalla stessa nebulosa, hanno le stesse composizioni chimiche. Vi sono 2 tipi principali di ammassi:

- **ammassi globulari**, gruppi stellari densissimi formati da centinaia di migliaia di stelle molto vecchie
- **ammassi aperti**, gruppi stellari che contengono migliaia di stelle giovani. Sono così chiamati perché non hanno alcuna struttura particolare

Albedo

Nelle sezioni precedenti di questo Bignamino abbiamo sinteticamente trattato le grandezze principali che caratterizzano la radiazione luminosa, le relazioni che le coinvolgono e il concetto di spettro elettromagnetico. Adesso vogliamo fornire alcuni concetti per interpretare “macroscopicamente” l’interazione della radiazione luminosa con la materia.

Ogni oggetto interagisce con la radiazione luminosa. Immaginiamo dunque un raggio luminoso, caratterizzato da una certa lunghezza d’onda λ , che si avvicina alla superficie di un oggetto: tale raggio che si avvicina all’oggetto verrà chiamato **raggio incidente**. Se immaginiamo di mandare la retta perpendicolare alla superficie dell’oggetto nel punto in cui il suddetto raggio incide, la “direzione di provenienza” del raggio si può caratterizzare attraverso l’angolo che esso forma con tale retta perpendicolare: quest’angolo si chiamerà **angolo d’incidenza**.

A questo punto l’oggetto potrà interagire con la radiazione luminosa in tre modi:

- 1) Il raggio può essere **riflesso**, come succede quando ci specchiamo: vediamo la nostra immagine riflessa in uno specchio perché i raggi luminosi che provengono dal nostro corpo “rimbalzano” sulla superficie della lastra metallica levigata posta dietro il vetro dello specchio e tornano ai nostri occhi;
- 2) Il raggio può essere **assorbito** dal corpo su cui incide;
- 3) Il raggio può essere **trasmesso**, cioè “entra” nel corpo nel punto di incidenza ed “esce” in un altro punto.

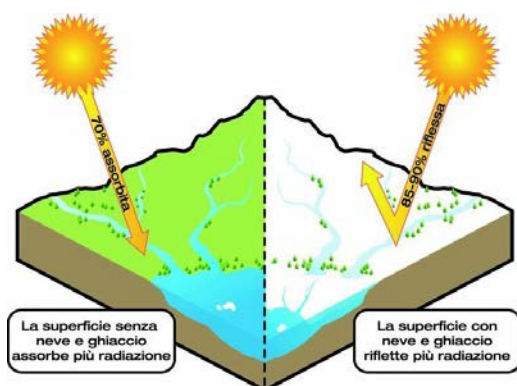
Dato un corpo, tutti questi fenomeni dipendono in generale da molti parametri: l’angolo di incidenza della luce, la lunghezza d’onda della luce incidente, e anche la posizione del punto d’incidenza, visto che la composizione di un oggetto può cambiare da punto a punto (l’esempio è una roccia costituita da vari minerali diversi).

Per la **conservazione dell’energia**, la somma delle intensità delle radiazioni riflessa, trasmessa e assorbita dev’essere uguale al totale della radiazione incidente.

Un corpo può essere tale da non farsi attraversare dalla radiazione luminosa. Nel caso nostro, i pianeti ne sono un esempio. Come caratterizzare dunque complessivamente la riflessione e l'assorbimento della radiazione elettromagnetica da parte delle superfici planetarie? Il parametro che viene introdotto è l'**albedo**.

L'albedo di una determinata superficie è definita come il **rapporto fra l'intensità della radiazione riflessa dalla superficie stessa e la radiazione totale incidente su tale superficie**. In generale, ogni tipo di materiale ha una sua albedo (vd. *Tabella allegata in conclusione di questo Bignamino*).

L'albedo è una grandezza adimensionale (**numero puro**) in quanto rapporto di due grandezze omogenee; è un numero compreso fra 0 e 1 (l'intensità della radiazione riflessa non può mai superare quella della radiazione incidente) e può essere espressa in percentuale moltiplicando per 100%.



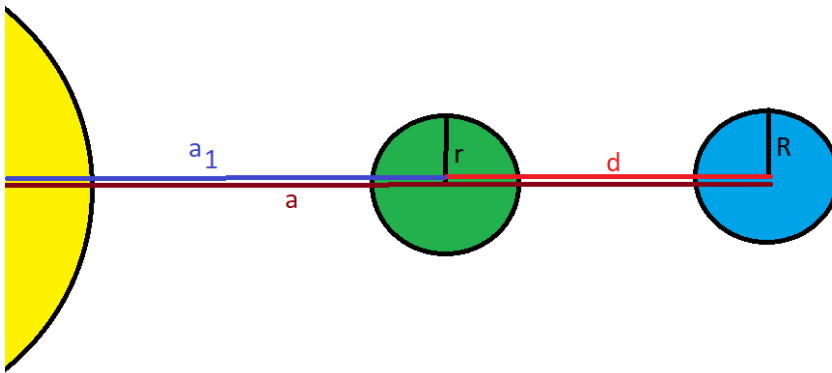
L'albedo "complessiva" di una superficie planetaria dipende dunque dalla composizione della superficie: è appunto un dato che ci informa se la superficie è costituita da materiali molto riflettenti o poco riflettenti.

Siccome i pianeti non trasmettono sostanzialmente la radiazione luminosa che incide su di essi, per la conservazione dell'energia la radiazione che non viene riflessa viene assorbita. Sempre per la conservazione dell'energia, la percentuale di intensità che viene assorbita sarà uguale al 100% meno l'albedo.

La quantità di luce riflessa determina la magnitudine di un pianeta, mentre la quantità di radiazione assorbita ne determina la sua temperatura, come si potrà evincere dai due seguenti esempio molto istruttivi formulati come esercizi teorici:

***Esercizio 1:** Determinare la magnitudine apparente di un pianeta sferico di raggio R visto da un altro pianeta a distanza d da esso, nell'ipotesi che il pianeta venga visto all'opposizione e si trovi a distanza a dalla stella madre, avente magnitudine m_s . Sia a_1 la distanza del secondo pianeta dalla stella madre.*

159



Per prima cosa scriviamo la formula di Pogson ponendoci sul pianeta da cui si “osserva” la scena (lo chiameremo pianeta B, mentre il pianeta P sarà quello di cui si vuole calcolare la magnitudine), confrontando la magnitudine incognita del pianeta (m) con quella della stella

$$m - m_s = -2.5 \log \left(\frac{F}{F_s} \right)$$

Dove con F si è indicato il flusso che proviene da P e arriva su B, mentre con F_s il flusso dalla stella al pianeta B. Come calcolare questo rapporto? Dobbiamo calcolare F . Per prima cosa calcoliamo il flusso della stella F'_s alla distanza di P dalla stella:

$$F'_s = \frac{L_s}{4\pi a^2}$$

(L_s = luminosità stella)

Il flusso F_s sarà invece uguale a:

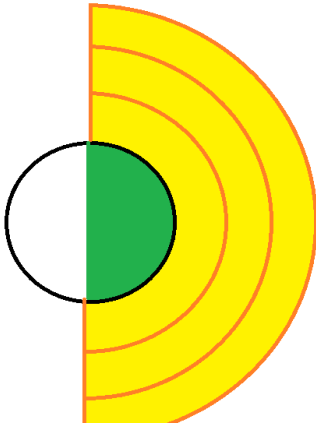
$$F_s = \frac{L_s}{4\pi a_1^2}$$

La quantità di energia intercettata dalla superficie di P ogni secondo è direttamente proporzionale all'area della sua sezione (un cerchio di raggio R):

$$L_{int} = F'_s * \pi R^2$$

Mentre la potenza (energia al secondo) riflessa da P sarà uguale alla luminosità riflessa moltiplicata per l'albedo di P (che indicheremo con la lettera A):

$$L_{rifl} = L_{int} * A$$



Se solo una faccia del pianeta è illuminata, possiamo assumere che la luce riflessa si propaghi su superfici semisferiche centrate nel pianeta B, dunque il flusso che da P arriva a B sarà:

$$F = \frac{L_{rifl}}{2\pi d^2}$$

Applicando tutte le relazioni trovate sopra a quest'ultima:

$$F = \frac{L_{rifl}}{2\pi d^2} = \frac{L_{int} * A}{2\pi d^2} = \frac{F'_s * \pi R^2 * A}{2\pi d^2} = \frac{L_s R^2 A}{8\pi a^2 d^2}$$

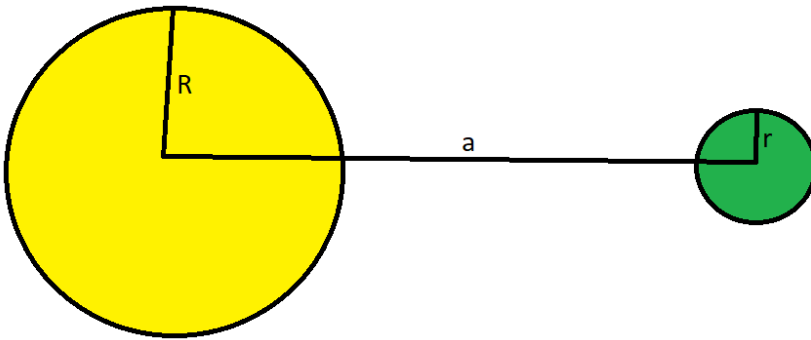
Quindi finalmente:

$$\frac{F}{F_s} = \frac{L_s R^2 A}{8\pi a^2 d^2} * \frac{4\pi a_1^2}{L_s} = \frac{R^2 a_1^2 A}{2 d^2 a^2}$$

Questo rapporto si può sostituire nella Formula di Pogson e ottenere l'espressione della corrispondente magnitudine apparente del pianeta P visto dal pianeta B.

Esercizio 2: Determinare la temperatura d'equilibrio della superficie di un pianeta sferico di raggio r a distanza a dalla sua stella madre, di raggio R e temperatura T , assumendo che sia la stella sia il pianeta si comportino come corpi neri. Sia A l'albedo del pianeta.

161



La stella emette come un corpo nero, dunque vale la Legge di Stefan-Boltzmann:

$$L_{stella} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

Il flusso stellare che arriva alla distanza del pianeta è:

$$F_{stella} = \frac{L_{stella}}{4\pi a^2} = \frac{R^2}{a^2} \sigma T^4$$

La luminosità intercettata dalla superficie del pianeta sarà pari a questo flusso moltiplicato per la superficie della sezione del pianeta (un cerchio di raggio R , vedi esercizio teorico precedente):

$$L_{inc} = \frac{R^2}{a^2} \sigma T^4 * \pi r^2$$

La quantità di energia assorbita ogni secondo sarà pari a una frazione $1 - A$ del totale incidente:

$$L_{ass} = (1 - A) * \frac{R^2}{a^2} \sigma T^4 * \pi r^2$$

All'equilibrio, la potenza assorbita dal pianeta dev'essere uguale a quella emessa per irraggiamento dalla superficie del pianeta stesso (se il corpo è all'equilibrio termico non ci dev'essere calore "netto" assorbito o ceduto, altrimenti varierebbe la temperatura): ma se assumiamo che il pianeta stesso sia un corpo nero, anche per quest'emissione varrà la legge di Stefan-Boltzmann:

$$L_{ass} = L_{emessa}$$

$$(1 - A) * \frac{R^2}{a^2} \sigma T^4 * \pi r^2 = 4\pi r^2 \sigma T_p^4$$

Dove T_p è la temperatura che stiamo cercando.

$$\frac{(1 - A)R^2}{a^2} T^4 = 4 T_p^4 \quad da cui$$

$$T_p = T \sqrt[4]{\frac{1 - A}{4} * \frac{R^2}{a^2}} = T \sqrt[4]{1 - A} \sqrt{\frac{R}{2a}}$$

PROBLEMI ED ESERCIZI

Sistemi di riferimento

L'altezza di Rigel

Quando la stella Rigel ($\delta = -8^\circ 13'$) passa al meridiano di Roma ($\varphi = 41^\circ 55'$) a quale altezza si trova?

163

Soluzione:

Quando la stella Rigel passa al meridiano di Roma essa raggiunge la posizione di culminazione superiore in corrispondenza del punto cardinale Sud. Dunque la sua altezza sull'orizzonte è pari all'altezza dell'Equatore celeste alla latitudine di Roma ($90^\circ - \varphi$) sommata alla declinazione dell'astro. Dunque:

$$h_{\text{Rigel}} = 90^\circ - \varphi + \delta = 90^\circ - 41^\circ 55' - 8^\circ 13' = 39^\circ 52'$$

Dove vedere Canopo

A quale latitudine comincia a essere visibile la stella Canopo ($\delta = -52^\circ 40'$) appena all'orizzonte?

Soluzione:

Affinché la stella Canopo sia appena visibile all'orizzonte per un osservatore posto alla latitudine φ , è necessario che l'Equatore celeste abbia un'altezza sull'orizzonte pari al valore assoluto della sua declinazione. Quindi è necessario che $90^\circ - \varphi = |\delta|$ e cioè:

$$\varphi = 90^\circ - |\delta| = 90^\circ - 52^\circ 40' = 37^\circ 20'$$

In realtà bisogna tenere conto dell'effetto della rifrazione atmosferica che “alza le stelle” o equivalentemente “abbassa l'orizzonte” di un angolo di $35'$. Quindi in realtà Canopo si può osservare anche a una latitudine leggermente più settentrionale pari a $37^\circ 20' + 0^\circ 35' = 37^\circ 55'$ circa.

Questione di ombre

Quale curva descrive l'ombra di uno stilo verticale posto al polo nord il 21 giugno? Qual è il rapporto fra la lunghezza l dell'ombra e l'altezza h dello stilo?

Soluzione:

Il 21 giugno il Sole ha declinazione massima, pari al valore dell'obliquità dell'eclittica, quindi circa $23^{\circ}27'$. Dal momento che al polo nord l'orizzonte coincide con l'Equatore celeste e i paralleli celesti si trovano quindi su piani paralleli all'orizzonte, la rotazione diurna non contribuirà a far tramontare il Sole, che descriverà una circonferenza nel cielo; pertanto la curva descritta dallo stilo verticale è una circonferenza. Il rapporto l/h è il reciproco della tangente dell'altezza del sole, pari a $23^{\circ}27'$

$$\frac{l}{h} = \frac{1}{\tan 23^{\circ}27'} = 2.3$$

Il Sole dei Cinesi – Problema gara IAO 2002

I Cinesi, nel 1100 a.C., avevano trovato che l'altezza del Sole a mezzodì era $79^{\circ}7'$ nel solstizio estivo e $31^{\circ}19'$ in quello invernale. A quale latitudine hanno fatto l'osservazione e qual era allora l'obliquità dell'Eclittica?

Soluzione:

La media aritmetica dei valori delle due culminazioni del sole a mezzodì al solstizio estivo ed invernale è pari all'altezza dell'Equatore celeste. Quindi:

$$90^{\circ} - \varphi = \frac{h_{estate} + h_{inverno}}{2} \rightarrow \varphi = 90^{\circ} - \frac{h_{estate} + h_{inverno}}{2} = 34^{\circ}47'$$

L'obliquità dell'eclittica è la differenza fra l'altezza massima del sole e l'altezza dell'Equatore celeste:

$$\varepsilon = h_{estate} - (90^{\circ} - \varphi) = 79^{\circ}7' - 90^{\circ} + 34^{\circ}47' = 23^{\circ}54'.$$

In generale, l'obliquità dell'eclittica varia da $21^{\circ}55'$ a $24^{\circ}20'$, con un periodo di circa 40000 anni.

Osservazione di una stella

Ci troviamo in un luogo di latitudine $\varphi = 42^\circ 30' 15'' N$ e longitudine $\lambda = 15^\circ 28' 18'' E$. Osserviamo una stella, di ascensione retta $5^h 32^m 3^s$ e declinazione $-00^\circ 15' 20''$, che passa al meridiano alle 20:30 del 14/01/2020. A quale altezza culminava? Quale era la sua distanza zenitale? In quale data, dallo stesso luogo e allo stesso orario, si è potuto vederla sorgere ad est?

Soluzione:

L'altezza massima di una stella (quando culmina) è data dalla relazione:

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta$$

Quindi:

$$h = 90^\circ - 42^\circ 30' 15'' - 0^\circ 15' 20'' = 47^\circ 14' 25''$$

La distanza zenitale è invece data da:

$$z = 90^\circ - h = 90^\circ - 47^\circ 14' 25'' = 42^\circ 45' 35''$$

Un dato importante per poter rispondere alla terza richiesta è sapere che le stelle “anticipano” il loro sorgere di $3^m 56^s/\text{giorno}$.

Quindi per sapere quanti giorni prima la stella sorgeva ad est (m):

$$m = \frac{\alpha}{\Delta t} = \frac{(5^h 32^m 3^s)}{3^m 56^s/\text{giorno}} = 84 \text{ giorni}$$

84 giorni prima del 14/01/2020 era il 21/10/2019.

I moti della Terra e la misura del tempo

Quando (non) osservare Castore

In quale istante di tempo siderale la stella Castore ($\alpha = 7h\ 33m\ 31s$; $\delta = +31^\circ 55' 35''$) è alla culminazione inferiore?

Soluzione:

Alla culminazione inferiore la stella Castore ha un angolo orario pari a 12h. Il tempo siderale, ossia l'angolo orario del punto gamma, è uguale alla somma di angolo orario e ascensione retta di una generica stella; in questo caso:

$$TS = \alpha + H = 7h\ 33m\ 31s + 12h = 19h\ 33m\ 31s$$

Passaggi al meridiano

Se in un dato giorno una stella passa al meridiano inferiore alle 21, a quale ora (all'incirca) vi passerà un mese dopo?

Soluzione:

L'ora a cui si riferisce il problema è, per esempio, quella indicata da un normale orologio, quindi è un tempo solare medio e non siderale. Siccome nel corso di un mese la stella non cambia la sua posizione rispetto al punto gamma, se il problema avesse chiesto l'ora *siderale* della successiva culminazione inferiore la risposta sarebbe stata comunque "alle 21"; siccome però il problema si riferisce a un tempo solare medio, dobbiamo tenere conto della differenza tra giorno solare e giorno siderale: quest'ultimo è più corto del primo di un valore pari a circa 4 minuti (più esattamente 3min 56s). Siccome un mese contiene mediamente 30 giorni, la stella anticiperà la sua culminazione di circa $4min * 30 = 120min = 2h$ e quindi culminerà all'incirca alle 19.

Longitudini diverse, tempi diversi

Una città A è posta alla longitudine $43^{\circ}12'$ E di GW (Greenwich). Quando in A l'orologio segna le 20h35m siderali, in un'altra città B l'orologio segna le 23h12m siderali. Qual è la longitudine di B?

Soluzione:

La differenza dei due tempi siderali che l'orologio segna in A e in B è uguale alla differenza delle longitudini dei due luoghi. Quindi:

$$\Delta\lambda = \Delta TS$$

$$\lambda_B - \lambda_A = TS_B - TS_A$$

$$\lambda_B = TS_B - TS_A + \lambda_A \text{ (espressa in ore!)}$$

$$\lambda_B = 23h12m - 20h35m + 2h53m = 5h30m$$

Trasformo in gradi:

$$\lambda_B = 82^{\circ}30'$$

Da un segno zodiacale all'altro

Quanto tempo è necessario affinché il punto gamma passi da un segno zodiacale a un altro?

Soluzione:

Il punto gamma non è fisso nel cielo, bensì, per via di uno dei moti millenari della Terra, il moto di precessione, esso si sposta di circa $50''$ all'anno lungo l'Eclittica. Dal momento che i segni zodiacali sono dodici, in media ognuno di essi occupa un settore lungo l'Eclittica pari a $360/12 = 30^{\circ} = 108000''$. Ne discende che il tempo necessario affinché il punto gamma copra questa distanza angolare risulta pari a $t = (108000''/50'') \text{ anni} = 2160 \text{ anni}$ circa.

Che velocità!

La Terra impiega circa 23 ore e 56 minuti a compiere una rotazione completa attorno al proprio asse. Con quale velocità tangenziale si muove un punto all'equatore per effetto del moto di rotazione della Terra? Quanto vale l'accelerazione centripeta che agisce su questo punto? Quale forza centripeta agisce su un corpo di massa 1,3 kg all'equatore?

Soluzione:

Il problema, incentrato sul moto di rotazione terrestre (il moto dei punti della Terra attorno all'asse terrestre) è un semplice esercizio di cinematica. Conoscendo il periodo e la lunghezza della circonferenza equatoriale (poiché è noto che il raggio della Terra ha un valore di 6378 km), è possibile determinare la velocità di rotazione all'equatore: il moto è circolare uniforme:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 6378 \text{ km}}{23,93 \text{ h}} = 1674 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

L'accelerazione centripeta vale:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(1674 \div 3,6)^2}{6378000} = 33,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Per la seconda legge della dinamica, la forza centripeta su un corpo di massa m allora vale:

$$F = ma = 1,3 \cdot 33,9 \cdot 10^{-3} = 44,1 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Che ore sono a Belo Horizonte?

In un dato luogo, a che ora di tempo siderale culmina il Sole medio in un dato giorno, sapendo che sedici giorni prima esso culminava alle 15h 12m 48s di tempo siderale? Se ci troviamo a Belo Horizonte (longitudine $\lambda = 43^\circ 56' 16''$ W) al mezzogiorno vero e l'equazione del tempo per quel giorno è pari a $ET = -8m7s$, che ora segna l'orologio dell'osservatore?

Soluzione:

La prima richiesta del problema si risolve tenendo conto che giorno solare medio e giorno siderale hanno diversa durata: infatti il giorno siderale è più

corto del giorno solare medio di circa $3m56s$. Pertanto, se in un dato giorno il punto gamma e il Sole medio hanno raggiunto la culminazione nel medesimo istante, il giorno successivo il Sole medio culminerà $3m56s$ dopo il punto gamma. Quindi il Sole accumulerà un ritardo pari a $16 * 3m56s = 1h2m56s$ che andrà sommato all'ora siderale data dal problema:

$$TS = 15h\ 12m\ 48s + 1h\ 2m\ 56s = 16h\ 15m\ 44s$$

Se a Belo Horizonte è mezzogiorno vero, vuol dire che sono le 12h di tempo solare vero. L'equazione del tempo è la differenza fra tempo solare medio e tempo solare vero, quindi:

$$TSM - TSV = ET$$

$$TSM = TSV + ET = 12h - 8m\ 7s = 11h\ 51m\ 53s$$

L'orologio dell'osservatore è però in accordo col tempo del meridiano centrale del fuso di Belo Horizonte, che ha longitudine $3h\ W$, mentre Belo Horizonte ha longitudine $2h\ 55m\ 45s\ W$: essa è quindi più avanti di:

$$3h - 2h\ 55m\ 45s = 4m\ 15s$$

L'orologio segnerà quindi le ore $11h\ 51m\ 53s - 4m\ 15s = 11h\ 47m\ 38s$

Che ore sono a Bergamo?

A Bergamo ($\lambda = 9^\circ\ 40'\ 12''\ E$) i raggi del Sole, in un dato momento, si proiettano esattamente sulla linea della meridiana di Città Alta. In quel dato giorno l'equazione del tempo è $+5m\ 12s$. se il tempo siderale a mezzanotte di quel giorno a Greenwich risultava pari a $3h\ 21m\ 20s$, qual è il tempo siderale a Greenwich nell'istante del problema?

Soluzione:

La longitudine di Bergamo, espressa in ore, minuti e secondi è $38m\ 41s\ E$. Se il disco luminoso si proietta sulla linea meridiana, è mezzogiorno vero; quindi il tempo solare medio sarà pari a:

$$TSM = TSV + ET = 12h + 5m\ 12s = 12h\ 5m\ 12s$$

Greenwich si trova 38m 41s a ovest di Bergamo, quindi è anche 38m 41s *indietro*: a Greenwich sono quindi le:

$$12h\ 5m\ 12s - 38m\ 41s = 11h\ 26m\ 31s$$

Sono passate quindi 11h 26m 31s dalla mezzanotte: per convertire questo tempo medio in tempo siderale moltiplichiamo per il fattore di conversione 366.25/365.25:

$$\begin{aligned}\Delta TS (Greenwich) &= \left(\frac{366.25}{365.25} \right) * (11.4419444\ h) = 11.4732394h = \\ &= 11h\ 28m\ 24s\end{aligned}$$

Quindi a Greenwich sono le:

$$3h\ 21m\ 20s + 11h\ 28m\ 24s = 14h\ 49m\ 44s$$

di tempo siderale.

Curve solari

Si valuti, argomentando opportunamente, come varia l'Equazione del Tempo nel corso dell'anno solare; se in un piano cartesiano in ascissa indichiamo l'ET e in ordinata la declinazione del Sole, che curva si ottiene?

Risposta:

L'equazione del tempo si annulla quattro volte l'anno: a metà aprile, a metà giugno, verso Natale e ai primi di settembre: il sole medio e il sole vero culminano contemporaneamente; (1) Da Natale a metà aprile il sole medio anticipa il sole vero; (2) da metà aprile a metà giugno il sole vero anticipa il sole medio; da metà giugno a inizio settembre come (1) e da inizio settembre a Natale come (2). Oltre a "oscillare in orizzontale", in un anno il sole "oscilla in verticale", nel senso che assume declinazioni da $23^{\circ}27'$ a $-23^{\circ}27'$. La curva che si ottiene è quindi una sorta di "8" chiamata *analemma*: essa è anche la curva che è formata dalle posizioni in cielo del sole vero registrate a mezzogiorno medio locale ogni giorno dell'anno.

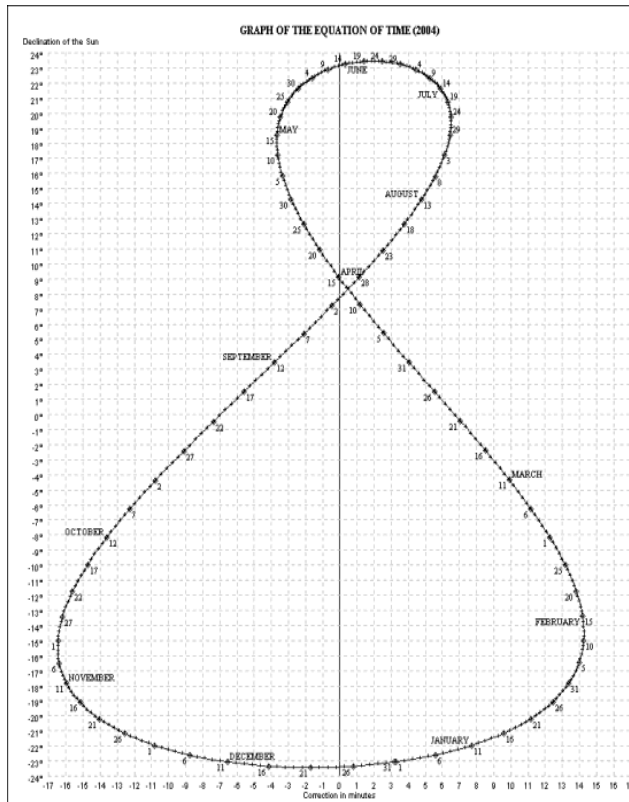


Figura 1. Analemma DEC/ET



Figura 2. Analemma visualizzato nel cielo di Atene

Orologi stellari

Una stella di ascensione retta $AR=11^h 12^m 13^s$ culmina in un dato luogo della Terra alle ore $13^h 04^m 02^s$ di tempo medio. Considerando che a Greenwich culmina una stella con ascensione retta $8^h 11^m 58^s$, dire che orario segna l'orologio dell'osservatore in quel dato luogo della Terra.

Soluzione:

Il tempo siderale in un dato luogo è uguale all'ascensione retta delle stelle che si trovano a culminare al meridiano superiore. Quindi in questo luogo della Terra il tempo siderale è pari a $11^h 12^m 13^s$; a Greenwich il tempo siderale è pari a $8^h 11^m 58^s$. Notiamo come il luogo dove si trova l'osservatore ha longitudine est: infatti è più avanti di Greenwich di circa 3 ore, quindi è più a Est di Greenwich. La differenza fra l'ora siderale dell'osservatore e quella a Greenwich dà la longitudine del luogo (differenza fra longitudine del luogo e longitudine di Greenwich che è 0 perché il suo meridiano è origine delle longitudini):

$$\lambda = TS' - TS(GW) = 11^h 12^m 13^s - 8^h 11^m 58^s = 3^h 0^m 15^s E$$

Questo luogo segue il meridiano che ha longitudine $3^h E$, quindi è in anticipo rispetto a esso di appena 15^s : pertanto il suo orologio segnerà le ore:

$$13^h 04^m 02^s - 15^s = 13^h 03^m 47^s$$

Tempi siderali

Il tempo siderale di un luogo ($\varphi = 28^\circ 30'45''S$; $\lambda = 90^\circ 23'50''W$) è di $9^h 3^{\text{min}} 45^{\text{sec}}$. Quale è il tempo siderale di GW?

Soluzione:

Il primo passaggio da fare è trasformare la longitudine del luogo da gradi in ore. Quindi:

$$15^\circ : 1^h = 90^\circ 23'50'' : \lambda$$

$$\lambda = 90^\circ 23'50'' \cdot \frac{1^h}{15^\circ} = 6^h 1^{\text{min}} 35.33^{\text{sec}}$$

Il tempo siderale del luogo è legato a quello di GW dalla seguente relazione:

$$Ts = TGW + \lambda$$

Quindi:

$$\begin{aligned} TGW = Ts - \lambda &= 9h \ 3 \text{ min} \ 45sec - (-6h \ 1 \text{ min} \ 35.33 \text{ sec}) = \\ &= 9h \ 3 \text{ min} \ 45 \text{ sec} + 6h \ 1 \text{ min} \ 35.33sec = 15h \ 5 \text{ min} \ 20sec \end{aligned}$$

Il cielo visto dalla Terra e dalla Luna

Distanze stellari

Due stelle equatoriali hanno parallassi $0''.022$ e $0''.034$; esse hanno AR 12^h13^m e 13^h12^m rispettivamente. Quant'è in parsec la loro reciproca distanza?

174

Soluzione:

L'angolo fra la direzione con cui si proietta in cielo la prima stella e la direzione della seconda stella è pari alla differenza delle ascensioni rette: le stelle sono infatti equatoriali, cioè hanno declinazione nulla:

$$\Delta AR = 13^h12^m - 12^h13^m$$

Trasformando in gradi:

$$\Delta AR = 14^\circ.75$$

La loro distanza dall'osservatore è, in parsec, pari al reciproco della parallasse:

$$d_1 = \left(\frac{1}{P_1}\right) = \frac{1}{0.022} = 45.5 pc$$

$$d_2 = \left(\frac{1}{P_2}\right) = \frac{1}{0.034} = 29.4 pc$$

Il problema chiede in sostanza di calcolare un lato di un triangolo con vertici nell'osservatore e nelle due stelle (in particolare il lato con estremi nelle due stelle) noti l'angolo opposto a tale lato e gli altri due lati: possiamo quindi usare il Teorema di Carnot (o teorema del coseno):

$$x = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos(\Delta AR)} = 18.6 pc$$

Sinodico del Sole

Sapendo che il periodo siderale di rotazione del Sole all'Equatore è di 25 giorni, trovare il periodo di rivoluzione sinodica, cioè quello che appare visto dalla Terra.

Soluzione:

Prendiamo un punto sull'Equatore del Sole: esso si muove con un periodo siderale (cioè riferito a una stella lontana) pari, come indicato dalla traccia, a 25 giorni. Il problema è del tutto analogo al calcolo del tempo sinodico di un pianeta interno visto dalla Terra noti i periodi di entrambi i corpi.

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{sole}} - \frac{1}{T_{terra}}$$

$$S = \frac{T_{terra}T_{sole}}{T_{terra} - T_{sole}} = \frac{365.25 \cdot 25}{365.25 - 25}d = \frac{9131.25}{340.25}d = 26.84d$$

175

Solo ombre, non penombre

A quale distanza da uno schermo deve essere posta una sfera di raggio R affinché, illuminata dal Sole, non generi ombra ma solo penombra? (il diametro apparente del Sole sia $32'$.)

Soluzione:

Concettualmente il problema è equivalente alla situazione di un'eclisse: l'"osservatore" è lo schermo, mentre fra esso e il Sole si frappone un ostacolo. Esso, intercettando i raggi solari, genera dietro di sé un cono d'ombra, e, molto più ampio di questo, una zona di penombra. Il cono si restringe dalla parte opposta del Sole rispetto alla sfera. Se il vertice del cono si trova sullo schermo, allora nessun punto dello schermo si troverà in ombra perché il cono *non interseca* lo schermo. In questa configurazione, l'angolo sotto cui viene vista la sfera dallo schermo è di $32'$, ovvero $0,53^\circ$, da cui si ha:

$$\frac{R}{d} = \tan\left(\frac{0.53}{2}\right)$$

E cioè:

$$d = [1 / \tan(0.265)] * R = 214.8 R \text{ circa}$$

La sfera dev'essere posta a una distanza dallo schermo maggiore di 214,8 volte circa il suo raggio.

176

Guarda che Luna!

Il 29 marzo 2006 si è verificata un'eclisse totale di Sole, visibile dall'Africa settentrionale e dal Mediterraneo orientale. Quale fase aveva la luna il 29 marzo 2007, cioè esattamente un anno dopo?

Soluzione:

Le eclissi di Sole si verificano quando la Luna si interpone fra il Sole e la Terra, oscurando una fascia sulla superficie del nostro pianeta con il suo cono d'ombra: pertanto, la Luna rivolge a noi, in quest'occasione, la sua faccia non illuminata dal Sole e pertanto è *nuova*. Conosciamo inoltre il periodo in cui si ripetono le fasi lunari: è il mese sinodico, la cui durata è pari a 29,5306 giorni. L'intervallo considerato (un anno, in cui il 2007 non è bisestile), è pari a 365 giorni. Siccome $365 / 29.5306 = 12.36$, ossia 12 mesi lunari e 11 giorni, se ne deduce che l'età della Luna al 29 marzo 2007 era di 11 giorni, quindi essa era in una fase intermedia tra primo quarto e Luna piena.

Gravitazione e leggi di Keplero

L'alieno Bzzapp

L'alieno Bzzapp ha appena comprato una navicella in grado di creare nuovi pianeti; nel suo girovagare, un giorno incappa nel nostro Sistema Solare; decide così di creare con la sua astronave qualche nuovo pianeta. L'amico Zorzzp gli dà prima una regola, dicendogli che questi pianeti devono trovarsi in una fascia compresa fra 2 U.A. e 7 U.A.; in più, il loro periodo di rivoluzione dev'essere pari a un numero intero di anni. Qual è il numero massimo di pianeti che Bzzapp potrà creare con la sua navicella conformemente alla regola di Zorzzp?

177

Soluzione:

Per la risoluzione del problema è necessaria la Terza legge di Keplero, considerando che ci troviamo nel nostro Sistema Solare e che quindi la costante di proporzionalità fra cubo del semiasse maggiore e quadrato del periodo di rivoluzione per un generico corpo orbitante attorno al Sole, quando esprimiamo il semiasse in UA e il periodo in anni, risulta pari a 1.

$$T_1 = \sqrt{a_1^3} = 2.83 \text{ y}$$

$$T_2 = \sqrt{a_2^3} = 18.52 \text{ y}$$

Come possiamo vedere, i periodi “possibili” sono 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 e 18 anni: Bzzapp potrà creare ben 16 pianeti!

Modellini del Sistema solare

Disponendo come dati noti dei soli periodi di rivoluzione dei pianeti, si indichi la lunghezza minima che deve avere un foglio di carta per poter rappresentare in scala il Sistema Solare fino a Nettuno, nell'ipotesi di voler rappresentare Mercurio a una distanza dal Sole di 1 cm.

Soluzione:

Mercurio ha un periodo di rivoluzione pari a 0.241 anni mentre Nettuno 164.88 anni: quindi, per la Terza legge di Keplero:

$$a_M = \sqrt[3]{T_M^2} = 0.387 UA$$

$$a_N = \sqrt[3]{T_N^2} = 30.069 UA$$

Con una semplice proporzione ricaviamo la lunghezza del foglio di carta:

$$a_M : a_N = 1 : x$$

$$x = \frac{30.069}{0.387} cm \approx 77.7 cm$$

Questioni di una certa gravità

A quale distanza dalla superficie della Terra, per un'astronave che viaggia verso la Luna, si annulla la risultante delle forze gravitazionali che agiscono su di essa? (il rapporto massa della Terra/ massa della Luna è pari a 81.25).

Soluzione:

La distanza Terra-Luna è pari a $d=384400$ km. Quando l'astronave si trova fra il nostro pianeta e il suo satellite, le due forze di natura gravitazionale che agiscono su di essa sono la forza di attrazione della Terra e quella della Luna, agenti nella stessa direzione ma aventi verso opposto. Chiamando x la distanza che separa la navicella dal centro della Terra, possiamo esprimere in funzione di x la distanza che separa la navicella dalla Luna, essendo essa pari a $d-x$. Eguagliamo le due forze di attrazione gravitazionale per trovare x .

$$\frac{GM_T m}{x^2} = \frac{GM_L m}{(d-x)^2}$$

Operando le dovute semplificazioni (G e la massa dell'astronave) e dividendo:

$$\frac{x}{d-x} = \sqrt{\frac{M_T}{M_L}} = \sqrt{81.25} = 9.01$$

$$x = \frac{9.01d}{10.01} = 0.90 * 384400km = 346013km$$

Il problema viene considerato parzialmente corretto se ci si ferma a questo punto, perché esso chiede la distanza dalla superficie terrestre mentre x è misurata dal centro della Terra: pertanto la soluzione corretta è:

$$D = x - R = (346013 - 6378)km = 339635km$$

179

L'astronomo Qwzzz

Osservando la stella Canopo con un telescopio potentissimo, l'astronomo Qwzzz ha scoperto due pianeti orbitanti attorno a essa, le cui orbite sono esattamente perpendicolari alla nostra linea di vista. La distanza massima del primo pianeta da Canopo è uguale a 4.7 volte la sua distanza minima, e il suo periodo di rivoluzione è pari a 2.7 anni. Il secondo pianeta, avente eccentricità pari a 0.324, al periapside è 3 volte più lontano rispetto al primo (quando quest'ultimo si trova nella corrispondente posizione). Quanto vale l'eccentricità del primo pianeta e il periodo di rivoluzione del secondo?

Soluzione:

Chiamiamo 1 il primo pianeta e 2 il secondo:

$$\frac{d_{a1}}{d_{p1}} = 4.7 = \frac{a_1(1+e_1)}{a_1(1-e_1)}$$

$$\frac{1+e_1}{1-e_1} = 4.7$$

$$e_1 = 0.649$$

$$\frac{d_{p2}}{d_{p1}} = \frac{a_2(1 - e_2)}{a_1(1 - e_1)} = 3$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{(1 - e_1)d_{p2}}{d_{p1}(1 - e_2)} = 3 \left(\frac{1 - 0.649}{1 - 0.324} \right) = 1.558$$

Per la Terza legge di Keplero:

$$T_2^2 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^3 T_1^2$$

$$T_2 = 2.7 \text{ y} \sqrt{1.558^3} = 5.24 \text{ y}$$

180

Il distante Giove

Calcolare il semiasse maggiore dell'orbita di Giove, in chilometri, sapendo che il suo periodo di rivoluzione è $T_G = 374.11 \cdot 10^6 \text{ s}$

Soluzione:

$$T_G(\text{anni}) = \frac{T_G(\text{secondi})}{(\text{secondi in un anno})} = \frac{374.11 \cdot 10^6 \text{ s}}{3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot \frac{\text{s}}{\text{anno}}}$$

$$T_G = 11.863 \text{ anni}$$

Impostando la terza legge di Keplero e imponendo che $K = \frac{1 \text{ anno}^2}{1 \text{ U.A.}^3}$

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

$$a_G(\text{U.A.}) = \sqrt[3]{[T_G(\text{anni})]^2} = \sqrt[3]{(11.863 \text{ anni})^2} = 5.2 \text{ U.A.}$$

$$a_G = 777.92 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Quanto tempo, Marte!

Calcolare il periodo di rivoluzione di Marte, in giorni, sapendo che il suo semiasse maggiore misura $a_M = 227.9 \cdot 10^9 \text{ m}$.

Soluzione:

$$a_M(U.A.) = \frac{a_M(m)}{149.6 \cdot 10^9 \cdot \frac{m}{U.A.}} = \frac{227.9 \cdot 10^9 \text{ m}}{149.6 \cdot 10^9 \cdot \frac{m}{U.A.}} = 1.52 \text{ U.A.}$$

Impostando la terza legge di Keplero e imponendo che $K = \frac{1 \text{ anno}^2}{1 \text{ U.A.}^3}$

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

$$T_M(\text{anni}) = \sqrt{[a_M(U.A.)]^3} = \sqrt{(1.52 \text{ U.A.})^3} = 1.87 \text{ anni} = 684 \text{ giorni}$$

Veloce o non veloce...

Approssimando l'orbita di Venere a una circonferenza, calcolare la velocità media v del pianeta intorno al Sole sapendo che il suo periodo di rivoluzione è $T_V = 19.41 \cdot 10^6 \text{ s}$

Soluzione:

$$T_V(\text{anni}) = \frac{T_V(\text{secondi})}{(\text{secondi in un anno})} = \frac{19,41 \cdot 10^6 \text{ s}}{3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot \frac{s}{\text{anno}}}$$

$$T_V = 0,61 \text{ anni}$$

Impostando la terza legge di Keplero e imponendo che $K = \frac{1 \text{ anno}^2}{1 \text{ U.A.}^3}$

$$a_V(U.A.) = \sqrt[3]{[T_V(\text{anni})]^2} = \sqrt[3]{(0.61 \text{ anni})^2} = 0.72 \text{ U.A.}$$

$$a_V = 107.6 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$v = \frac{2\pi a_V}{T_V} = \frac{2\pi \cdot 107.6 \cdot 10^6 \text{ km}}{19.41 \cdot 10^6 \text{ s}} = 34.83 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Un pianeta “cadente”

Un pianeta sta cadendo sulla sua stella seguendo una traiettoria rettilinea: se si conosce l'altezza di caduta, h , si determini il tempo di caduta t .

Soluzione:

Per risolvere questo problema si potrebbe erroneamente pensare di applicare le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato (come nel caso di una penna che cade dalla scrivania).

Consideriamo però un corpo (di massa m) che si trova a una certa altezza dal suolo: la sua forza peso equivale alla forza di attrazione gravitazionale tra il corpo e il pianeta (di raggio R e massa M) su cui si trova

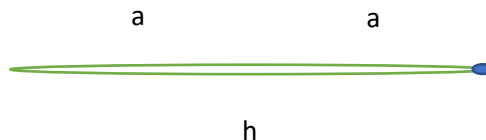
$$mg = \frac{mMG}{(R+h)^2} \quad \text{cioè} \quad g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

Come possiamo vedere, l'accelerazione di gravità g non si mantiene costante al variare dell'altezza, ma varia; noi la assumiamo costante al suolo e pari a circa $9,81 \text{ m/s}^2$ solo perché in quel caso $\Delta h \approx 0$!

Quindi non possiamo applicare le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato a questo problema! Come risolverlo allora?

All'inizio di questi appunti abbiamo evidenziato che l'eccentricità di un'ellisse indica quanto l'ellisse è “schiacciata”: se dunque l'eccentricità tende a 1, la traiettoria tende a un segmento!

Quindi possiamo assumere che il pianeta cada seguendo un'orbita ellittica con eccentricità prossima a 1, e dunque semiasse maggiore a pari a $h/2$ (vedi figura):



Se conosciamo la massa M della stella, possiamo applicare la III legge di Keplero generalizzata:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}} a^3$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}} \left(\frac{h}{2}\right)^3$$

$$T = \sqrt{\frac{\pi^2}{2GM}} h^3$$

Naturalmente questo è il periodo completo dell'orbita. Il periodo di caduta è la metà:

$$t = \frac{T}{2}$$

Stelle e magnitudini

Un oggetto strano

Pochi giorni fa si è registrato un nuovo oggetto che si comporta apparentemente come una binaria a eclisse. Tuttavia il periodo non è stabile: la magnitudine dell'oggetto è in genere pari a 24.32, ma ogni 7-11 secondi sale a 24.52 per 0.2-0.3 secondi. Dopo un'accurata analisi del problema si è capito che l'oggetto splendente è costituito dagli occhi di un gruppo di gatti assolutamente neri seduti su un piccolo corpo del sistema solare, nero, e con gli sguardi rivolti verso il sole. Uno dei gatti batte ogni tanto le palpebre. Quanti gatti ci sono?

Soluzione:

Sia N il numero di occhi, la cui determinazione è richiesta dal problema. Quando il gatto nero del problema chiude gli occhi, il numero di occhi che contribuisce alla magnitudine complessiva scende di due unità ($N-2$). Se consideriamo che gli occhi dei gatti sono tutti gli stessi, ciascuno di essi ci invia un flusso pari a F . Avendo entrambe le magnitudini corrispondenti alla situazione “tutti gli N occhi aperti” (24.32) e “ $N-2$ occhi aperti” (24.52), possiamo scrivere la formula di Pogson tenendo conto dei flussi complessivi:

$$m_{min} - m_{max} = -2,5 \log \left[\frac{F * (N - 2)}{F * N} \right]$$

$$\frac{N - 2}{N} = 10^{\frac{m_{max} - m_{min}}{2,5}} = 10^{-0,08} = 0.832$$

$$N = \frac{2}{0.168} \approx 12 \text{ occhi}$$

ossia 6 gatti

La galassia di Andromeda

La galassia di Andromeda ha una magnitudine apparente integrata $m_v = 4.40$ e appare in cielo come un'ellisse i cui semiassi hanno dimensioni angolari di circa 190 arcmin e 60 arcmin. Sapendo che la sua distanza è di circa 2.54 milioni di anni luce, calcolare la magnitudine assoluta e la magnitudine apparente superficiale media della galassia. (*Gara Interregionale Categoria Senior, 2018*)

Soluzione:

La distanza della galassia di Andromeda in pc è:

$$d(pc) = 2.54 \cdot 10^6 \cdot 3.262 = 778 \cdot 10^3 pc$$

La magnitudine assoluta è data dalla relazione:

$$M_v = m_v + 5 - 5 \log d(pc) = -20.1$$

Per calcolare la magnitudine apparente superficiale dobbiamo calcolare l'area apparente della galassia:

$$\begin{aligned} A &= \pi a b = \pi 190 \cdot 60 = \\ &= 35.8 \cdot 10^3 \text{ arcmin}^2 \cong 129 \cdot 10^6 \text{ arcsec}^2 \end{aligned}$$

La magnitudine apparente superficiale (m_{sup}) si ottiene dalla relazione:

$$\begin{aligned} m_{\text{sup}} &= m_v + 2.5 \log A \cong 15.8 \frac{\text{mag}}{\text{arcmin}^2} \cong \\ &\cong 24.7 \text{ mag/arcsec}^2 \end{aligned}$$

Una variabile pulsante

Si consideri una stella variabile “pulsante” la cui magnitudine assoluta varia nell’intervallo: $M_1 = 3.25$ e $M_2 = 2.26$, con una temperatura effettiva che al massimo di luminosità è $T_2 = 5500\text{ K}$ e al minimo di luminosità è $T_1 = 5000\text{ K}$. Calcolare quanto varia il raggio della stella tra il minimo e il massimo di luminosità. Esprimere il risultato come rapporto tra raggio massimo e raggio minimo e come differenza tra i due raggi in km. (*Gara Interregionale Categoria Senior, 2017*)

Soluzione:

La luminosità di una stella è definita dalla relazione:

$$L = 4 \pi R^2 \sigma T^4$$

Per ricavare il rapporto tra i raggi al massimo e minimo di luminosità utilizziamo la formula di Pogson:

$$\begin{aligned} M_2 - M_1 &= -2.5 \log \left(\frac{L_2}{L_1} \right) = -2.5 \log \left\{ \frac{[4\pi(R_2)^2 \sigma (T_2)^4]}{[4\pi(R_1)^2 \sigma (T_1)^4]} \right\} = \\ &= -2.5 \log \left(\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 * \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^4 \right) \end{aligned}$$

E quindi:

$$0.396 = \log \left(\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 * \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^4 \right) = \log \left(\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 * 1.464 \right)$$

Da cui:

$$0.396 = 2 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \log 1.464$$

Ovvero:

$$0.115 = \log (R_2/R_1)$$

E infine:

$$(R_2/R_1) = 1.30$$

Per ottenere la differenza in km, calcoliamo il raggio della stella al massimo di luminosità confrontando i suoi dati con una stella di caratteristiche note: il Sole. Avremo quindi:

$$M_2 - M_s = -2.5 \log \left[\left(\frac{R_2}{R_s} \right)^2 * \left(\frac{T_2}{T_s} \right)^4 \right]$$

E quindi:

$$1.03 = 2 \log R_2 - 2 \log R_s + 4 \log 0.9519$$

Da cui si ricava:

$$R_2 = 2513 \cdot 10^3 \text{ km} \cong 3.61 R_s$$

$$R_1 = 1933 \cdot 10^3 \text{ km} \cong 2.78 R_s$$

la variazione del raggio in km vale quindi: $\Delta R = 580 \cdot 10^3 \text{ km}$

Una variabile pulsante

La supergigante rossa Betelgeuse ha una magnitudine apparente $m_1 = +0.42$ e una parallasse $\pi_1 = 0.005''$, mentre la supergigante blu Rigel ha una magnitudine apparente $m_2 = +0.13$ e una parallasse $\pi_2 = 0.004''$. Quale delle due stelle è, intrinsecamente, più luminosa? Qual è la più lontana? (*Gara interregionale, Categoria Senior, 2015*)

Soluzione:

Affinché si possa determinare quale delle due stelle sia più luminosa intrinsecamente, è necessario ricorrere al calcolo delle magnitudini assolute delle due stelle: possiamo calcolare la magnitudine assoluta di una stella conoscendo la magnitudine apparente della stessa e la sua parallasse tramite la relazione:

$$M = m + 5 + 5 \log \pi$$

Ove la parallasse è espressa in arcosecondi.

Nel caso nostro:

$$\begin{aligned} M_1 &= m_1 + 5 + 5 \log \pi_1 = +0.42 + 5 + 5 \log 0.005 = \\ &= -6.08 \text{ (Betelgeuse)} \end{aligned}$$

$$M_2 = m_2 + 5 + 5 \log \pi_2 = +0.13 + 5 + 5 \log 0.004 = -6.87 \text{ (Rigel)}$$

188

Essendo la magnitudine assoluta di Rigel minore di quella di Betelgeuse, allora Rigel è intrinsecamente più luminosa di Betelgeuse. Possiamo già da questo risultato comprendere quale stella sia più distante delle due: infatti Rigel è sia apparentemente sia assolutamente più luminosa di Betelgeuse, quindi è necessario che essa sia più distante di Betelgeuse affinché ciò si verifichi. A riprova di ciò, la parallasse di Rigel è minore di quella di Betelgeuse, essendo essa più lontana. La distanza di Rigel in parsec è:

$$\frac{1}{\pi_2} = 250 \text{ pc}$$

Mentre quella di Betelgeuse è:

$$\frac{1}{\pi_1} = 200 \text{ pc}$$

Da cui $d_2 > d_1$.

Cosmologia elementare

Una galassia distante

Un team di scienziati osserva una nuova galassia e ne analizza lo spettro: la riga H-alfa dell'idrogeno, che ha in laboratorio una lunghezza d'onda pari a 6562,81 Å, ha nello spettro della galassia una lunghezza d'onda di 6569,33 Å. Si determini la distanza della galassia.

Soluzione:

Per prima cosa calcoliamo il *redshift* della galassia:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_{oss} - \lambda_{lab}}{\lambda_{lab}} = \frac{6569.33 - 6562.81}{6562.81} = 9.935 \cdot 10^{-4}$$

Applichiamo la legge di Hubble-Lemaître:

$$cz = H_0 d$$

$$d = \frac{cz}{H_0} = 299792.458 \frac{km}{s} * \frac{9.935 \cdot 10^{-4}}{71.9} = 4.14 \text{ Mpc}$$

Alla ricerca della costante – Problema IAO 2018

Osservando l'esplosione di una supernova in una lontana galassia, due scienziati notano che la riga H-beta dell'idrogeno osservata nello spettro, ha esattamente la stessa lunghezza d'onda della riga H-alfa osservata in laboratorio. Tuttavia i due scienziati usano valori diversi per la costante di Hubble. Usando valori che differiscono di $\Delta H = H_2 - H_1 = 14 \frac{km}{s \cdot Mpc}$, ottengono valori diversi per la magnitudine assoluta della supernova al massimo: $M_1 = -19.02$ e $M_2 = -18.64$. Trovare quanto valgono, per ciascuno dei due scienziati, il redshift e la distanza della galassia. (**XXIII International Astronomy Olympiad – Colombo, Sri Lanka, Theoretical Round, Group β, Exercise 1**)

Soluzione:

Il redshift misurato dai due scienziati è lo stesso per entrambi: esso infatti dipende dalle lunghezze d'onda osservate, che, secondo quanto affermato nella traccia, sono le stesse per entrambi gli scienziati. La lunghezza d'onda

della riga H-alfa è pari a 6563 Å, mentre la lunghezza d'onda della riga H-beta è pari a 4861 Å. Il redshift, per definizione, è dunque pari a:

$$z = \frac{\lambda_{H-alfa} - \lambda_{H-beta}}{\lambda_{H-beta}} = 0.35$$

Conoscendo la relazione nota come “modulo di distanza” (relazione fra mag. apparente e mag. assoluta), possiamo scrivere:

190

$$M_1 = m_1 + 5 - 5 \log d_1$$

$$M_2 = m_2 + 5 - 5 \log d_2$$

Ma le due magnitudini apparenti dell'oggetto debbono necessariamente coincidere, dal momento che esse sono dati puramente osservativi (non derivano, cioè, da elaborazioni di dati precedenti): possiamo quindi sottrarre membro a membro le due relazioni precedenti semplificando le due magnitudini apparenti:

$$M_1 - M_2 = 5 \log \left(\frac{d_2}{d_1} \right) \rightarrow \frac{d_2}{d_1} = 10^{\frac{M_1 - M_2}{5}} = 0.839$$

Possiamo scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} d_2 = 0.839 d_1 \\ H_2 - H_1 = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{cz}{H_2} = 0.839 \frac{cz}{H_1} \\ H_2 - H_1 = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} H_2 = 1.19 H_1 \\ H_2 - H_1 = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} H_1 = 73.68 \frac{km}{s * Mpc} \\ H_2 = 87.68 \frac{km}{s * Mpc} \end{cases}$$

Da cui, finalmente:

$$d_1 = \frac{cz}{H_1} = 299792.458 * \frac{0.35}{76.68} = 1368.4 \text{ Mpc}$$

$$d_2 = \frac{cz}{H_2} = 299792.458 * 0.53 / 87.68 = 1196.7 \text{ Mpc}$$

Miscellanea

Massa di una galassia

Una galassia è composta da stelle tutte simili al nostro Sole. Essa mostra uno spostamento verso il rosso della riga $H\alpha$ ($\lambda = 6562.81 \text{ \AA}$) di ampiezza pari a $\Delta\lambda = 1.5 \text{ \AA}$. Essa risulta inclinata rispetto alla perpendicolare alla linea di vista di un angolo di 30° e si sa che il suo raggio è pari a 37000 anni luce. Nel cielo appare come un oggetto di magnitudine superficiale $msup = 24.78 \text{ mag/arcsec}^2$. Quanto vale la massa della galassia?

191

Soluzione:

Ci viene fornita dalla traccia la magnitudine superficiale della galassia vista dalla Terra: essa indica la magnitudine di una “porzione” della galassia di superficie pari a 1 arcsec^2 . Di conseguenza, la magnitudine complessiva della galassia dev’essere legata alla sua superficie angolare: allora dobbiamo conoscere le dimensioni angolari della galassia; abbiamo le dimensioni angolari, quindi dobbiamo ricavare la distanza della galassia:

Calcoliamo per prima cosa il redshift z :

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1.5}{6562.81} = 2.29 \cdot 10^{-4}$$

Con la legge di Hubble-Lemaître ricaviamo la distanza:

$$\begin{aligned} cz &= H_0 d \\ d &= \frac{cz}{H_0} = \frac{3.00 \cdot 10^5 \cdot 2.29 \cdot 10^{-4}}{71.9} \text{ Mpc} = 0.954 \text{ Mpc} = \\ &= 3.11 \cdot 10^6 \text{ anni luce} \end{aligned}$$

Adesso possiamo determinare le dimensioni apparenti della galassia perché ne conosciamo la distanza: nel cielo essa ci appare come un’ellisse il cui semiasse maggiore vale:

$$a = \arctan\left(\frac{R}{d}\right) = \arctan\left(\frac{37000}{3.11 \cdot 10^6}\right) = 0.682^\circ = 2453.8 \text{ arcsec}$$

Essendo il coseno di 30° uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, il semiasse minore varrà:

$$b = \arctan\left(\frac{R\sqrt{3}}{2d}\right) = \arctan\left(\frac{37000 \cdot 1.73}{2 \cdot 3.11 \cdot 10^6}\right) = 0.590^\circ = 2122.6 \text{ arcsec}$$

Calcoliamo la superficie di questa ellisse:

$$S = \pi ab = \pi \cdot 2453.8 \cdot 2122.6 \text{ arcsec}^2 = 1.63 \cdot 10^7 \text{ arcsec}^2$$

192

A questo punto ricaviamo la magnitudine integrata apparente:

$$m = m_{\text{sup}} - 2.5 \log(S)$$

$$m = 24.78 - 2.5 \log(1.63 \cdot 10^7) = 6.75$$

Abbiamo la distanza: troviamo la magnitudine assoluta:

$$M = m + 5 - 5 \log d = 6.75 + 5 - 5 \log(0.954 \cdot 10^6) = -18.15$$

A questo punto troviamo il numero di “soli” contenuti nella galassia grazie alla relazione che ci permette di ricavare la magnitudine integrata di un oggetto (nel caso sia composto da componenti uguali):

$$M = -2.5 \log(N \cdot 10^{-0.4M_s})$$

$$N = 10^{-0.4(M-M_s)} = 10^{-0.4(-18.15-4.83)} =$$

$$= 1.56 \cdot 10^9 \text{ stelle come il Sole!}$$

Possiamo finalmente trovare la massa della galassia:

$$M_g = 1.56 \cdot 10^9 \cdot 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 3.10 \cdot 10^{39} \text{ kg}$$

Carburante stellare

Una stella di raggio $R=705000$ km presenta un picco d'emissione alla lunghezza d'onda di 542 nm. Se essa è costituita interamente da idrogeno, si determini quanti atomi di idrogeno hanno reagito in un secondo nel nucleo della stella, nella reazione di fusione termonucleare che produce elio.

Soluzione:

Dobbiamo innanzitutto determinare la luminosità della stella, che dipende dal quadrato del raggio e dalla quarta potenza della temperatura; disponiamo del raggio, ma dobbiamo ricavare la temperatura; notiamo come il problema fornisca la lunghezza d'onda del picco d'emissione, che è inversamente proporzionale alla temperatura efficace secondo la Legge di Wien:

$$\lambda \cdot T_{eff} = 2.898 \text{ mm K}$$

$$T_{eff} = \frac{2.898 \text{ mm K}}{542 \cdot 10^{-6} \text{ mm}} = 5347 \text{ K}$$

Adesso possiamo determinare la luminosità della stella (Legge di Stefan-Boltzmann):

$$L = 4\pi R^2 \sigma (T_{eff})^4 = 4\pi (7.05 \cdot 10^8)^2 5.67 \cdot 10^{-8} (5347)^4 \text{ W} =$$

$$= 2.89 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Questa è l'energia che la stella irradia in un secondo, ma da dove deriva? Nel nucleo, quattro protoni si fondono per formare un nucleo di elio: il nucleo di elio che si forma, però, non ha la stessa massa dei quattro protoni, bensì ha una massa lievemente minore. La massa mancante (il *difetto di massa*) si è trasformata in energia secondo la famosa relazione di Einstein

$$E = mc^2$$

Se $E=L$, m sarà uguale al difetto di massa complessivo per unità di tempo:

$$m = \frac{L}{c^2} = \frac{2.89 \cdot 10^{26} \text{ W}}{9 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 3.21 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Essendo la massa di un nucleo di elio-4 pari a $6.645 \cdot 10^{-27} kg$, mentre la massa del protone pari a $1.673 \cdot 10^{-27} kg$, si ha che la massa di 4 protoni è $6.692 \cdot 10^{-27} kg$ e quindi il difetto di massa per ogni reazione è:

$$\Delta m = 0.047 \cdot 10^{-27} kg$$

Dividendo questo valore per quello trovato sopra, otteniamo il numero di reazioni che avvengono in un secondo nel nucleo della stella:

$$N = \frac{m}{\Delta m} = \frac{3.21 \cdot 10^9}{0.047 \cdot 10^{-27}} \text{reaz.} = 6.83 \cdot 10^{37} \text{reaz.}$$

A ogni reazione corrispondono quattro atomi di idrogeno, quindi per trovare la soluzione ci basta moltiplicare questo valore per 4:

$$N_{tot} = 4N = 2.73 \cdot 10^{38} \text{atomi(!)}$$

Una stella metallica

Che dimensioni dovrebbe avere una sfera metallica perfettamente riflettente per essere visibile come un astro da Terra ad occhio nudo, quando essa si trova in opposizione al Sole? (Questa sfera è posta in orbita circolare attorno alla Terra con un periodo $T = 2.766 \text{ ore}$).

Soluzione:

Innanzitutto ci serve conoscere il raggio orbitale della sfera, perciò applichiamo la Terza Legge di Keplero generalizzata:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24} \cdot 9.92 \cdot 10^7}{4(3.14)^2}}$$

$$a = 10005 km$$

Sia F_s il flusso solare: esso investe la sfera e la quantità di energia intercettata in un secondo (L_{int}) è direttamente proporzionale alla sezione della sfera:

$$L_{int} = F_s \cdot \pi R^2$$

La luce viene interamente riflessa, quindi

$$L_{rif} = L_{int} = F_s \cdot \pi R^2$$

Questa luminosità viene riflessa in tutte le direzioni, quindi tutti i punti che si trovano alla medesima distanza dalla sfera riceveranno lo stesso flusso pari a:

$$F = \frac{F_s \cdot \pi R^2}{4\pi d^2} = \frac{F_s \cdot R^2}{4d^2}$$

In particolare, per una località posta sulla Terra:

$$F = \frac{F_s \cdot R^2}{4(a - R_T)^2} = \frac{F_s \cdot R^2}{4(10^7 - 6.378 \cdot 10^6)^2} = 1.906 \cdot 10^{-14} F_s R^2$$

Applichiamo la formula di Pogson comparando la sfera col Sole e tenendo presente che la magnitudine della sfera dev'essere uguale a 6 (l'oggetto è appena visibile ad occhio nudo):

$$m - m_s = -2,5 \log\left(\frac{F}{F_s}\right)$$

$$6 + 26.74 = -2.5 \log(1.906 \cdot 10^{-14} R^2)$$

$$1.906 \cdot 10^{-14} R^2 = 10^{-13.1}$$

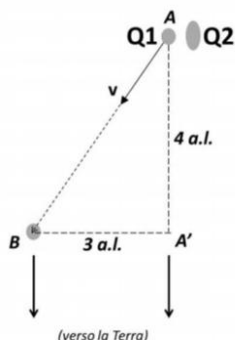
$$R = \sqrt{\frac{10^{-13.1}}{1.906 \cdot 10^{-14}}} m = 2.04 m$$

Pertanto la sfera deve avere un diametro di 4.08 metri.

N.B.: Nello svolgimento del problema si è usato lo stesso valore del flusso solare per la Terra e per la sfera; in realtà ciò è un'approssimazione, perché le distanze Terra-Sole e Sole-sfera sono diverse. Essendo però il semiasse dell'orbita della sfera trascurabile rispetto al semiasse della Terra, allora i due flussi sono assai simili.

Un quasar doppio

È stato osservato un quasar doppio che si trova a grandissima distanza dalla Terra. La particolarità di questo quasar è il moto di allontanamento delle due componenti Q_1 e Q_2 . In particolare, Q_1 si allontana da Q_2 spostandosi, come riportato in figura, dal punto A al punto B, con velocità relativistica “v” pari



al 75% della velocità della luce. Calcolare l'intervallo di tempo Δt impiegato dal componente Q_1 a raggiungere il punto B e il corrispondente intervallo di tempo $\Delta t'$ misurato dagli astronomi sulla Terra (che giace sullo stesso piano della figura). Sulla base del risultato ottenuto, di fronte a quale sconvolgente conclusione si sono trovati gli astronomi, prima di riuscire a spiegare correttamente il fenomeno? (*Finale Nazionale 2015 Categoria Junior*)

Soluzione:

Il tratto AB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABA' (vedi figura), quindi esso vale (Teorema di Pitagora).

$$AB = \sqrt{AA'^2 + A'B'^2} = \sqrt{9 + 16} = 5a.l.$$

Esso viene quindi percorso nel tempo:

$$\Delta t = \frac{AB}{v} = \frac{5a.l.}{0.75c} = 6.67 \text{ anni}$$

Notiamo come non ci sia bisogno di conoscere il valore della velocità della luce perché le distanze sono espresse in anni luce.

Adesso analizziamo il fenomeno come viene visto dalla Terra. Quando Q_1 si trova in A la luce da esso emessa impiega, per giungere in A', un tempo pari a:

$$\frac{4 a.l.}{c} = 4 \text{ anni}$$

Nel frattempo Q_1 si sposta e per arrivare in B impiega 6.67 anni. La luce che emette in B non deve più attraversare una distanza di 4 a.l., quindi i due segnali luminosi arrivano a una “distanza” temporale:

$$\Delta t' = (6.67 - 4)\text{anni} = 2.67 \text{ anni}$$

Il risultato sconvolgente è che, siccome agli astronomi da Terra è sembrato che Q_1 si spostasse lungo $A'B$, la sua velocità misurata da Terra risulta pari a:

$$v = \frac{A'B}{2.67 \text{ anni}} = \frac{3a.l.}{2.67 \text{ anni}} = 1.125c !!!$$

Apparentemente il quasar si è spostato con una velocità superiore a quella della luce. Non è infatti raro osservare dei moti *superluminali* (cioè con velocità superiore a quella della luce) in oggetti che si muovono con velocità relativistiche; questa velocità è, tuttavia, sempre *apparente*.

Redshift e velocità radiali

Se una stella presenta un redshift z pari a $5.55 \cdot 10^{-5}$, quale sarà il verso e il valore della sua velocità radiale?

Soluzione:

Il redshift è positivo, quindi la stella si allontana da noi. La velocità radiale della stella è data da:

$$v = cz = 3 \cdot 10^5 \cdot 5.55 \cdot 10^{-5} = 16.7 \frac{km}{s}$$

Redshift di un ammasso stellare

La lunghezza d'onda λ' di una delle righe più evidenti della luce emessa dalle galassie di una costellazione è 1.020 volte più grande della corrispondente lunghezza d'onda λ di riferimento. Calcolare la velocità con cui l'ammasso si sta allontanando dalla Terra e stimare la sua distanza.

Soluzione:

Il redshift è:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{(1.020 - 1)\lambda}{\lambda} = 0.020$$

Pertanto:

$$v = 0.020c = 6000 \frac{km}{s}$$

E legge di Hubble-Lemaître:

$$d = \frac{v}{H} = \frac{6000}{71.9} = 83.4 \text{ Mpc}$$

Distanze di ammassi stellari

In una galassia, tutti gli ammassi globulari hanno un diametro pari a 50 anni luce. Nelle fotografie si misura il diametro angolare di tre di questi ammassi. I diametri risultano pari a 8', 9', 10'. Calcolare la distanza dei tre ammassi.

Soluzione:

Le dimensioni reali di un oggetto visto sotto un angolo α alla distanza d sono date da:

$$D = 2d \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Da cui:

$$d_1 = \frac{D}{2 \tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)} = \frac{50}{2 \tan\left(\frac{0.1333}{2}\right)} = 21486 \text{ anni luce}$$

$$d_2 = \frac{D}{2 \tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)} = 19099 \text{ anni luce}$$

$$d_3 = \frac{D}{2 \tan\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)} = 17189 \text{ anni luce}$$

Ingrandimenti di un telescopio (e non solo!)

Se si dispone di un telescopio di 30 cm di diametro e lunghezza focale di 2 m, quali ingrandimenti saranno forniti da tre oculari di focale 25mm, 10 mm e 5mm? Se gli oculari hanno un campo apparente di 55°, quale sarà l'angolo di campo al telescopio? Calcolare pure la pupilla d'uscita.

Soluzione:

Calcoliamo l'ingrandimento:

$$I_1 = \frac{F}{f} = \frac{2000mm}{25mm} = 80x$$

$$I_2 = \frac{2000}{10} = 200x$$

$$I_3 = \frac{2000}{5} = 400x$$

Il campo del telescopio sarà:

$$FoV_1 = \frac{FoV_{oc}}{i} = \frac{55^\circ}{80} = 0.69^\circ$$

$$FoV_2 = \frac{55^\circ}{200} = 0.28^\circ$$

$$FoV_3 = \frac{55^\circ}{400} = 0.14^\circ$$

La pupilla d'uscita:

$$p_1 = \frac{300}{80} = 3.75mm$$

$$p_2 = \frac{300}{200} = 1.5mm$$

$$p_3 = \frac{300}{400} = 0.75mm$$

Telescopi e granuli solari

Calcolare l'apertura minima di un telescopio per poter riconoscere un granulo solare ampio 700km.

Soluzione:

L'estensione angolare di questo granulo è data da:

$$\alpha = 2 \arctan \left(\frac{D}{2d} \right) = 2 \arctan \left(\frac{700}{2 \cdot 149.6 \cdot 10^6} \right) = 0.97''$$

Quindi, per la formula di Dawes:

$$D(mm) = 120/\alpha'' = 12.4cm$$

Telescopi per fotografare

Per realizzare una fotografia a vasto campo è stato necessario un tempo di posa di 13 minuti a f/3 con sensibilità 800 ISO. Determinare il tempo necessario per ottenere la stessa foto usando una sensibilità di 1000 ISO ed un'apertura relativa di f/4,5. Trascurare le perdite di sensibilità dovute al difetto di reciprocità delle pellicole.

Soluzione:

Il tempo di posa richiesto si ricava dalla formula:

$$T_2 = \frac{f_2^2 S_1}{f_1^2 S_2} T_1$$

T tempo, S sensibilità, f diaframma (apertura relativa)

$$T_2 = \frac{4.5^2}{3^2} \frac{800}{1000} 13 = 23.4 \text{ min}$$

Telescopi e foto di stelle puntiformi

Determinare il tempo di posa massimo per ottenere stelle puntiformi senza inseguimento siderale con un obiettivo di 50 mm (di focale F) puntato su una zona di cielo avente declinazione media 45° . Il formato utilizzato è il 24x36mm.

Soluzione:

La formula che permette di ottenere stelle puntiformi è:

$$T_{max} = \frac{600}{F \cos \delta} = 17 \text{ secondi}$$

201

Radiotelescopi

Un radiotelescopio ha apertura di 75 m. Determinare il limite di diffrazione raggiungibile alla frequenza di osservazione di 410 MHz.

Soluzione:

La lunghezza d'onda è data da:

$$c = \lambda \nu$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 73.2 \text{ cm}$$

Il limite di diffrazione si ricava dalla formula di Rayleigh:

$$\vartheta = \frac{1.22\lambda}{D} = 1.22 \frac{73.2}{7500} = 0.0119 \text{ rad} = 0.68^\circ = 41'$$

Radiotelescopi 2.0

Un radiotelescopio ha un diametro di 25m. Calcolare il limite di diffrazione alla lunghezza d'onda di osservazione di 21 cm.

Soluzione:

Per la formula di Rayleigh:

$$\vartheta = \frac{1.22\lambda}{D} = 1.22 \frac{21}{2500} = 0.01 \text{ rad} = 0.59^\circ = 35.2'$$

Questioni di risoluzione

Un telescopio riflettore ha diametro 1.5 m. Calcolare il suo potere risolutivo massimo alla lunghezza d'onda dell'idrogeno ionizzato $H_\alpha=656.3\text{nm}$.

Soluzione:

Ancora una volta:

$$\vartheta = \frac{1.22\lambda}{D} = 1.22 * \frac{656.3 * 10^{-9}}{1.5} = 5.3 \cdot 10^{-7} \text{rad} = 0.11''$$

Questioni di risoluzione

Consideriamo due stelle, la prima (S1) ha magnitudine apparente $m_1=11$ e si trova a una distanza L_1 dalla Terra; la seconda, S2, ha luminosità intrinseca identica a S1, ma si trova a una distanza tripla rispetto a S1. Che magnitudine apparente ha la stella S2? Se abbiamo a disposizione uno specchio di diametro D_1 con cui si riesce a vedere a malapena S1, quanto deve essere il diametro del secondo telescopio D_2 che permetta di vedere a malapena la stella S2?

Soluzione:

Siccome la luminosità intrinseca è la stessa ma la distanza della seconda stella è tripla, il flusso della seconda stella è uguale a un nono del flusso della prima. Quindi, applicando la formula di Pogson:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = -2.5 \log 9 = -2.39$$

$$m_2 = 11 + 2.39 = 13.39$$

Infine, poiché per osservare S2 dobbiamo essere in grado di rivelare il flusso che è 9 volte minore e che l'area di uno specchio aumenta con il quadrato del raggio, il raggio dello specchio D_2 dev'essere 3 volte più grande di quello di D_1 .

Magnitudini limite

Calcolare la magnitudine limite visuale limite raggiungibile con un telescopio di diametro $D = 25\text{cm}$.

Soluzione:

Applicando la formula per trovare la magnitudine limite (con il diametro espresso in cm) troviamo:

$$m = 6.8 + 5\log D = 6.8 + 5\log 25 = 13.8$$

203

Magnitudini limite e apertura di un telescopio

Calcolare l'apertura necessaria per poter osservare stelle fino a una magnitudine limite visuale di +16 con un telescopio.

Soluzione:

Applicando la formula precedente:

$$m = 6.8 + 5\log D$$

$$D = 10^{\frac{m-6.8}{5}} = 10^{1.84} = 69.2 \text{ cm}$$

“Pesiamo” una stella

In un sistema stellare, una stella ruota attorno ad un'altra su un'orbita circolare con velocità 45 km/s. il suo periodo di rivoluzione è 300 giorni. Determinare il raggio dell'orbita e la massa della stella centrale.

Soluzione:

La velocità orbitale è data da:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Da cui:

$$R = \frac{vT}{2\pi} = \frac{45000 \cdot 2.592 \cdot 10^7}{6.2831} = 1.856 \cdot 10^{11} m$$

Dalla Terza legge di Keplero:

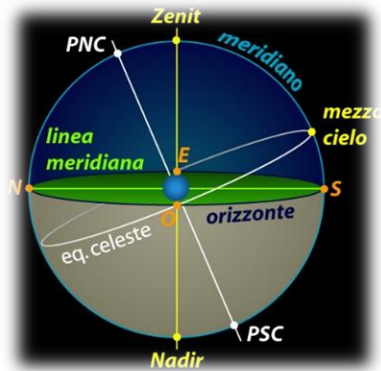
$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = 5.632 \cdot 10^{30} kg$$

SFERA E TRIGONOMETRIA SFERICA

Premessa

205

Nella **geometria piana** i concetti base sono il **punto** e la **retta**. Su una sfera, i **punti** sono definiti nel senso **usuale**. Le **rette** sono definite come **cerchi massimi**. Data una sfera si definisce **circonferenza massima** ogni circonferenza che si ottiene intersecando la superficie sferica con un piano passante per il centro della sfera. L'**equatore celeste** è un circolo massimo mentre i paralleli di declinazione non lo sono. L'**orizzonte astronomico** è un circolo massimo mentre non lo sono gli almucantarati o paralleli di altezza.



Elementi della sfera

Superficie sferica

Si chiama superficie sferica la **figura generata da una semicirconferenza in una rotazione completa attorno al suo diametro**. Possiamo anche definirla come luogo geometrico. La superficie sferica è il luogo geometrico dei **punti** dello spazio che hanno **distanza dal centro** pari al **raggio**.

Sfera

Si chiama sfera la **figura generata da un semicerchio di una rotazione completa attorno al suo diametro**. Definita come luogo geometrico è il luogo dei **punti** dello spazio la cui **distanza dal centro è minore o uguale al raggio**.

Segmento sferico a due basi

Definiamo segmento sferico a due basi la parte di sfera compresa fra due piani paralleli α e β secanti la sfera stessa

Calotta Sferica

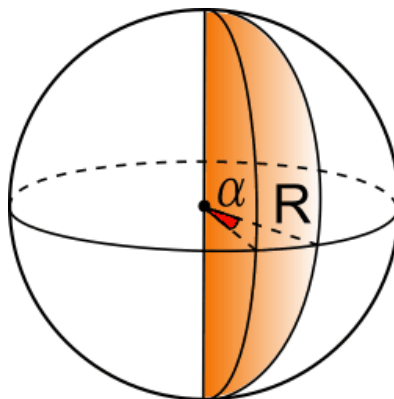
Definiamo calotta sferica ognuna delle due parti in cui una superficie sferica viene divisa da un piano secante α . La calotta è la porzione di superficie sferica ottenuta per sezione con il piano α .

Segmento sferico ad una base

Il segmento sferico ad una base è ognuna delle due parti in cui una sfera viene divisa da un piano secante α , il segmento è la porzione di sfera compresa tra il piano e la calotta.

Fuso sferico

La parte di superficie sferica limitata da due circonferenze massime, di sezione dei semipiani α e β con la superficie sferica.



Zona sferica

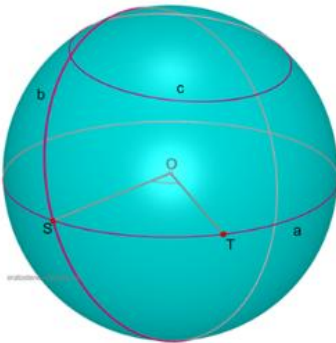
Si chiama zona sferica la parte di superficie sferica compresa fra due piani paralleli α e β che intersecano la sfera. Le circonferenze sezioni si chiamano basi della zona. L'altezza è la distanza tra i due centri delle circonferenze sezioni.

Corda

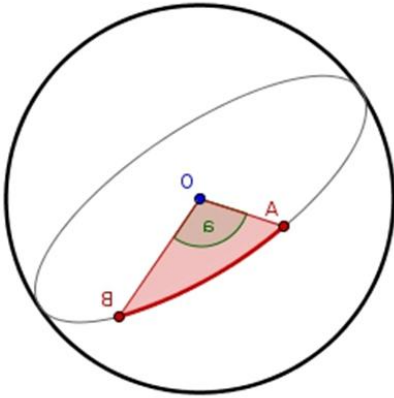
Si chiama corda un **segmento i cui estremi appartengono alla superficie sferica**. Si chiama **diametro una corda passante per il centro** della superficie sferica e della sfera.

Spicchio sferico

Lo spicchio sferico è il solido delimitato da due piano meridiani passanti per uno stesso diametro e dalla porzione di superficie sferica (fuso sferico) a essi corrispondente. Presi due punti distinti su una sfera, per essi passa **una ed una sola circonferenza massima**. Dati due punti A e B, distinti, su una sfera, esiste una ed una sola circonferenza massima che li contiene. I due punti individuano su questa circonferenza due archi, il minore di essi si chiama **distanza sferica** e rappresenta una **geodetica**. La geodetica è la linea che realizza, su una data superficie, il minimo percorso fra i due punti assegnati.



Nella geometria sferica la circonferenza massima gioca lo stesso ruolo della retta nella geometria piana.



La lunghezza di questo arco è proporzionale al raggio della sfera e all'angolo al centro AOB. Se AOB è espresso in radianti:

$$AB = OA \times \hat{AOB}$$

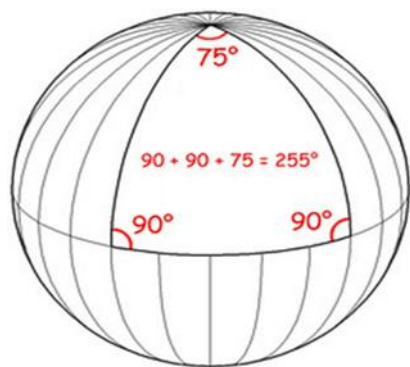
Triangolo sferico

Si definisce triangolo sferico la superficie sulla sfera limitata da tre archi di circolo massimo passanti per tre punti detti **vertici**; tali punti non devono appartenere allo stesso circolo massimo e gli archi non devono avere alcun punto d'intersezione al di fuori dei vertici.

Lati del triangolo sferico

Sono le **lunghezze degli archi AB, BC, CA** che limitano la superficie. Tali lati sono minori o uguali a 180.

Angoli del triangolo sferico



Sono gli angoli formati dai tre archi di circolo massimo. La somma degli angoli (interni) è maggiore di 2 angoli retti e minore di 6 angoli retti

$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$$

Pertanto, la somma degli angoli è 180° solo quando il triangolo è **degenere**, ovvero quando i vertici del triangolo sono situati sullo stesso circolo massimo.

La differenza fra la somma dei tre angoli di un triangolo sferico e l'angolo piatto, si dice **eccesso sferico**:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$$

Nel triangolo sferico sussistono relazioni fra le funzioni trigonometriche dei lati e degli angoli: tali relazioni sono date dai **teoremi di Eulero** (teorema del coseno per i triangoli sferici ■ e teoremi dei seni ■), da cui derivano **due gruppi fondamentali di relazioni** che prendono il nome di **primo e secondo gruppo di Gauss** di cui ci occuperemo nella trattazione del triangolo di posizione astronomico. L'applicazione dei triangoli sferici assume particolare importanza in astronomia in quanto, come abbiamo visto nei sistemi di riferimento, sulla sfera celeste si misurano solo distanze angolari.

Triangolo di posizione astronomico

Vertici del triangolo

Il triangolo astronomico o di posizione ha i vertici **nell'astro**, nello **zenit** e nel **polo celeste nord**; il terzo vertice potrebbe essere anche l'altro polo, ma per convenzione è preferibile usare quello nord in quanto semplifica le regole algebriche per il calcolo delle lunghezze dei lati.

Lati del triangolo

I lati del triangolo hanno lunghezze comprese fra 0° e 180° definite come segue:

- **Distanza polare $p = 90^\circ - \delta$**

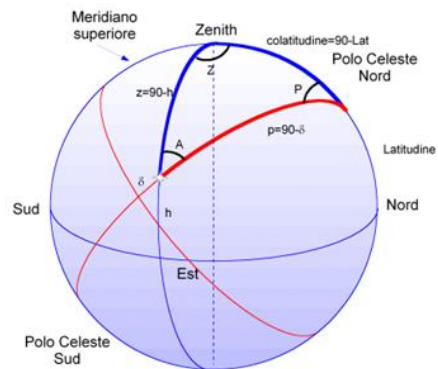
La distanza che l'astro ha dal polo di riferimento (polo celeste nord, per convenzione). Considerando la declinazione δ positiva se a Nord e negativa se Sud; la distanza polare è $p < 90^\circ$ nel primo caso e $p > 90^\circ$ nel secondo.

- **Colatitudine $c = 90^\circ - \varphi$**

Coincide con la colatitudine, ossia il complemento della latitudine. Si ricorda che l'elevazione dell'asse polare è esattamente pari alla latitudine del luogo. La precedente convenzione per la declinazione può essere adottata anche per la latitudine per cui si ha $c < 90^\circ$ per latitudini nord e $c > 90^\circ$ per quelle a sud.

- **Distanza zenitale $z = 90^\circ - h$**

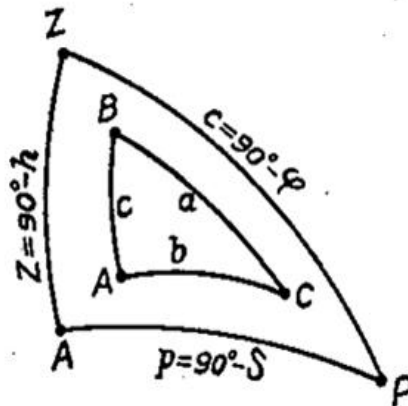
Coincide con la distanza zenitale z , ossia la distanza che l'astro ha dallo zenit. Tale distanza è il complemento dell'altezza h ($z = 90^\circ - h$). Se l'astro è nell'emisfero visibile si ha $h > 0^\circ$ e $z < 90^\circ$, per astri nell'emisfero invisibile si ha $h < 0^\circ$ e $z > 90^\circ$.



I tre angoli sono:

- 1) **Angolo vertice nello Zenith**, compreso tra meridiano e cerchio verticale; la sua ampiezza dovrebbe corrispondere all'azimuth, ma in questo caso, poiché l'ampiezza degli angoli nei triangoli sferici è sempre inferiore a 180° , prende nome di Angolo azimutale **Z**.
- 2) **Angolo vertice nel Polo Celeste**, compreso tra meridiano e cerchio orario; la sua ampiezza corrisponderebbe all'angolo orario, ma in questo caso, poiché l'ampiezza degli angoli nei triangoli sferici è sempre inferiore a 180° , prende nome di Angolo al Polo **P**.
- 3) **Angolo con vertice nell'oggetto A**

211



Per un lato:

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(A)$$

$$\frac{\sin(a)}{\sin(A)} = \frac{\sin(b)}{\sin(B)} = \frac{\sin(c)}{\sin(C)}$$

Attraverso le seguenti relazioni note come **primo e secondo gruppo di Gauss** è possibile risolvere il triangolo astronomico.

Formule del Primo gruppo di Gauss

$$\begin{cases} \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \\ \cos h \cos A = \cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos H \\ \cos h \sin A = \cos \delta \sin H \end{cases}$$

Formule del Secondo gruppo di Gauss

$$\begin{cases} \sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A \\ \cos \delta \cos H = \sinh \cos \varphi + \cosh \sin \varphi \cos A \\ \cos \delta \sin H = \cosh \sin A \end{cases}$$

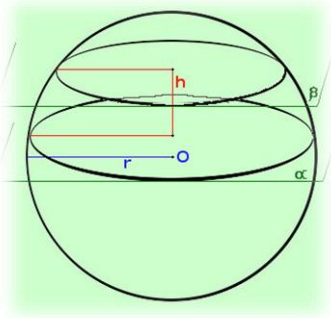
Notiamo che nel triangolo di posizione sono contemporaneamente presenti, per l'oggetto celeste osservato, le sue coordinate altazimutali (azimuth o angolo zenitale e altezza o distanza zenitale) e quelle equatoriali orarie (angolo orario o angolo al polo e declinazione o distanza polare). Queste formule ci consentono il passaggio da coordinate altazimutali ad equatoriali orarie e viceversa.

Queste ci consentono il passaggio da un sistema altazimutale ad equatoriale

$$\begin{cases} \sin \delta = \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A \\ \cos \delta \cos H = \cos \varphi \cos z + \sin \varphi \sin z \cos A \\ \cos \delta \sin H = \sin z \sin A \end{cases}$$

Area della superficie della zona sferica

Anche qui la formula è molto semplice: è la stessa che vale per la calotta sferica



$$A_{zona\,sferica} = 2 \pi r h$$

Da notare anche qua che **nella formula compare solamente il raggio r della sfera e non intervengono i raggi r_1 ed r_2 delle circonferenze di base della zona sferica.**

213

Questa formula è facile da dimostrare se consideriamo valida la formula della calotta: pensiamo alla zona sferica come differenza fra due calotte sferiche; allora basta fare la differenza fra le superfici delle calotte di base r_1 e r_2 ;

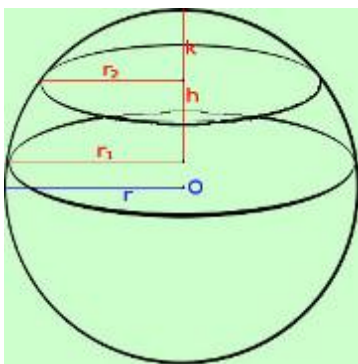
Chiamato k il segmento prolungamento da h fino alla superficie sferica avremo:

$$\text{Area calotta con base raggio } r_1 = 2 \pi r (h+k)$$

$$\text{Area calotta con base raggio } r_2 = 2 \pi r k$$

Facciamo la differenza:

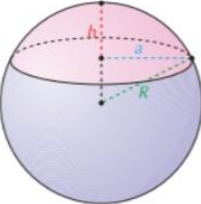
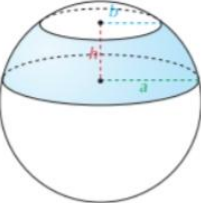
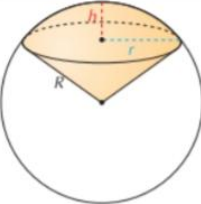
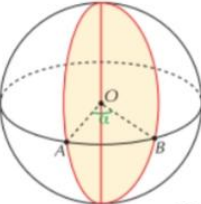
$$\begin{aligned} \text{Area zona sferica} &= 2 \pi r (h + k) - 2 \pi r k = \\ &= 2 \pi r h + 2 \pi r k - 2 \pi r k = 2 \pi r h \end{aligned}$$



Come volevamo dimostrare!!

Le parti della sfera

Riportiamo in una tabella le caratteristiche delle parti in cui rimane divisa una superficie sferica e una sfera di raggio R quando vengono sezionate con opportuni piani, indicando anche le formule per il calcolo delle corrispondenti superfici e volumi:

CARATTERISTICHE	RAPPRESENTAZIONE GRAFICA	SUPERFICIE	VOLUME
Calotta sferica: ciascuna delle due parti in cui un piano divide la superficie sferica Segmento sferico a una base: ciascuna delle due parti in cui un piano divide una sfera		$S = 2\pi Rh$	$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$
Zona sferica: parte della superficie sferica delimitata da due piani paralleli Segmento sferico a due basi: parte della sfera delimitata da due piani paralleli		$S = 2\pi Rh$	$V = \frac{1}{2}\pi h(a^2 + b^2) + \frac{1}{6}\pi h^3$
Settore sferico: parte di sfera generata dalla rotazione di un settore circolare attorno al suo asse di simmetria		$S = \pi R(2h + r)$	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$
Fuso sferico: parte della superficie sferica delimitata da due semipiani uscenti da un diametro Spicchio sferico: parte della sfera delimitata dagli stessi due piani		$S = 2R^2\alpha$ con α ampiezza in radianti del diedro formato dai due piani	$V = \frac{2}{3}R^3\alpha$ α in radianti

FONTE: ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Esercizi

Calcolo dell'altezza di un oggetto alla culminazione superiore e inferiore

Già conosciamo le formule che ci permettono di determinare l'altezza di un astro sull'orizzonte nel caso di culminazione superiore ed inferiore: per semplicità le riportiamo qui di seguito:

215

Culminazione superiore	La stella culmina a sud dello zenit	La stella culmina a nord dello zenit
ALTEZZA	$h = 90^\circ - \phi + \delta$	$h = 90^\circ + \phi - \delta$

Proviamo, attraverso le formule contenute nella parte teorica di trigonometria sferica, a verificare queste relazioni:

Consideriamo la prima equazione del primo gruppo (vd. *Primo Gruppo di Gauss*):

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H$$

Se la stella culmina, vuol dire che essa passa al meridiano (o superiore o inferiore a seconda della culminazione).

CULMINAZIONE SUPERIORE:

Quando la Stella passa al meridiano superiore l'angolo orario H è = 0 il $\cos 0^\circ = 1$, per cui si ha:

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta$$

Questa equazione si risolve facilmente se si applicano le formule di sottrazione del coseno:

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

La nostra equazione può essere scritta:

$$\sin h = \cos (\phi - \delta)$$

L' α della formula di sottrazione è la latitudine e la β la declinazione.
Ma:

$$\sin h = \cos (90^\circ - h)$$

Ed allora:

$$\cos (90^\circ - h) = \cos (\phi - \delta)$$

Questa è una *equazione elementare in coseno* che ha per soluzioni:

$$90^\circ - h = \pm (\phi - \delta)$$

$$90^\circ - h = + (\phi - \delta)$$

$$h = 90^\circ - \phi + \delta$$

$$90^\circ - h = - (\phi - \delta)$$

$$h = 90^\circ + \phi - \delta$$

(Le relazioni sono due perché ognuna vale per un emisfero)

CULMINAZIONE INFERIORE:

Anche qui sappiamo che:

$$h = \phi + \delta - 90^\circ$$

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H$$

Alla culminazione inferiore l'angolo orario è 12^h quindi 180° :

$$\cos 180^\circ = -1$$

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta - \cos \phi \cos \delta$$

Non possiamo applicare come prima a formula di addizione del coseno! E quindi la riscriviamo:

$$\sin h = -(-\sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta)$$

Ricordando che:

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Ed essendo:

$$\sin h = \cos(90^\circ - h)$$

Possiamo scrivere:

$$\cos(90^\circ - h) = -\cos(\phi + \delta)$$

Essendo:

$$\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$$

Allora:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(180^\circ - \phi - \delta)$$

$$90^\circ - h = 180^\circ - \phi - \delta$$

$$h = \phi + \delta - 90^\circ$$

N.B.: Essendo il coseno di due angoli dello stesso valore assoluto ma di segno opposto uguale, come fatto sopra anche la soluzione col segno negativo va presa: quindi si ottengono anche qui due formule, che, come sopra, si riferiscono ciascuna a un emisfero.

Calcolare l'espressione che consente di determinare il sorgere e il tramontare di un astro

Successivamente, determinare la differenza delle ore di luce ai solstizi a Reggio Calabria – Latitudine $\varphi=38^{\circ}6'$ Nord.

Per rispondere alla prima domanda dobbiamo determinare l'angolo orario: applichiamo il (vd. teoria) Primo Gruppo di Gauss:

218

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos H \cos \delta$$

Isoliamo il $\cos H$. Si trova:

$$\cos H = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

E scriviamo ancora:

$$\cos H = \frac{\sin h}{\cos \varphi \cos \delta} - \frac{\sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

Ed ancora:

$$\cos H = \frac{\sin h}{\cos \varphi \cos \delta} - \tan \varphi \tan \delta$$

Essendo $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$.

Al momento del sorgere dell'astro $h=0$, quindi:

$$\cos H = - \tan \varphi \tan \delta$$

Poiché $\sin 0^{\circ}=0$

Se è nota l'ascensione retta possiamo calcolare il tempo siderale:

$$T_s = H + \alpha \text{ con } H = \cos^{-1} \left(\frac{\sin h}{\cos \varphi \cos \delta} - \tan \varphi \tan \delta \right)$$

Se conosciamo il valore del tempo siderale in una determinata ora di un determinato giorno, possiamo anche trovare l'istante di tempo che segna il nostro orologio per il sorgere del Sole (per questi calcoli si vedano i problemi precedenti sul tempo):

$$c = H + \alpha$$

Una volta trovata l'espressione dell'angolo orario, la seconda domanda si risolve facilmente tenendo conto che l'angolo orario adesso è $\frac{H}{2}$.

219

$$\cos \frac{H}{2} = -\tan \varphi * \tan \delta$$

Il Sole ai solstizi ha una declinazione $\delta = +23^{\circ}27'$ (21 giugno, solstizio d'estate) e $\delta = -23^{\circ}27'$ (21 dicembre, solstizio d'inverno).

Si trova che:

$$\cos \frac{H}{2} = -0.784 * 0.433 = -0.34$$

Perciò:

$$H = 2 \cos^{-1}(-0.34) = 219^{\circ}46' = 14 \text{ ore } 39 \text{ minuti}$$

(dì più lungo dell'anno)

Mentre il 21 dicembre:

$$\cos \frac{H}{2} = (-0.784) * (-0.433) = 0.34$$

dal quale si ricava che:

$$H = \cos^{-1}(0.34) = 140^{\circ}15' = 9 \text{ ore } 21 \text{ minuti}$$

(dì più corto dell'anno)

La differenza di ore è $\Delta H = 14h \ 39m - 9h \ 21m = 5 \text{ ore } 18 \text{ minuti}$ tra inverno ed estate.

Calcolare l'altezza, l'ora e l'azimut

In un certo giorno, in cui è in vigore l'ora legale, in una città, posta alla longitudine di $\lambda = 10^\circ 52' 59''$ E, e latitudine $\varphi = 44^\circ 38' 45''$ N il Sole ha una declinazione $\delta_\odot = 10^\circ 59' 04''$. Considerando trascurabile la declinazione del Sole durante l'arco della giornata,

Calcolare:

1. *l'altezza massima raggiunta dal Sole in quella località e l'ora del transito in meridiano;*
2. *l'ora in cui, in tale giorno, il sole sorge e tramonta in quella Città e l'arco diurno;*
3. *l'azimut del sole nei momenti in cui sorge e tramonta.*

Il Sole raggiunge la massima altezza h_C sull'orizzonte (culmina) quando transita per il meridiano locale dell'osservatore. Nel caso specifico avremo:

$$\begin{aligned} h_C &= 90^\circ - (\varphi - \delta_\odot) = 90^\circ - \varphi + \delta_\odot = \\ &= 90^\circ - 44^\circ.64583333 + 10^\circ.98444444 = 56^\circ.33861111 \end{aligned}$$

L'altezza massima del Sole, nel momento in cui transita al meridiano è:

$$h_C = 56^\circ.33861111 = 56^\circ 20' 19''$$

Indichiamo adesso con λ la longitudine espressa in ore e con ΔT la differenza in ore del meridiano locale rispetto a GMT. Nel nostro caso essendo in vigore l'ora legale, sarà $\Delta T = 2^h$. Le 12^h locali corrispondono dunque a:

$$UT = 12h - \lambda$$

Per cui, l'ora locale del transito in meridiano del sole sarà (scrivendo la longitudine in notazione decimale):

$$\begin{aligned} T_C &= 12h - \lambda + \Delta T = 12^h - \frac{10^\circ.8830555556}{15^\circ} + 2^h = \\ &= 2h - 0.725537036h + 2h = 13.27446296 h \end{aligned}$$

Il Sole culmina alle ore locali:

$$T_C = 13h\ 16m\ 28s.1$$

I due eventi del sorgere e tramontare si verificano quando il sole interseca l'orizzonte celeste dell'osservatore, e quindi la sua altezza h è nulla. In questo caso, è possibile determinare i tempi (gli angoli orari H_S e H_T) e le direzioni (l'azimut A_S e A_T) delle due posizioni del sole sull'orizzonte e l'arco diurno:

$$\Delta T = H_T - H_S$$

221

Che ci dà la durata della permanenza del Sole.

Applichiamo le formule del Primo Gruppo di Gauss al triangolo sferico precedentemente definito rispetto al lato “zenit – sole” ed all'angolo al vertice con lo *zenit*.

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H$$

$$\cos h \sin A = -\cos \delta \sin H$$

$$\cos h \cos A = \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos H$$

Quando il sole sorge e/o tramonta, si ha $h = 0$ e quindi $\sin h = 0$.

Dalla prima relazione precedentemente scritta segue dunque:

$$\cos H = -\tan \varphi \tan \delta_\odot$$

Dai dati del problema si ha:

$$\varphi = 44^\circ 38' 45'' N = 44.64583333$$

$$\delta_\odot = 10^\circ 59' 04''.1 = 10.98444444$$

Segue:

$$\begin{aligned} \cos H &= -\tan(44.64583333) \tan(10.98444444) = \\ &= -0.191713689 \end{aligned}$$

$$H = \cos^{-1} (-0.191713689) = 101^\circ.0528101 = \pm 6h.736854006$$

L'angolo orario H è negativo al sorgere perché deve arrivare in meridiano, e positivo al tramonto perché ha superato il meridiano. Sarà dunque:

$$H_S = -6.736854006 h$$

$$H_T = 6.736854006 h$$

222

Il Sole sorgerà dunque alle ore:

$$\begin{aligned} T_S &= T_C + H_S = 13.27446296 h - 6.736854006 h = \\ &= 6.537608954 h = 6h 32m 15s.4 \end{aligned}$$

Lo stesso giorno il Sole tramonterà alle ore:

$$\begin{aligned} T_T &= T_C + H_T = 13.27446296 h + 6.736854006 h = \\ &= 20.01131697 h = 20h 00m 40s.7 \end{aligned}$$

L'intervallo temporale durante il quale il sole resterà sopra l'orizzonte sarà:

$$\begin{aligned} \Delta T &= H_T - H_S = 6.736854006 h + 6.736854006 h = \\ &= 13.47370802 h = 13h 28m 25s.4 \end{aligned}$$

Per ricavare l'*azimut* del Sole nei momenti in cui sorge e tramonta, utilizziamo la 3^a delle formule di Gauss:

$$\cos h \sin A = -\cos \delta \sin H$$

Nel momento in cui il sole sorge e tramonta si ha $h = 0$ e quindi $\cos h = 1$, per cui si ha, rispetto al punto Nord:

$$\begin{aligned} \sin A_S &= -\cos \delta_\odot \sin H_S = \\ &= -\cos(10^\circ.98444444) \sin(-6.736854006 h * 15) = \\ &= 0.963469686 \end{aligned}$$

$$A_S = \sin^{-1} (0.963469686) = 74^\circ.46556891 = 74^\circ 27' 56''.1$$

$$\begin{aligned} \sin A_T &= -\cos \delta_{\odot} \sin H_T = \\ &= -\cos(10^\circ.98444444) \sin(6.736854006 \text{ h} * 15) = \\ &= -0.963469686 \end{aligned}$$

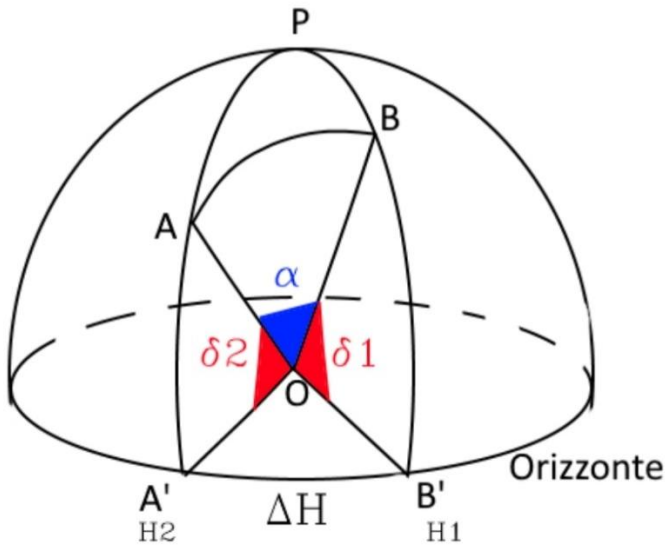
$$\begin{aligned} A_T &= \sin^{-1} (-0.963469686) = -74^\circ.46556891 = \\ &= (360^\circ - 74^\circ.46556891) = 285^\circ.5344311 = 285^\circ 32' 4'' \end{aligned}$$

DISTANZA tra DUE STELLE

Regolo ha coordinate $H = 27^m 4s$ e declinazione $11^\circ 52' 5''$. Denebola ha coordinate $H = 22^h 46^m 36s$ e declinazione $14^\circ 27' 33''$. Si determini la loro distanza angolare.

Per calcolare la loro distanza consideriamo il triangolo sferico BPA. Dalla figura si evince che:

224



$$PB = 90^\circ - \delta_1$$

$$PA = 90^\circ - \delta_2$$

L'angolo al polo:

$$P = H_2 - H_1$$

Applichiamo il teorema del coseno o di Eulero:

$$\cos AB = \cos PB \cos PA + \sin PB \sin PA \cos P$$

Sostituendo:

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ - \delta_1) \cos(90^\circ - \delta_2) + \sin(90^\circ - \delta_1) \sin(90^\circ - \delta_2) \cos P$$

$$\cos \alpha = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos (H_2 - H_1)$$

E svolgendo i calcoli:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \sin(11.8681)\sin(14.4592) + \\ &+ \cos(11.8681)\cos(14.4592)\cos(25.1167) = 0.904\end{aligned}$$

$$\alpha = 24.58$$

FORMULARIO

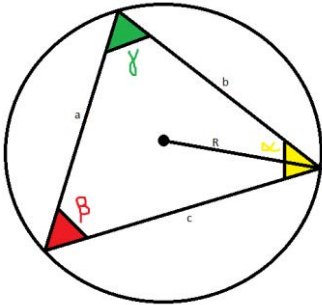


NOTA BENE:

La presente sezione è concepita per aiutare il ripasso finale prima della gara. **Non devono essere usate per sostituire lo studio più approfondito degli argomenti!**

227

ASTRONOMIA SFERICA



TEOREMA dei SENI

(TRIANGOLI PIANI)

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

In un triangolo qualsiasi, il rapporto tra un lato qualsiasi e il seno dell'angolo opposto a tale lato si mantiene costante, ed è, in particolare, uguale al doppio del raggio della circonferenza circoscritta al triangolo.

TEOREMA del COSENO o teorema di CARNOT

(TRIANGOLI PIANI)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

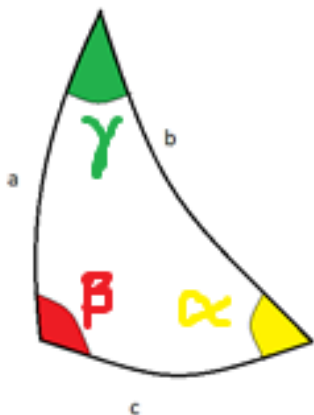
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

In un triangolo qualsiasi, il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto di tali due lati e del coseno dell'angolo fra essi compreso.

TEOREMA dei SENI

(TRIANGOLI SFERICI)



$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

Un triangolo sferico è la parte di superficie sferica delimitata da tre archi di cerchi massimi che si intersecano. I lati di tali triangoli non sono identificati per la loro lunghezza lineare, ma tramite l'angolo sotteso da essi rispetto al centro della sfera.

Il rapporto del seno di un lato qualsiasi di tale triangolo e il seno dell'angolo opposto a tale lato si mantiene costante per ogni lato scelto.

TEOREMA del COSENO

(TRIANGOLI SFERICI)

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

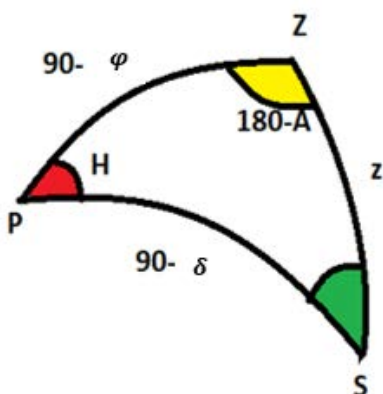
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

In un triangolo sferico, il coseno di un lato è uguale al prodotto dei coseni degli altri due più il prodotto dei seni degli altri due e del coseno dell'angolo opposto al primo lato.

229

TRIANGOLO PARALLATTICO



Per triangolo parallattico s'intende il triangolo sferico sulla volta celeste formato dallo zenit Z, dal polo celeste P e da una data stella S.

$$ZP = 90^\circ - \varphi$$

$$PS = 90^\circ - \delta$$

$$ZS = z$$

$$ZPS = H$$

($H = \text{angolo orario}$)

$$SZP = 180^\circ - A$$

($A = \text{azimut}$)

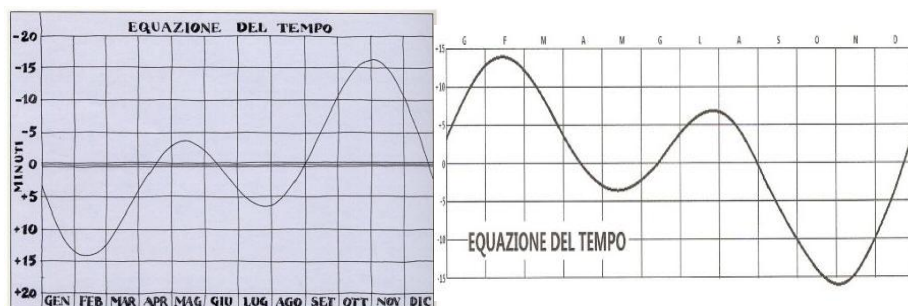
Attraverso i teoremi sui triangoli sferici, grazie alla costruzione del triangolo parallattico è possibile trasformare le coordinate altazimutali in coordinate equatoriali orarie/celesti.

EQUAZIONE DEL TEMPO

$$ET = T_v - T_M \quad \text{oppure} \quad ET = T_m - T_v$$

(T_m tempo solare medio, T_v tempo solare vero)

Il Sole vero (l'astro diurno), a causa della variabilità della velocità di rivoluzione terrestre, non si muove sull'Eclittica in maniera uniforme. Il Sole medio invece si muove sull'Equatore celeste in maniera uniforme. Ciò comporta uno sfasamento tra tempo vero e tempo medio, indicato dall'equazione del tempo. (L'impiego di una delle due formule dipende dai grafici forniti dall'almanacco o dal problema).



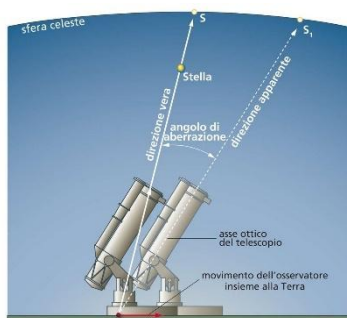
PRECESSIONE DEGLI EQUINOZI

$$T_{PREC} \approx 26\,000 \text{ anni}$$



Per l'effetto gravitazionale combinato del Sole e della Luna sulla Terra, l'asse terrestre compie un moto millenario che osservato dal Polo eclitticale Nord appare svolgersi in senso orario, facendo sì che l'asse descriva un doppio cono. In conseguenza di ciò, il punto vernale si muove sull'Equatore celeste in senso orario con periodo indicato. Ciò comporta l'anticipo progressivo degli Equinozi, muovendosi il punto vernale incontro al Sole vero.

ABERRAZIONE della LUCE



$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{v_{\text{perp}}}{c}$$

α = aberrazione

v_{perp} = componente della velocità
terrestre perpendicolare
alla luce incidente

231

Quando i raggi di luce di una stella cadono sulla Terra, la loro direzione di provenienza appare lievemente deviata a causa del fatto che il Pianeta ha una sua velocità orbitale v . I due vettori velocità si combinano per dare un vettore risultante di poco inclinato rispetto alla direzione originale dei raggi. La deviazione ha periodicità annuale e semi-ampiezza di $20.5''$.

RIFRAZIONE ATMOSFERICA

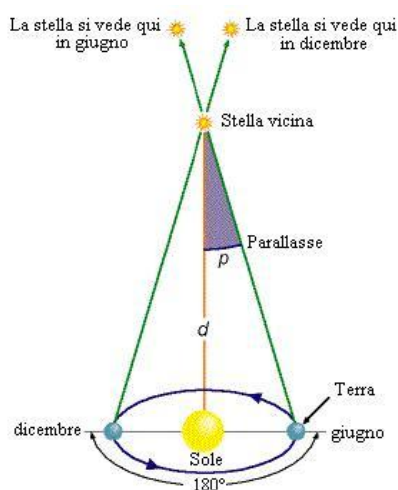
all'orizzonte: $\Delta h \approx 35'$

per $0 \leq z \leq 70^\circ$: $\Delta h \approx 58,2'' \tan z$

La rifrazione della luce proveniente da un astro dovuta alla presenza dell'atmosfera terrestre determina un aumento pari a Δh dell'altezza dell'astro, tanto maggiore quanto minore è l'altezza dell'astro. Fino a distanze zenitali ($z = 90^\circ - h$) di 70° è possibile adoperare la seconda relazione. Oltre tale valore la rifrazione cresce in maniera piuttosto irregolare, per raggiungere un valore di $35'$ in prossimità dell'orizzonte.

PARALLASSE ANNUA

$$\pi(") = \frac{1}{d(pc)}$$



A causa del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole, una stella abbastanza vicina è affetta da uno spostamento angolare apparente sulla volta celeste, che raggiunge il suo massimo dopo sei mesi. π è l'angolo di parallasse, d la distanza della stella dalla Terra. Se non si usano costanti di proporzionalità, l'angolo π va espresso in arcosecondi mentre d va espressa in parsec.

Tale relazione è usata in astronomia per la misura delle distanze di stelle vicine (generalmente entro 100 pc).

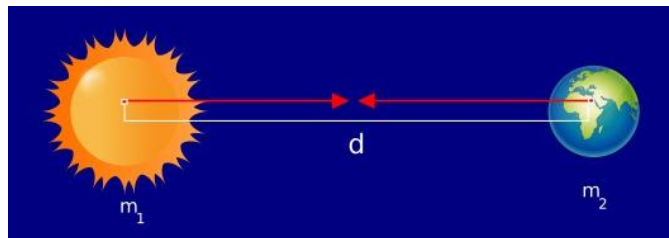
MECCANICA CELESTE

LEGGE di GRAVITAZIONE UNIVERSALE

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

Questa relazione esprime il modulo della forza gravitazionale che si esercita tra due masse m_1 e m_2 puntiformi poste alla distanza reciproca d . La relazione si mantiene uguale se le due masse hanno simmetria e distribuzione di densità sferica. In quest'ultimo caso la distanza d è la distanza tra i due centri delle sfere. G è una costante universale e vale circa $6.674 * 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$

La forza che il corpo 1 esercita sul corpo 2 è diretta lungo la congiungente 1-2 e ha verso rivolto verso il corpo 1. È



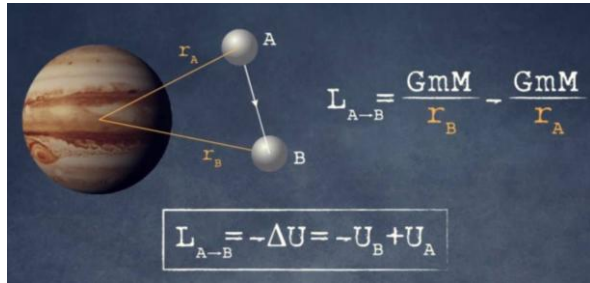
uguale e opposta alla forza che il corpo 2 esercita sul corpo 1 (forza attrattiva).

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

$$U = - \frac{Gm_1 m_2}{d}$$

L'energia potenziale gravitazionale di un corpo di massa m_1 che si trova nel campo gravitazionale generato da un corpo di massa m_2 a distanza d da esso esprime il lavoro che compirebbe la forza di gravitazione se il corpo di massa m_1 venisse allontanato dal corpo di massa m_1

indefinitamente. Dunque, essa è nulla a distanza infinita. Il segno negativo deriva dalla proprietà della forza gravitazionale di essere attrattiva, che le conferisce la tendenza a creare sistemi legati (vedi il Sistema Solare).

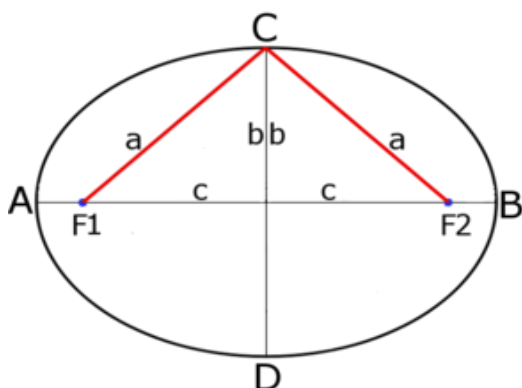


ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

$$E = K + U = - \frac{Gm_1 m_2}{2a}$$

La lettera a nella relazione scritta sopra rappresenta il semiasse maggiore dell'orbita ellittica. L'energia su orbita ellittica è negativa perché il sistema è legato (vedi relazione più avanti).

ORBITE ELLITTICHE



$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$c^2 + b^2 = a^2$$

$$d_a = a(1 + e)$$

$$d_p = a(1 - e)$$

$$e = \frac{d_a - d_p}{d_a + d_p}$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$S = \pi ab$$

e = eccentricità

a = semiasse maggiore

b = semiasse minore

c = semidistanza focale

d_a = distanza all'afelio

d_p = distanza al perielio

F_1, F_2 = fuochi

P = punto generico sull'ellisse

S = superficie dell'ellisse

SECONDA E TERZA LEGGE DI KEPLERO

2^a legge:

$$v_a d_a = v_p d_p$$

3^a legge:

$$\frac{T^2}{a^3} = k = \frac{4\pi^2}{G(M + m)}$$

$$\text{se } M \gg m \text{ allora } k \approx \frac{4\pi^2}{GM}$$

Un sistema formato da due corpi sottoposti esclusivamente alla mutua attrazione gravitazionale è un sistema isolato: in questo sistema si conserva il momento angolare rispetto a un polo qualsiasi. La seconda legge di Keplero è una conseguenza di questa conservazione. *Il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali.*

La terza legge di Keplero afferma che *i quadrati dei periodi orbitali sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori per ciascun pianeta che orbita attorno alla medesima stella.* In realtà questa è una legge approssimata che vale solo se le masse dei pianeti sono molto più piccole della massa dell'oggetto centrale. Altrimenti a seconda del pianeta preso in considerazione k cambia.

Nelle formule:

T = periodo orbitale

v_p = velocità al perielio

a = semiasse maggiore

d_p = distanza al perielio

v_a = velocità all'afelio

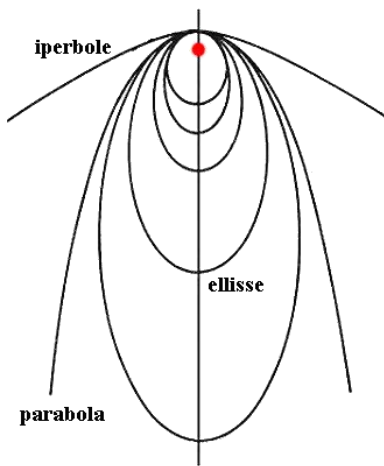
M = massa oggetto centrale

d_a = distanza all'afelio

m = massa pianeta

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA (!!!) E RELAZIONE ORBITE – ENERGIA

$$E = K + U = \text{costante}$$



$E < 0 \leftrightarrow$ orbite ellittiche

$E = 0 \leftrightarrow$ orbite paraboliche

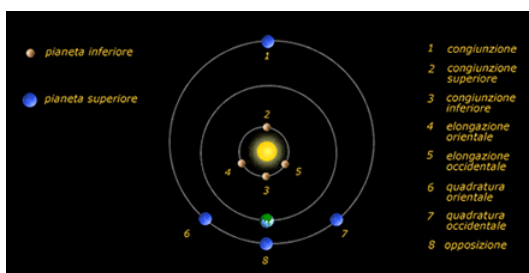
$E > 0 \leftrightarrow$ orbite iperboliche

Il campo gravitazionale è conservativo, dunque l'energia meccanica di un corpo sottoposto esclusivamente alla forza di gravità si conserva. La forma delle orbite per un sistema a due corpi dipende dal valore dell'energia meccanica; le orbite sono curve coniche.

PERIODO SINODICO

$$\frac{1}{S} = \left| \frac{1}{P} - \frac{1}{T} \right|$$

Il periodo sinodico S è l'intervallo di tempo tra due congiunzioni consecutive di un pianeta con il Sole quando osservato da un altro pianeta. P è il periodo siderale del pianeta, mentre T è il periodo siderale del pianeta da cui si osserva la congiunzione.



Se il pianeta osservato è esterno:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{P}$$

Se invece è interno:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{T}$$

VELOCITA' ORBITALI

$$v_{circ} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$v_{parab} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad v_{ellittica} = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Dall'ultima relazione:

$$v_{perielio} = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)}$$

$$v_{afelio} = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)}$$

v_{circ} = velocità su orbita circolare

a = distanza r dal centro attrattore

v_{parab} = v . su orbita parabolica

e = eccentricità

$v_{ellittica}$ = velocità su orbita ellittica di semiasse a

Le presenti velocità sono ricavate dalla legge di conservazione dell'energia meccanica

TELESCOPI

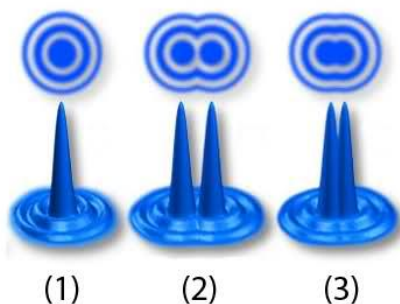
240

POTERE RISOLUTIVO

$$\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Il potere risolutivo è la minima distanza angolare tra due sorgenti di luce che possono essere viste separate (criterio di Rayleigh). Nella determinazione del potere risolutivo interviene l'apertura dello strumento e non l'ingrandimento e il risultato della formula riportata è in radianti. Nella formula:

Disco di Airy



λ =lunghezza d'onda osservata

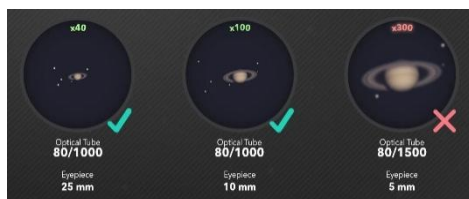
D =diametro dell'obiettivo

INGRANDIMENTO DI UN TELESCOPIO

$$I = \frac{F}{f}$$

Dove F =focale dell'obiettivo e f =focale dell'oculare

L'ingrandimento è una grandezza adimensionale (rapporto di due grandezze che in questo caso hanno le dimensioni di una lunghezza) che quantifica la capacità di un sistema ottico di far apparire di dimensioni maggiori un certo oggetto lontano.



ASTROFISICA STELLARE

LEGGE DI STEFAN-BOLTZMANN

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

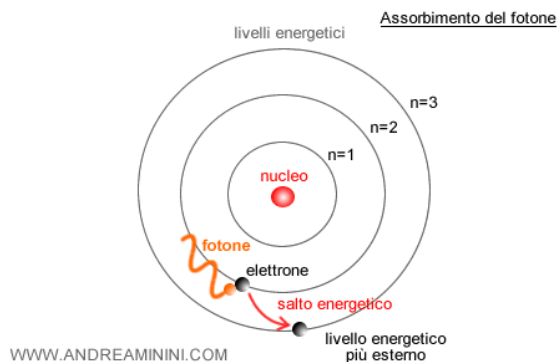
L'energia erogata per unità di superficie e tempo è proporzionale alla quarta potenza della temperatura (*legge di Stefan-Boltzman*). Per una stella (approssimata sferica e considerata un corpo nero per poter applicare questa formula), è possibile calcolare la sua luminosità moltiplicando la sua superficie per la costante di Stefan e la sua temperatura alla quarta. La costante vale $\sigma = 5.67 * 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

241

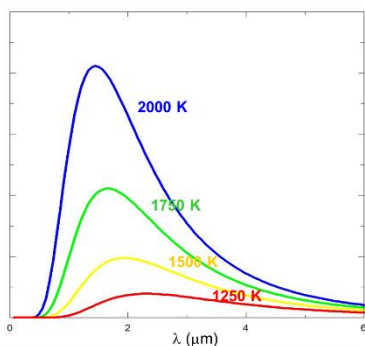
LEGGE DI PLANCK

$$E = h\nu$$

La legge di Planck lega l'energia del fotone alla sua frequenza. Infatti, la radiazione elettromagnetica può essere immaginata come un insieme di "pacchetti di energia" a cui si dà il nome di fotoni. Grazie ad essi, può eccitare un elettrone in un atomo cedendo ad esso la sua energia. In formula ν indica la frequenza del fotone e h è la costante di Planck che vale $h = 6.63 * 10^{-34} \text{ J} * \text{s}$



LEGGE DELLO SPOSTAMENTO DI WIEN



$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

La lunghezza d'onda massima di uno spettro di corpo nero è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta

La costante b (costante di Wien) vale circa $2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

FORMULA DI POGSON

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \left(\frac{F_1}{F_2} \right)$$

$$m - M = 5 \log d - 5$$

Dove:

$m_{1;2}$ = *magnitudine apparente*

M = *magnitudine assoluta*

m = *magnitudine apparente*

d = *distanza della stella*

$F_{1;2}$ = *flusso delle stelle*

CLASSIFICAZIONE SPETTRALE (1)

La prima classificazione stellare in assoluto fu eseguita nel 1868 da *Padre Secchi*, direttore dell'osservatorio del Collegio Romano, che raggruppò le stelle in 4 classi:

- Bianche e rosse
- Bianco-azzurre
- Gialle
- Arancioni e rosse

Questa catalogazione fu poi trovata imprecisa e venne rifatta da un team di donne a capo del quale vi era *Wilhelmina Fleming*. Le stelle vennero classificate in 7 classi in base al loro spettro e alla loro temperatura superficiale. Le 7 classi sono indicate con le lettere:

O B A F G K M

E sono divise in sottoclassi, contrassegnate da un numero posto a fianco alla lettera

Per ricordare le lettere è stata inventata la seguente filastrocca:

Oh Be A Fine Girl and Kiss Me

Ultimamente sono state inserite le classi R, N ed S (che possono essere ricordate con l'aggiunta delle parole **Right Now Smack** alla filastrocca precedente)

CLASSIFICAZIONE SPETTRALE (2)

Il secondo metodo per classificare le stelle (che venne chiamato classificazione MK) è in base alla loro luminosità. Con questo metodo si capì che la luminosità di una stella dipende dalla sua temperatura superficiale e dalla sua dimensione. Le classi di luminosità sono:

0	Ipergiganti
I	Supergiganti
II	Giganti luminose
III	Giganti normali
IV	Subgiganti
V	Stelle di sequenza principale
VI	Subnane
VII	Nane bianche

Il Sole è una stella G2V. L'indicazione della temperatura è affidata ai primi due caratteri (G2), mentre l'altro parametro riguarda le dimensioni (V).

“LIMITI STELLARI”

Limite di Chandrasekhar: $M = 1.4M_{\text{sole}}$

Limite TOV: $1.5 - 3 M_{\text{Sole}}$

Il limite di Chandrasekhar, o massa di Chandrasekhar, è il limite superiore che può raggiungere la massa di una nana bianca (altrimenti sarebbe una stella di neutroni). Il limite TOV (dalle iniziali dei fisici *Tolman-Oppenheimer-Volkoff*) indica il “confine” tra una stella di neutroni e un buco nero.

RAGGIO DI SCHWARZSCHILD

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Il raggio di Schwarzschild è un punto di non ritorno, che prende il nome dall'astrofisico tedesco Karl Schwarzschild. Quando una stella collassa nel caso che le sue dimensioni scendano al di sotto del raggio di Schwarzschild essa diventa un buco nero (cioè un oggetto con una gravità tale da non lasciare sfuggire nemmeno la luce).

245

DATI UTILI del SOLE

Massa: $m_s = 1.99 * 10^{30} kg$

Luminosità: $L_s = 3.85 * 10^{26} W$

Magnitudine assoluta: $M_s = 4.83 mag$

Costante solare: $K = \frac{L_s}{4\pi UA^2} = 1368 \frac{W}{m^2}$

Temperatura: $T_s = 5778 K$

Raggio equatoriale: $R_s = 6.96 * 10^8 m$

Periodo di rotazione: $P_{rot} = 25 giorni$

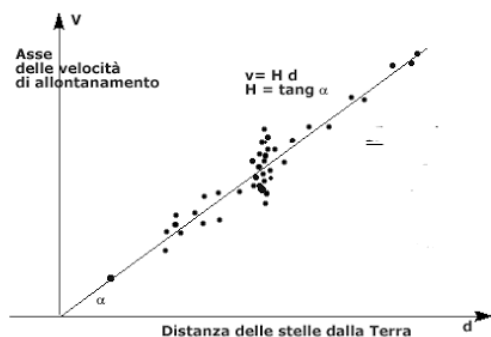
LEGGE di HUBBLE-LEMAITRE

$$v_r = Hd$$

Per z molto piccoli:

$$v_r = cz$$

La legge di Hubble (o legge di Hubble-Lemaître) afferma che esiste una



relazione lineare tra lo spostamento verso il rosso della luce emessa dalle galassie e la loro distanza. Tanto maggiore è la distanza della galassia e tanto maggiore sarà il suo spostamento verso il rosso. Nella formula, v_r è la velocità radiale,

d la distanza, c la velocità della luce e H è la costante di Hubble (il cui valore non è ben definito, ma che assumiamo in questo Bignamino pari a $65.12 \text{ kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$)

PER APPROFONDIRE...

EFFETTO DOPPLER

In generale l'effetto Doppler si verifica ogni qual volta si misura una variazione, rispetto al valore iniziale, della frequenza e della lunghezza d'onda percepita da un osservatore raggiunto da un'onda emessa da una sorgente che si trova in movimento rispetto all'osservatore stesso o viceversa.

247



Bisogna specificare che esiste una radicale differenza tra il fenomeno di cui stiamo parlando relativo alle onde luminose e l'effetto Doppler riferito alle onde acustiche. La differenza è insita nella diversità di tipologie di onde. Le onde acustiche (longitudinali) necessitano di un mezzo per propagarsi. Questo mezzo (l'aria, per esempio) costituisce un sistema di riferimento privilegiato rispetto al quale il mezzo risulta fisso.

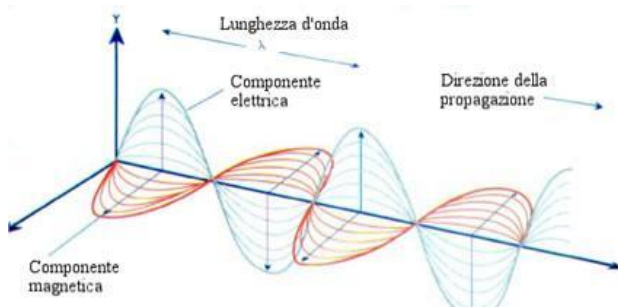
C'è una differenza fisica tra il caso in cui l'osservatore è fermo e la sorgente in moto, e quello in cui la sorgente è a riposo e l'osservatore in moto. Se la sorgente S ed il rilevatore sono in avvicinamento lungo la stessa retta, la frequenza che l'osservatore (il rilevatore) percepisce è data dalla formula:

$$v' = v \frac{1 + \frac{v_r}{v_{\text{onda}}}}{1 - \frac{v_s}{v_{\text{onda}}}}$$

Se il rilevatore e la sorgente si stanno allontanando, la frequenza percepita è data da:

$$v' = v \frac{1 - \frac{v_r}{v_{\text{onda}}}}{1 + \frac{v_s}{v_{\text{onda}}}} \quad (v \text{ è la frequenza propria dell'onda})$$

La luce è un'onda elettromagnetica. Queste sono onde trasversali e non necessitano di un mezzo per propagarsi (caro vecchio etere addio!) ed ancora, mentre per le onde acustiche la velocità di propagazione dell'onda dipende dalla velocità della sorgente, nel caso della luce la velocità dell'onda è sempre la stessa per ogni osservatore inerziale, indipendentemente dal fatto che la sorgente sia ferma o in moto. Non essendo possibile capire se a muoversi sia la sorgente o l'osservatore, si parla di velocità relativa osservatore-sorgente. E nella trattazione relativistica dell'effetto Doppler occorre considerare l'effetto della dilatazione del tempo dovuta al movimento.



Se la sorgente S ed il rilevatore R sono in allontanamento si ha:

$$T_R = T_S \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

Se sono in avvicinamento si ha:

$$T_R = T_S \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Con:

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Poiché la frequenza è data da:

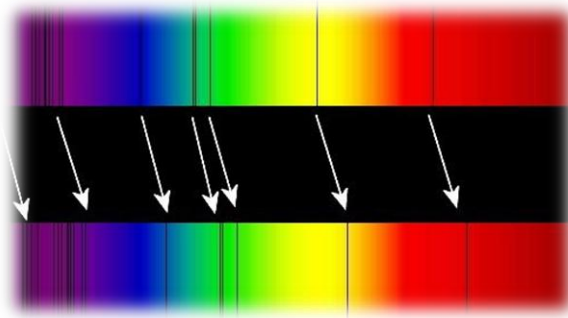
$$v = \frac{1}{T}$$

Invertendo le precedenti formule si ha:

$$\nu_R = \nu_S \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{con S e R in allontanamento}$$

$$\nu_R = \nu_S \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \text{con S e R in avvicinamento}$$

Lo spettro emesso dalle stelle è a righe di assorbimento, e analizzandolo si



può notare che esse si trovano spesso in posizioni diverse rispetto allo spettro di riferimento misurato in laboratorio. Gli estremi dello spettro visibile sono il blu (frequenze maggiori) e il rosso (frequenze minori).

L'effetto Doppler viene chiamato in astronomia "spostamento verso il rosso" se lo spettro appare spostato su lunghezze d'onda maggiori, e "spostamento verso il blu" se spostato su lunghezze d'onda minori.

L'effetto Doppler in astrofisica viene utilizzato per misurare la velocità con cui le stelle e le galassie si stanno avvicinando o allontanando da noi, per misurare la loro velocità di rotazione, per scoprire se una stella che ci appare singola è binaria con componenti molto vicine tra loro. In astronomia l'effetto Doppler si applica anche per calcolare l'espansione cosmologica dell'universo.

SPOSTAMENTO VERSO IL ROSSO (REDSHIFT)

$$z = \frac{\lambda_{osservata} - \lambda_{laboratorio}}{\lambda_{laboratorio}}$$

Nel caso di redshift $z > 0$

250

Se la sorgente si allontana dall'osservatore con velocità v , e questa velocità è molto più piccola della velocità della luce c , allora lo spostamento verso il rosso è approssimativamente:

$$z = \frac{v}{c}$$

Altrimenti bisogna considerare il fattore relativistico:

$$z = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1$$

L'approssimazione del redshift come effetto Doppler è valida solo se $z \ll 1$

REDSHIFT COSMOLOGICO

Il redshift cosmologico è lo spostamento relativo in frequenza di un'onda elettromagnetica dovuto all'espansione dell'universo. Si spiega ipotizzando che le lunghezze d'onda varino allo stesso modo delle distanze per effetto dell'espansione dell'universo. La lunghezza d'onda è proporzionale al fattore di scala dell'universo.

$$z = \frac{Hd}{c}$$

REDSHIFT GRAVITAZIONALE

Un fotone, emesso da una sorgente di campo gravitazionale, perde energia e quindi presenta uno spostamento verso il rosso legato all'intensità del campo misurata nel punto in cui si trova il fotone. L'energia di un fotone che si muove ad una distanza r nel campo gravitazionale di una stella di grande massa avrà una energia uguale alla differenza tra quella iniziale e quella dissipata nel campo gravitazionale.

251

$$E' = E - U(r_{\text{fotone}})$$

$$E' = h\nu'$$

$$E = h\nu$$

$$U(r) = \frac{GMm}{r}$$

Da $E = mc^2$:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

Per cui:

$$U(r_{\text{fotone}}) = \frac{GMh\nu}{rc^2}$$

$$h\nu' = h\nu - \frac{GMh\nu}{rc^2}$$

$$h\nu' = h\nu \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)$$

Da cui:

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)$$

Quando la distanza r dal centro di massa della massa gravitante è sufficientemente grande rispetto al raggio di Schwarzschild:

$$z \text{ (gravitazionale)} = \frac{GM}{rc^2}$$

Più in generale:

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - r_s}} - 1$$

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

TERMODINAMICA ed EFFETTO DOPPLER

La luce emessa dalla fotosfera di una stella, prima di propagarsi nello spazio circostante, deve attraversare l'atmosfera stellare. Questo strato è composto da un gas di atomi e/o molecole, generalmente più freddo della fotosfera, in grado di assorbire specifiche frequenze a seconda della natura della particella.

Gli atomi, oltre che assorbire la radiazione, possono riemetterla. In questo caso non si osserveranno righe di assorbimento ma righe in emissione.

253



Questa agitazione termica comporta dei movimenti in avvicinamento ed allontanamento rispetto all'osservatore e quindi l'effetto Doppler si manifesta anche a livello microscopico in una nube di particelle in agitazione termica. Se il gas si trova in equilibrio termico, la distribuzione delle velocità di queste particelle segue quella di Maxwell-Boltzmann ed il valore più probabile è dato da:

$$u = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$$

Dove: m = massa della particella

Sappiamo che:

$$\lambda_{oss} = \lambda_{lab} \left(1 \pm \frac{v}{c} \right)$$

$$\Delta\lambda = \lambda_{oss} - \lambda_{lab}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_{lab} \left(1 \pm \frac{v}{c} \right) - \lambda_{lab}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_{lab} \left(1 \pm \frac{v}{c} - 1 \right)$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{lab}} = \pm \frac{v}{c}$$

$$\text{se } v \ll c \text{ allora } z \approx \frac{v}{c}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{lab}} = z = \frac{u}{c}$$

$$z = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2KT}{m}}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2KT}{m}}$$

Poiché le particelle si allontanano e si avvicinano, la riga si dilata sia verso lunghezze d'onda a destra che a sinistra. Allora alla formula precedente dobbiamo aggiungere un fattore 2:

$$\Delta\lambda = 2 \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2KT}{m}}$$

Dalla stima della dilatazione della riga si può pervenire alla temperatura.

TERMODINAMICA

255

EQUAZIONE DI STATO (GAS PERFETTO)

$$pV = nRT$$

Dove:

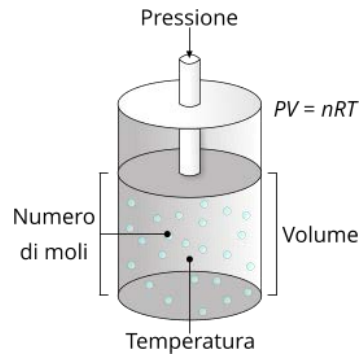
p = pressione

V = volume

n = numero di moli

R = costante

T = temperatura



ENERGIA INTERNA

L'energia interna U di un gas è data dalla somma di tutte le energie cinetiche delle particelle, in un gas perfetto si considera nulla l'energia potenziale e l'energia cinetica è solo energia di traslazione.

$$K_m = \frac{1}{2} m v_{qm}^2$$

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$K_m = \frac{1}{2} m \frac{3RT}{M}$$

$$K_m = \frac{1}{2} m \frac{3RT}{mN_a}$$

$$K_m = \frac{1}{2} \frac{3RT}{N_a}$$

L'energia traslazionale è sempre uguale a:

$$K_m = \frac{3}{2} kT$$

indipendentemente della massa o dalla natura della molecola.

TEOREMA dell'EQUIPARTIZIONE dell'ENERGIA

In base al teorema dell'equipartizione dell'energia, in generale, l'energia cinetica media di una singola molecola di un gas perfetto è data da:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{f}{2} kT$$

Dove f indica il numero di gradi di libertà e k la costante di Boltzmann. Per grado di libertà si intende un modo in cui una molecola può assorbire energia. Una molecola di un gas monoatomico può essere schematizzata come un punto materiale, quindi ha 3 gradi di libertà. Una molecola più complessa ha più gradi di libertà, in quanto possiede altri tipi di energia dovuti alla vibrazione e al movimento di rotazione.

Per una molecola di gas monoatomico:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT$$

Per n moli:

$$U = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} N \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} nRT$$

Per un gas biatomico:

$$U = \frac{5}{2} nRT$$

Una molecola biatomica ha 5 gradi di libertà (3 traslazionali e 2 rotazionali). Ad alte temperature, diventano rilevanti anche i due gradi di libertà vibrazionali di una molecola di tale genere: essi portano il numero complessivo a 7.

All'aumentare del numero di atomi della molecola ($N_{\text{atomi}} \geq 3$, come per esempio CO_2), il numero di gradi di libertà vibrazionali indipendenti aumenta e dipende anche dalla geometria della molecola. Bisognerà di volta in volta considerare tali nuovi termini per determinare correttamente l'energia interna del gas.

APPROFONDIMENTI

Vettori e operazioni tra vettori

Prodotto scalare e vettoriale

259

In Fisica molte grandezze hanno carattere vettoriale, e tali vettori sono tipicamente orientati nello spazio tridimensionale. In tale spazio, stabilito un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, ogni punto è identificato univocamente da tre numeri reali (una terna di numeri): le coordinate del punto (generalmente indicate con ascissa, ordinata e quota: x, y, z).

L'insieme di tutte le terne ordinate di numeri reali, cioè l'insieme che ha per elementi gruppi di tre numeri reali, che differiscono tra loro anche per l'ordine con cui tali numeri si presentano in sequenza (cioè, per esempio, $(1,2,3)$ e $(2,1,3)$ sono due elementi diversi), prende il nome di \mathbb{R}^3 , ove il simbolo \mathbb{R} rappresenta l'insieme dei numeri reali. Quindi (il simbolo $:=$ si legge “si definisce come”):

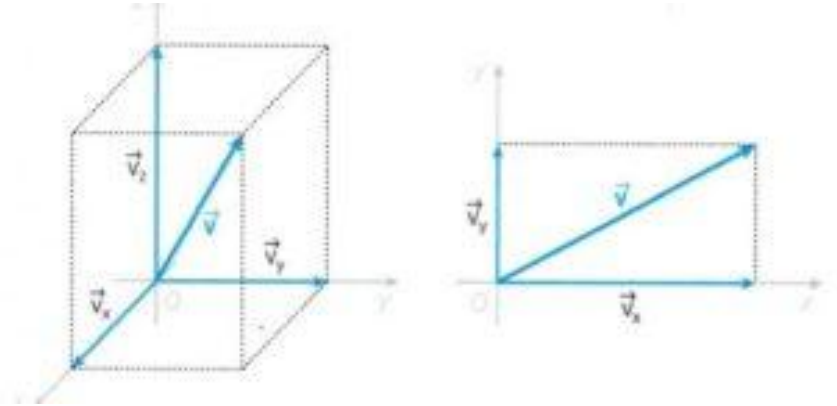
$$\mathbb{R}^3 := \{ (x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R} \}$$

In Fisica i vettori sono generalmente *applicati in un punto*: se io spingo una porta con un dito per aprirla, sto applicando una forza in un punto ben preciso dello spazio; in algebra spesso si considerano vettori applicati *nell'origine*: molte operazioni algebriche che coinvolgono i vettori non dipendono infatti da dove sono applicati.

Facciamo una riflessione: se un'estremità del vettore (la coda) si trova nell'origine, allora per identificare completamente il vettore considerato basta conoscere le coordinate nello spazio della punta. Ma tali coordinate sono un elemento di \mathbb{R}^3 , quindi possiamo identificare un vettore applicato nell'origine con un elemento di \mathbb{R}^3 (cioè una terna di numeri reali). Possiamo quindi scrivere, per esempio:

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 4 \right)$$

Intendendo il vettore che ha punto di applicazione nell'origine e componenti x, y, z rispettivamente pari a $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e 4 .



Tenendo presente questa riflessione, definiamo le prime e più elementari operazioni tra vettori.

Somma di due vettori (ma anche differenza:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z), \vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

$$\vec{v} \pm \vec{u} := (v_x \pm u_x, v_y \pm u_y, v_z \pm u_z)$$

Prodotto per uno scalare $k \in \mathbb{R}$:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$k\vec{v} := (kv_x, kv_y, kv_z)$$

Forti di queste considerazioni, introduciamo il prodotto scalare:

IL PRODOTTO SCALARE

Per *prodotto scalare* qui intenderemo il solo *prodotto euclideo*: il “mondo dei prodotti scalari” è infatti molto vasto, ma parlarne in generale non è l’obiettivo di questo testo; ci limiteremo a parlarne in maniera estremamente sintetica, dando le informazioni essenziali che possono servire come prerequisito per gli argomenti successivi.

Dati i due vettori $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, il loro *prodotto scalare euclideo* è un *numero reale* così definito:

$$\vec{v} * \vec{u} = v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z$$

Quindi $\vec{v} * \vec{u} \in \mathbb{R}$ e non a \mathbb{R}^3 !!!)

261

Esempio: $\vec{v} = (1, 2, 3)$, $\vec{u} = (3, 2, 1)$

$$\vec{v} * \vec{u} = 1 * 3 + 2 * 2 + 3 * 1 = 3 + 4 + 3 = 10$$

Notiamo dalla definizione come il prodotto scalare sia *commutativo* ($\vec{v} * \vec{u} = \vec{u} * \vec{v}$) e sia anche *distributivo* (sia a destra sia a sinistra), cioè

$$\vec{v} * (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} * \vec{u} + \vec{v} * \vec{w} = (\vec{u} + \vec{w}) * \vec{v}$$

Il *modulo* (anche *norma*) di un vettore è definito come

$$|\vec{v}| := \sqrt{\vec{v} * \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Dato un vettore \vec{v} , definiamo il corrispondente *versore* \hat{v} :

$$\hat{v} := \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Si tratta di un vettore con stessa direzione e verso di \vec{v} , ma con modulo *unitario* (cioè uguale a 1): provate a verificarlo applicando le definizioni.

I versori con punto di applicazione nell'origine e diretti lungo l'asse delle x, y, z (verso valori di ascissa, ordinata e quota positivi) sono denotati con simboli piuttosto diffusi, rispettivamente \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} .

Quindi:

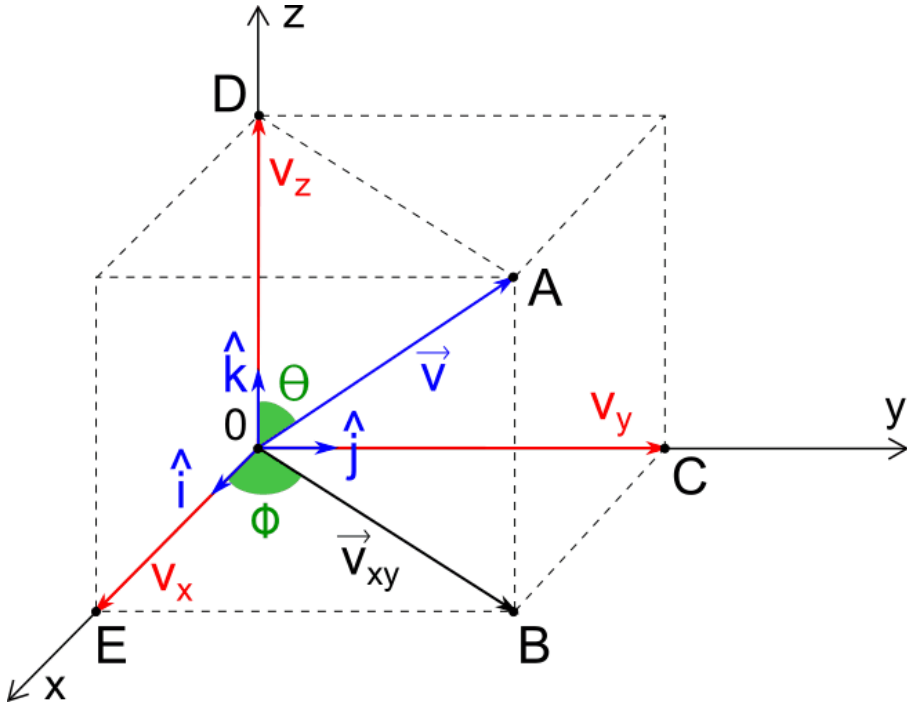
$$\hat{i} = (1, 0, 0), \hat{j} = (0, 1, 0) \text{ e } \hat{k} = (0, 0, 1)$$

Ogni vettore dello spazio può essere scritto per mezzo di questi versori. In generale:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \text{ si può scrivere così: } \vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}.$$

Questa proprietà si esprime dicendo che $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ generano lo spazio.

262



Si dicono *ortogonali* (perpendicolari) due vettori il cui prodotto scalare è nullo. Potete verificare tramite questa definizione come i versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sono perpendicolari tra loro.

Due vettori \vec{v} e $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ si dicono *paralleli* se esiste un numero $\mu \in \mathbb{R}$ tale che

$$\vec{v} = \mu \vec{w}$$

Si può dimostrare che, detto α l'angolo tra i due vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} , il loro prodotto scalare è anche uguale a:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos(\alpha)$$

Relazione con cui forse sarete familiari, che mostra una proprietà importante di tale prodotto: esso non dipende dal sistema di riferimento scelto (norme e angolo sono indipendenti dal sistema scelto).

Più avanti, per semplicità, ci riferiremo alla norma di un vettore indicandola tramite il simbolo del vettore non sovrastato dalla freccia.

IL PRODOTTO VETTORIALE

Definiamo prima formalmente il prodotto vettoriale tra due vettori in \mathbb{R}^3 , e poi diamo una relazione più semplice con cui forse voi sarete familiari:

Dati i due vettori $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$, il loro *prodotto vettoriale* corrisponde al seguente vettore avente componenti così definite:

$$\vec{v} \times \vec{w} := (v_y w_z - w_y v_z, \quad -v_x w_z + v_z w_x, \quad v_x w_y - v_y w_x)$$

$$\text{Quindi } \vec{v} \times \vec{w} \in \mathbb{R}^3 !!!$$

Riprendiamo i vettori del paragrafo precedente ed eseguiamone il loro prodotto vettoriale:

$$\vec{v} = (1, 2, 3), \vec{u} = (3, 2, 1)$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = (2 \cdot 1 - 2 \cdot 3, -1 \cdot 1 + 3 \cdot 3, 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3) = (-4, 8, -4)$$

Adesso calcoliamo:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (2 \cdot 3 - 2 \cdot 1, -3 \cdot 3 + 1 \cdot 1, 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = (4, -8, 4) = \\ &= -(\vec{v} \times \vec{u}) \end{aligned}$$

Sin da ora, quindi, notiamo come il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa, bensì della proprietà anticommutativa: il prodotto vettoriale tra due vettori è uguale al vettore opposto al prodotto vettoriale tra i due vettori il cui ordine è commutato: abbiamo appena mostrato tale proprietà attraverso un esempio più facile da comprendere, piuttosto che svolgere i calcoli letterali più laboriosi.

Calcoliamo adesso il prodotto scalare tra $\vec{v} \times \vec{u}$ e ciascuno dei due vettori \mathbf{v} e \mathbf{u} : ci accorgeremo di un'altra proprietà interessante:

$$(1,2,3) * (-4,8,-4) = -4 + 16 - 12 = 0$$

$$(3,2,1) * (-4,8,-4) = -12 + 16 - 4 = 0$$

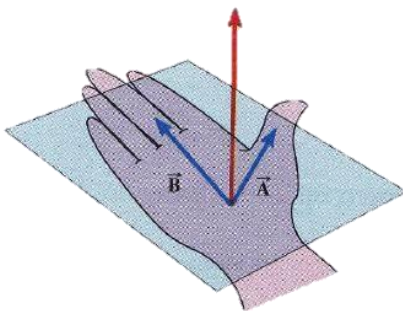
Il prodotto scalare del vettore risultante dal prodotto vettoriale e ciascuno dei due vettori di partenza sono nulli: ciò vuol dire che il vettore risultante è ortogonale (perpendicolare) a ciascuno dei due vettori (controllare la definizione al paragrafo precedente)!

Si può dimostrare abbastanza laboriosamente attraverso la definizione che, indicando con α l'angolo compreso fra i due vettori, il modulo del vettore risultante dal prodotto vettoriale tra due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} è pari a:

$$|\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}||\vec{u}| \sin(\alpha)$$

L'espressione scritta a destra dell'uguale è esattamente pari all'area del parallelogramma che ha per lati i due vettori \mathbf{v} e \mathbf{u} .

Quindi sappiamo che il risultato del prodotto vettoriale tra due vettori è un vettore perpendicolare ai primi due e con modulo uguale all'area del parallelogramma che ha per lati i due vettori. Ma come determinarne il verso in maniera rapida? Si fa ricorso alla cosiddetta *regola della mano destra*.



Supponete di voler determinare il verso di $\vec{v} \times \vec{u}$: ponete il pollice della mano destra in direzione del primo vettore, e dirigete le dita restanti in direzione del secondo vettore: il vettore risultante uscirà dal palmo della mano. Ricordatevi che la regola così enunciata vale solo per la mano destra!!!

Sono frequenti in Fisica i cosiddetti “tripli prodotti vettoriali”, cioè scritture siffatte:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Una regola, facile da memorizzare per via del suo nome, permette di calcolare tale triplo prodotto vettoriale (che, ricordiamo, è un *vettore*!!!) in maniera rapida: è la regola del “BAC – CAB” (si legge “BAC men CAB”)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} * \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} * \vec{b})$$

Dove il simbolo * indica il prodotto scalare euclideo.

Introduzione del simbolo di sommatoria¹²

Spesso in Fisica si ha a che fare con sistemi composti da molti corpi, e molte grandezze che coinvolgono il sistema sono date dalla somma delle grandezze che caratterizzano le singole componenti (grandezze additive). È scomodo scrivere esplicitamente queste somme molto lunghe, per cui si ricorre a una rappresentazione molto compatta, incentrata sul simbolo di sommatoria:

Supponiamo di voler scrivere compattamente la somma dei primi n quadrati, cioè:

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$$

Tale somma S si può scrivere così:

$$S = \sum_{k=1}^n k^2$$

Il simbolo Σ (sigma maiuscola) prende il nome di *simbolo di sommatoria*.

k è l'*indice di sommatoria*, un simbolo usato per indicare in maniera generica gli elementi dell'insieme coinvolto dall'operazione di sommatoria;

1 ed n sono gli estremi entro cui varia l'indice: k assume tutti i valori compresi tra 1 ed n in questo caso;

k^2 è l'espressione che dice come sono fatti i termini da sommare; in sostanza, per ogni numero k *naturale* compreso tra 1 ed n , bisogna calcolarne il quadrato (k^2) e poi sommare tutti i termini calcolati.

La scrittura scritta sopra si legge “*sommatoria per k che va da 1 a n di k al quadrato*”.

¹² Da questo momento in poi, i vettori sono indicati in grassetto, senza freccia superiore: i loro moduli sono indicati con lo stesso simbolo ma non in grassetto.

Ulteriore esempio:

L'espressione:

$$\sum_{i=1}^n a_i \text{ corrisponde alla scrittura } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

267

La sommatoria gode di alcune proprietà che semplicemente derivano dalle caratteristiche dell'addizione, e che potete verificare scrivendo “per esteso” le somme:

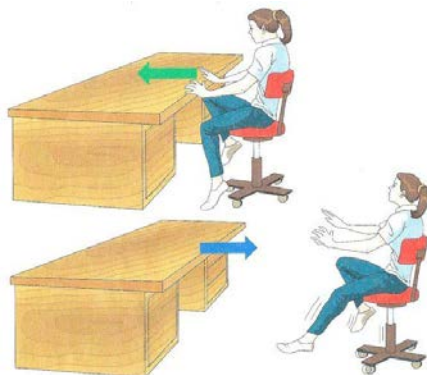
$$\sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{i=1}^n \mu a_i = \mu \sum_{i=1}^n a_i$$

Terzo principio della dinamica

Immaginate di spingere un oggetto inizialmente fermo. L'oggetto acquisterà una certa velocità per via dell'accelerazione di spinta: tale accelerazione è

dovuta al fatto che tramite la vostra mano state imprimendo una forza sull'oggetto (II principio della dinamica). Durante la spinta, tuttavia, sicuramente avvertirete una "controspinta" da parte dell'oggetto sulla vostra mano: anche l'oggetto, cioè, sta rispondendo alla vostra forza con una forza che agisce sulla vostra mano. In generale, il III principio della dinamica stabilisce che:



268

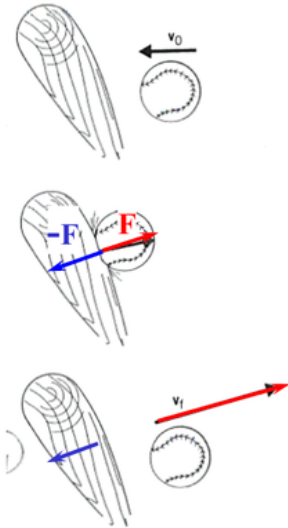
Se un corpo A esercita una forza su un corpo B, il corpo B eserciterà una forza sul corpo A nella stessa direzione della forza precedente, uguale in modulo ma opposta in verso.

Quando spingiamo un oggetto, la forza che esso esercita su di noi durante la spinta non ci fa accelerare: essa è infatti completamente cancellata dagli attriti tra i nostri piedi e il terreno: provate invece a spingere un compagno inizialmente fermo (partendo anche voi da fermi) sulla superficie di un lago ghiacciato: comincerete anche voi a muovervi nella direzione opposta alla vostra spinta.

È grazie a questo principio, complice la forza d'attrito tra il suolo e i nostri piedi, che riusciamo a camminare: quando compiamo un passo, spingiamo il suolo "all'indietro": quest'ultimo risponde con una forza in verso opposto che ci permette di avanzare.

Quantità di moto

Prima di dare la definizione formale di quantità di moto di un determinato punto materiale, conviene riflettere su alcune situazioni quotidiane.



Vi sarà certamente capitato di essere colpiti da una palla. Supponiamo che la palla che vi colpisca abbia sempre la stessa velocità e le stesse dimensioni, ma la prima volta si tratti di una palla da basket, mentre la seconda volta di una palla di gommapiuma. Chiaramente, a parità di dimensioni, la palla da basket ha una massa maggiore della palla di gommapiuma, e, se esse vi colpiscono alla medesima velocità sino a fermarsi, farete più fatica a fermare completamente il pallone da pallacanestro piuttosto che la palla di gommapiuma. Supponete adesso di dover bloccare un vostro compagno che cammina verso di voi: farete certamente meno fatica rispetto a una situazione in cui quest'ultimo vi viene contro correndo velocemente.

Capite dunque come, nell'interazione di un corpo con un altro a livello puramente meccanico, continuo sia la velocità del corpo sia la sua massa; quest'interazione avviene per mezzo di forze, la cui intensità sarà dunque correlata all'entità di velocità e massa.

Introduciamo una grandezza fisica adeguata a interpretare matematicamente tali interazioni, la *quantità di moto*.

Dato un punto materiale di massa m , che possiede in un determinato sistema di riferimento una velocità \mathbf{v} , si definisce *quantità di moto* di tale punto materiale la seguente grandezza vettoriale, tipicamente indicata con la lettera \mathbf{p} (ma anche \mathbf{q}):

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Chiaramente, dato un sistema costituito da N punti materiali, ciascuno di massa m_i , e avente velocità \mathbf{v}_i , si può estendere la definizione alla quantità di moto del sistema nel modo seguente:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$$

270

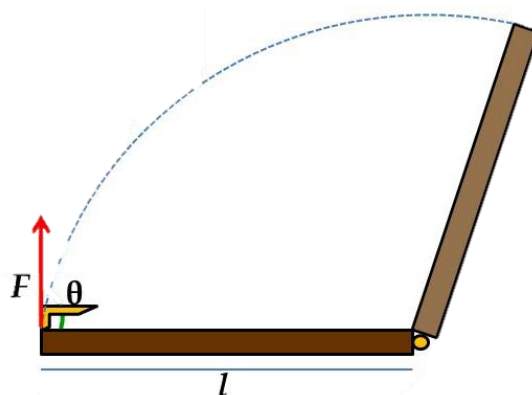
L'unità di misura della quantità di moto è il $kg * m/s$.

Ricordiamo che queste relazioni che stiamo scrivendo sono di tipo *vettoriale*, e i vettori nello spazio posseggono tre componenti (tre scalari). Di conseguenza, una relazione vettoriale corrisponde a tre relazioni scalari, una per ciascuna componente. In questo caso:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \rightarrow \begin{cases} p_x = \sum_{i=1}^N m_i v_{i_x} \\ p_y = \sum_{i=1}^N m_i v_{i_y} \\ p_z = \sum_{i=1}^N m_i v_{i_z} \end{cases}$$

Momento torcente di una forza rispetto a un polo

Supponiamo di voler aprire una porta: come sappiamo dall'esperienza quotidiana, in genere una porta non è libera di traslare a nostro piacimento nello spazio, essendo ancorata tramite i cardini al muro di casa. La porta può solo ruotare attorno a un asse passante per i punti in cui essa si trova a essere incardinata. Supponiamo di applicare una forza perpendicolarmente alla porta, prima molto vicino ai cardini, poi dalla parte più lontana ai cardini: ci



accorgeremo che apriremo la porta più agevolmente quando la forza sarà applicata lontano dall'asse di rotazione. Addirittura, se applichiamo la forza direttamente sull'asse di rotazione, non riusciremo minimamente a smuovere la porta, neanche di un millimetro.

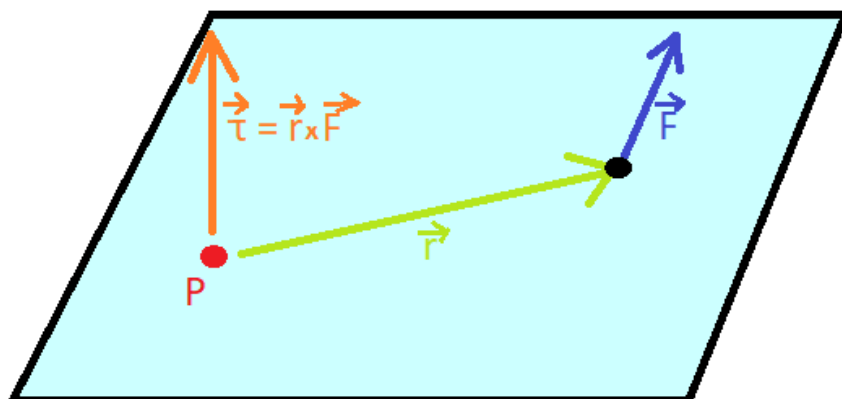
Adesso scegliamo un punto della porta diverso dall'asse, e applichiamo varie forze sempre della stessa intensità, ma con angoli diversi. Ci accorgeremo che la configurazione in cui riusciremo ad aprire la porta più agevolmente corrisponderà a quella in cui la forza applicata è perpendicolare al piano della porta.

Queste considerazioni si possono generalizzare a ogni situazione in cui si vuol porre in rotazione un oggetto. Introduciamo una grandezza fisica utile a sintetizzare le considerazioni precedenti, il *momento torcente*.

Dato un sistema di riferimento in cui abbiamo scelto un punto fisso P, si definisce *momento di una forza F rispetto a P*, indicato generalmente con la lettera greca τ , la seguente grandezza vettoriale:

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Dove \mathbf{r} rappresenta il vettore uscente da P e con la punta nel punto d'applicazione di \mathbf{F} .



L'unità di misura di questa grandezza è il newton per metro, $N \cdot m$.

Valgono le medesime considerazioni espresse al paragrafo precedente riguardo la corrispondenza tra equazioni vettoriali ed equazioni scalari.

Notiamo come tale grandezza interpreti bene la situazione scritta sopra: Consideriamo solo il modulo del momento:

$$\tau = rF \sin \alpha \quad \text{con } \alpha \text{ angolo fra } \mathbf{F} \text{ ed } \mathbf{r}$$

Essendo $|\sin \alpha| \leq 1$ ($= 1$ se $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$), allora $|\tau| \leq rF$. Il massimo valore di $|\tau|$, a parità di r e di F , si raggiunge quando $\alpha = 90^\circ$, cioè quando la forza è perpendicolare a \mathbf{r} .

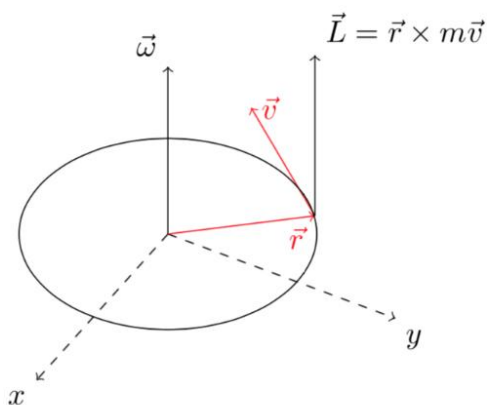
Viceversa, se fissiamo $\alpha = 90^\circ$, allora $\tau = rF$. A parità di F , più è grande r (cioè più lontano dal polo è applicata la forza), più grande è τ , cioè la capacità di mettere in rotazione l'oggetto (come la porta).

Dato un insieme di N forze \mathbf{F}_i , il cui punto di applicazione rispetto a un polo fisso P è individuato dai vettori \mathbf{r}_i , allora il momento complessivo si può determinare così:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\tau}_i$$

Momento angolare

Proviamo a fare le medesime considerazioni espone all'inizio del paragrafo in cui si definisce la quantità di moto, supponendo che però l'oggetto non compia un moto traslatorio, bensì ruoti rispetto a un asse. Ci accorgiamo che



entra in gioco un'altra grandezza, legata alla distanza tra il punto e l'asse, in analogia al caso del momento di una forza. Definiamo dunque una grandezza, anch'essa vettoriale, che è l'analogo "rotazionale" della quantità di moto, e la chiamiamo *momento angolare* oppure *momento della quantità di moto*:

273

Consideriamo un punto P fisso in un determinato sistema di riferimento. Dato un punto materiale di massa m , avente quantità di moto \mathbf{p} , introduciamo nuovamente il vettore \mathbf{r} applicato in P e con la punta nel punto d'applicazione di \mathbf{p} . Si definisce momento angolare del punto materiale rispetto al polo fisso P, e lo si indica generalmente con \mathbf{L} , il vettore così definito:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m \mathbf{v}) = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

L'unità di misura di tale grandezza è il $kg * \frac{m^2}{s}$.

Dato un sistema di N punti materiali e fissato un punto P, il momento angolare complessivo del sistema rispetto al punto P si definisce come la somma vettoriale dei momenti angolari rispetto a P dei singoli punti materiali:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i$$

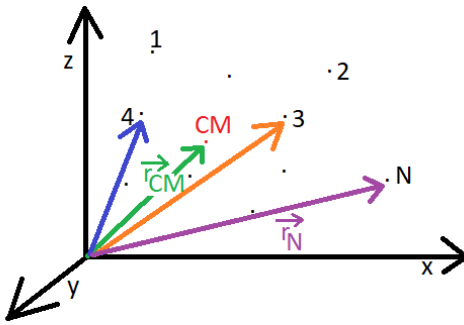
Forti di queste definizioni, andiamo ad applicarle a sistemi di N punti materiali (come i pianeti che orbitano attorno al Sole o le stelle della Galassia, date le dimensioni trascurabili di tali corpi rispetto alle enormi distanze che li separano) per ricavare interessanti proprietà. Prima, però introduciamo un'entità estremamente importante per rappresentare nel suo complesso un sistema: il centro di massa.

Valgono le medesime considerazioni espone al paragrafo precedente riguardo la corrispondenza tra equazioni vettoriali ed equazioni scalari.

Centro di massa

Dato un sistema di N punti materiali in un determinato sistema di riferimento, ciascuno di massa m_i ($1 \leq i \leq N$), la cui posizione rispetto all'origine è determinata dai vettori posizione \mathbf{r}_i , definiamo *centro di massa* il *punto geometrico* che, nel medesimo sistema di riferimento, è individuato dal seguente vettore:

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$



A numeratore compare la somma dei prodotti tra la massa di ciascun punto materiale e il suo vettore posizione, a denominatore la massa totale del sistema (la somma delle masse delle sue singole componenti). Il vettore \mathbf{r}_{cm} esce dall'origine e punta nel centro di massa.

Valgono le medesime considerazioni espone al paragrafo precedente riguardo la corrispondenza tra equazioni vettoriali ed equazioni scalari:

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

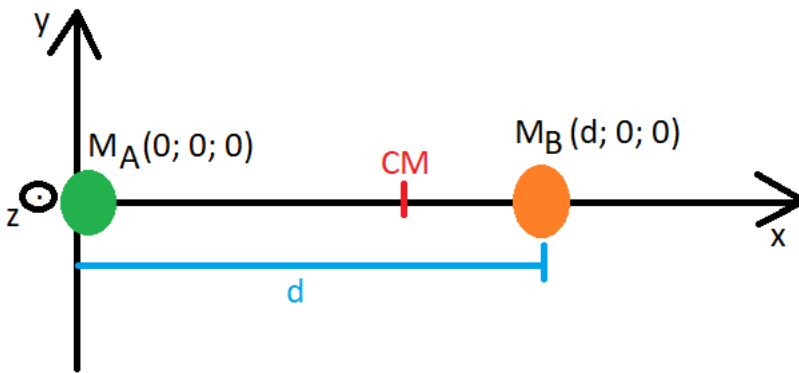
$$z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Il *centro di massa* è un punto geometrico dello spazio: **può coincidere con uno dei punti materiali del sistema, ma può anche cadere in una regione vuota!**

Per esempio, dato un sistema formato solamente da due punti materiali, il centro di massa cade sulla congiungente i due punti, più vicino al punto di massa maggiore: la sua posizione dà un'idea di come sia distribuita la massa all'interno del sistema.

Esempio/esercizio:

Calcolare la posizione del centro di massa di un sistema di due punti materiali A, B posti a distanza d , con $\frac{m_A}{m_B} = \alpha$, rispetto a tali punti.



Scegliamo un sistema di riferimento avente l'asse x in maniera tale da passare per entrambi i punti A e B (per due punti passa una e una sola retta...), in maniera tale da semplificare i calcoli, e facciamo coincidere l'origine di detto sistema con uno dei due punti, per esempio A. Le coordinate di A e di B sono dunque le seguenti:

$$A = (0, 0, 0) ; \quad B = (d, 0, 0)$$

Dunque, applicando le tre equazioni scalari precedenti, si ottiene:

$$y_{cm} = 0; \quad z_{cm} = 0; \quad x_{cm} = \frac{m_A * 0 + m_B * d}{m_A + m_B} = \frac{m_B * d}{m_A + m_B} = \frac{1}{\alpha + 1} d$$

L'ultima scrittura si ottiene dividendo numeratore e denominatore per m_B .

Il centro di massa si trova tra i due punti A e B: se $\alpha > 1$, allora $1/(\alpha+1) < 1/2$ e dunque $x_{cm} < 1/2 d$, cioè il centro di massa è più vicino ad A: ciò ha perfettamente senso, essendo in questo caso $m_A > m_B$ (si ricordi che $\frac{m_A}{m_B} = \alpha$). Viceversa, se $\alpha < 1$, B ha una massa maggiore di A e il centro di massa cade più vicino a B.

Esercizio “astronomico”:

Calcolare la posizione del centro di massa del sistema Terra-Sole, utilizzando i dati presenti in tabella e il procedimento dell'esempio precedente, schematizzando Terra e Sole come due punti materiali, e commentare il risultato ottenuto: dove cade il centro di massa del sistema? [Suggerimento: vedi esercizio sopra]

Prima di andare avanti...

278

Come si comporta il Δ d'una somma?

$$\Delta(a + b + c + \dots) = \Delta a + \Delta b + \Delta c + \dots$$

Come si comporta il Δ di un prodotto?

$$\Delta(ab) = (\Delta a) * b + a * (\Delta b)$$

Come si comporta il Δ d'un'espressione del tipo $a * b$ in cui però a è costante?

$$\Delta(ab) = a_f b_f - a_i b_i = ab_f - ab_i = a(b_f - b_i) = a\Delta b$$

(in questo caso $\Delta a = 0$)

La costante può “entrare e uscire liberamente” dal segno di Δ , e la sua variazione è nulla...

Secondo principio della dinamica e quantità di moto

Consideriamo l'espressione del secondo principio della dinamica e rielaboriamola sulla base della definizione delle nuove grandezze appena introdotte, in particolare la quantità di moto:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} = m \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

279

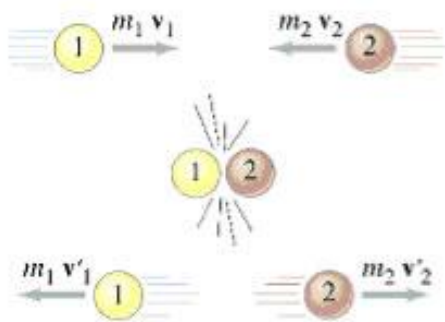
L'applicazione di una forza su un determinato punto materiale comporta una variazione della sua quantità di moto nel tempo. In particolare, il tasso di variazione della quantità di moto rispetto al tempo è proprio uguale alla risultante di tutte le forze che agiscono sul corpo. Se esprimiamo il secondo principio della dinamica in termini di variazione della quantità di moto nel tempo, compiamo una generalizzazione del medesimo principio, che si applicherà anche a un sistema in cui la massa non resta costante nel tempo, ovvero in cui, in generale, $\frac{\Delta m}{\Delta t} \neq 0$: tale contributo non nullo è incluso nel termine $\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$. Un esempio molto appropriato di un sistema di questo tipo è un razzo con i motori accesi, che espelle materia dagli ugelli dei motori.



Urti e conservazione della quantità di moto

Sicuramente qualcuno di voi avrà giocato a biliardo almeno una volta nella vita: questo gioco offre molti spunti di osservazione per quanto concerne le interazioni di tipo meccanico tra corpi: le palle da biliardo, appunto, che si urtano, o la palla che colpisce la sponda del biliardo.

Durante l'urto tra due palle da biliardo, su una singola sfera agiscono diverse forze: una di queste è la forza di "interazione", che l'altra sfera applica su di



essa; la forza di gravità con cui la Terra attrae la palla, la reazione vincolare che il piano del biliardo esercita sulla palla evitando che essa sprofondi dentro il tavolo, l'attrito tra la palla e il panno e tra la palla e l'aria... Trascuriamo gli attriti e assumiamo che il piano sia perfettamente orizzontale, in maniera tale che la reazione

vincolare del piano e il peso della pallina si controbilancino perfettamente. Prima dell'urto, la risultante delle forze che agiscono sulla palla è, per le considerazioni fatte, nulla: dunque la pallina sarà in quiete o in moto rettilineo uniforme sul panno del biliardo.

A un certo punto essa urta l'altra palla: supponiamo che lo faccia "centralmente" (cioè senza particolari urti "ad effetto"). Le uniche forze alle quali saranno sottoposte le due palline sono le forze d'urto.

Se consideriamo il nostro sistema meccanico complessivamente costituito dalle due sferette, allora le forze d'urto sono forze *interne* al sistema, ovvero sono esercitate da un elemento del sistema su un altro elemento del sistema. Un sistema i cui elementi sono sottoposti nettamente all'azione di forze *interne* si definisce *isolato*.

Consideriamo l'urto e chiamiamo le due sfere A e B: per il III principio della dinamica, la forza che A esercita su B è uguale e opposta alla forza che B esercita su A:

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B} = -\mathbf{F}_{B \rightarrow A}$$

Supponendo che l'urto avvenga in un intervallo di tempo Δt , moltiplichiamo per tale tempo ambo i membri:

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B} \Delta t = -\mathbf{F}_{B \rightarrow A} \Delta t$$

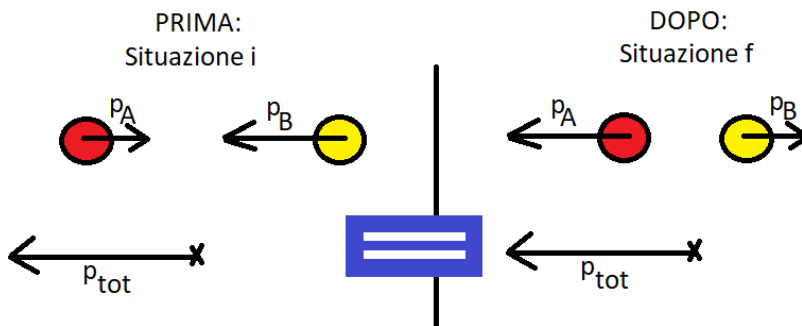
Ricordando che $\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$, si avrà che:

$$\Delta \mathbf{p}_B = -\Delta \mathbf{p}_A \rightarrow \Delta \mathbf{p}_B + \Delta \mathbf{p}_A = \mathbf{0} \rightarrow \Delta(\mathbf{p}_B + \mathbf{p}_A) = \mathbf{0} \rightarrow \Delta \mathbf{p}_{tot} = \mathbf{0}$$

Cioè:

$$\mathbf{p}_{tot i} = \mathbf{p}_{tot f}$$

Abbiamo appena mostrato una proprietà importantissima, che vale in generale per tutti i sistemi isolati: la quantità di moto *totale* (che è un vettore nello spazio!!!) si conserva.



Se nell'urto si conserva anche l'energia cinetica totale (la somma delle energie cinetiche dei singoli corpi), allora l'urto si definisce *elastico*. Se l'urto ha come esito che le due masse procedano "attaccate", allora l'urto si definisce *completamente anelastico*. Esiti "intermedi" configurano l'urto come *parzialmente anelastico*.

Le varietà di urti sono molteplici: proponiamo la soluzione generale nel caso di urto elastico monodimensionale, in cui imponiamo che tra prima e dopo l'urto si conservino quantità di moto ed energia cinetica complessiva; il fatto che l'urto sia monodimensionale permette di utilizzare le relazioni scalari senza "perdere informazioni" rispetto all'equazione vettoriale. Indicando per mezzo della lettera v le velocità prima dell'urto e con u le velocità dopo l'urto, si ha il seguente sistema di due equazioni in due incognite, le u appunto, perfettamente risolvibile per mezzo di alcuni semplici passaggi algebrici:

N.B.: Le v_i e le u_i sono da considerarsi con il loro segno algebrico a seconda del verso dei corrispondenti vettori rispetto all'asse su cui si svolge il moto.

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \end{cases}$$

282

$$\begin{cases} m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2) \\ m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2) \\ m_1(v_1 + u_1)(v_1 - u_1) = m_2(u_2 + v_2)(u_2 - v_2) \end{cases}$$

Dividiamo membro a membro la seconda equazione per la prima:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2) \\ v_1 + u_1 = u_2 + v_2 \end{cases} \rightarrow u_1 = u_2 + v_2 - v_1$$

Sostituiamo l'espressione di u_1 nella prima equazione:

$$m_1(v_1 - u_2 - v_2 + v_1) = m_2(u_2 - v_2)$$

E risolviamo per u_2 :

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

È facile adesso ricavare u_1 sostituendo tale formula nell'espressione di u_1 :

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

Se, per esempio, $m_2 \gg m_1$, allora le formule si possono così approssimare (l'approssimazione è tanto migliore quanto più $\frac{m_2}{m_1}$ è un numero grande):

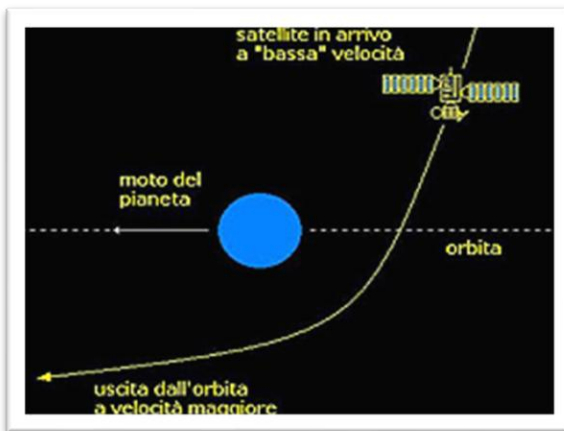
$$u_2 \approx v_2$$

$$u_1 \approx -v_1 + 2v_2$$

Tali relazioni sono ricavate dividendo numeratore e denominatore di ogni espressione per m_2 e trascurando i termini pari a m_1/m_2 , essendo molto piccoli.

283

Quest'ultima soluzione mostra che la massa considerevolmente più grande procede sostanzialmente indisturbata, mentre il corpo di massa molto piccola subisce una notevole variazione di velocità se il corpo con cui impatta è molto veloce, acquisendo molta più energia di quanta ne possedeva inizialmente, senza tuttavia "sottrarne" una quantità sensibile al corpo più massivo. Un principio concettualmente simile a quello di un urto elastico fra un corpo molto massivo e uno di massa estremamente più piccola è quello che sta alla



base dell'*effetto fionda gravitazionale* subito da un veicolo spaziale: esso utilizza la gravità di un pianeta per alterare il percorso e la velocità di tale veicolo, ed è comunemente usata per voli indirizzati verso i pianeti esterni, il cui arrivo a destinazione sarebbe altrimenti proibitivo per costi e

tempi. Nel sistema di riferimento del Sole, la traiettoria del veicolo che usufruisce della *fionda gravitazionale* è indistinguibile da quella di una pallina che ne ultra un'altra, più pesante, in moto, e rimbalza con velocità maggiore in modulo di quella iniziale.

Quantità di moto e centro di massa

Se riprendiamo la definizione del vettore posizione del centro di massa di un sistema di N punti materiali ed eseguiamo alcuni passaggi algebrici, otteniamo la corrispondente velocità con cui si muove il centro di massa nel riferimento scelto:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{cm} &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \\ \Delta \mathbf{r}_{cm} &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i \Delta \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \\ \frac{\Delta \mathbf{r}_{cm}}{\Delta t} &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t}}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \end{aligned}$$

Cerchiamo di scrivere la quantità di moto di un sistema in termini di \mathbf{v}_{cm} :

$$\mathbf{P}_{sis} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \mathbf{v}_{cm} = M_{tot} \mathbf{v}_{cm}$$

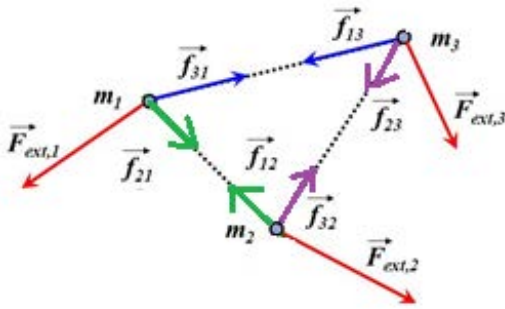
La quantità di moto di un sistema di punti materiali è data dal prodotto della somma delle masse dei punti e della velocità del centro di massa del sistema.

Continuiamo a rielaborare la precedente scrittura, nell'ipotesi che la massa del sistema non vari (sistema chiuso):

$$\Delta \mathbf{P}_{sis} = M_{tot} \Delta \mathbf{v}_{cm} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta \mathbf{P}_{sis}}{\Delta t} = \frac{M_{tot} \Delta \mathbf{v}_{cm}}{\Delta t}$$

$$\text{Da cui} \quad \mathbf{F}_{tot} = M_{tot} \mathbf{a}_{cm}$$

Dove con \mathbf{F}_{tot} indichiamo la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono sugli elementi del sistema come se fossero applicate tutte nel centro di massa, e con \mathbf{a}_{cm} indichiamo la corrispondente accelerazione con cui si muove il centro di massa nel sistema di riferimento scelto.



Il vettore \mathbf{F}_{tot} è dato dalla sommatoria delle forze esterne e delle forze interne che agiscono sugli elementi di un sistema: ma, per il III principio della dinamica, le forze interne si presentano a coppie uguali e opposte: quando immaginiamo di

applicarle al centro di massa, esse si cancellano a vicenda, facendo “sopravvivere” esclusivamente la risultante delle forze esterne, quindi:

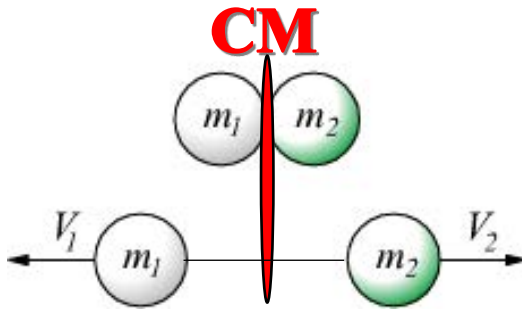
$$\mathbf{F}_{tot} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{iEXT}$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{iEXT} = M_{tot} \mathbf{a}_{cm}$$

Il prodotto della massa totale del sistema per l'accelerazione del suo centro di massa è pari alla risultante delle forze esterne che agiscono sugli elementi del sistema.

Un'importante conseguenza di queste relazioni appena ricavate si ha per i sistemi isolati, in cui anche $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{iEXT} = \mathbf{0}$. Per questi sistemi si ha che $\mathbf{a}_{cm} = \mathbf{0}$, cioè \mathbf{v}_{cm} è costante nel tempo: *le singole componenti del sistema possono avere un moto complicatissimo, ma se il sistema è isolato, il loro centro di massa si muoverà di moto rettilineo e uniforme.*

Facciamo un ultimo esempio che riassume quanto ricavato finora (comprendendo anche la legge di conservazione della quantità di moto totale).



Supponiamo di porre due oggetti (assimilabili a punti materiali) molto vicini tra loro, in maniera tale che siano separati esclusivamente da una piccola carica esplosiva di massa trascurabile.

287

Trascuriamo qualsiasi forza esterna. Inizialmente ciascuna delle componenti è ferma in un opportuno sistema di riferimento: ciò vuol dire che la quantità di moto complessiva in tale sistema è nulla. Facciamo dunque esplodere la carica interposta: il sistema oggetti + carica è isolato (le forze derivanti dall'esplosione sono interne): la quantità di moto complessiva si deve conservare, ossia, in questo caso, deve rimanere nulla.

Ma allora la velocità del centro di massa si manterrà nulla durante tutto il processo; attenzione: i due oggetti si allontaneranno in conseguenza dell'esplosione, ma il centro di massa rimarrà fermo!

Conservazione del momento angolare

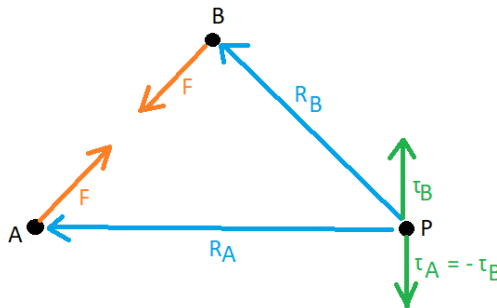
Consideriamo, anche in questo caso, un sistema composto da N punti materiali di massa m_i e scegliamo un determinato sistema di riferimento in cui questi punti sono individuati dai vettori posizione \mathbf{r}_i e posseggono velocità \mathbf{v}_i . Fissiamo inoltre un punto P , individuato dal vettore uscente dall'origine \mathbf{r}_P . Indichiamo con la lettera \mathbf{F} (con opportuni pedici) le varie forze che agiscono su tali punti. Il nostro obiettivo è scrivere il momento complessivo delle forze rispetto a P in maniera tale da mettere in luce una legge analoga alla conservazione della quantità di moto, ma che coinvolge il *momento angolare*.

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_P) \times (\mathbf{F}_{i_{int}} + \mathbf{F}_{i_{ext}})$$

L'ultimo passaggio deriva dal fatto che la forza complessiva che agisce sul punto i -esimo ha due componenti: la risultante delle forze interne che agisce sul medesimo punto, e la risultante delle forze esterne (sempre sul medesimo punto). Adesso sfruttiamo la distributività del prodotto vettoriale

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_{i_{int}} + \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{F}_{i_{ext}}$$

Per il III principio della dinamica, il primo termine è *nullo*: infatti se una determinata forza interna genera un momento pari a $\boldsymbol{\tau}_i$, ve ne sarà un'altra, uguale in modulo ma in verso opposto alla prima, che genererà un momento pari a $-\boldsymbol{\tau}_i$.



Di conseguenza:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_{i\text{ext}} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$$

Nella determinazione del momento risultante di tutte le forze che agiscono su un sistema di punti materiali, il contributo “netto” è dovuto alle forze esterne al sistema.

289

Riprendiamo in esame la prima scrittura per $\boldsymbol{\tau}$, sostituendo però il simbolo $\boldsymbol{\tau}$ con $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ (abbiamo visto che sono uguali):

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_i$$

E ricordando il II principio della dinamica formulato in termini di variazione della quantità di moto, riarrangiamo l'espressione seguente (anche sfruttando le definizioni delle grandezze che introdurremo):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \left(\frac{\Delta \mathbf{p}_i}{\Delta t} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \left(\frac{\Delta(m_i \mathbf{v}_i)}{\Delta t} \right) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times m_i \left(\frac{\Delta \mathbf{v}_i}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

Adesso facciamo un passaggio algebrico che apparentemente complicherà la scrittura precedente, ma che ci sarà molto utile: come avrete sicuramente imparato leggendo il paragrafo relativo al prodotto vettoriale, il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo: di conseguenza anche il prodotto

vettoriale di un vettore per se stesso è nullo. Quindi, se per esempio scegliamo il vettore \mathbf{v}_i , allora $\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, e l'aggiunta di questa espressione all'interno della sommatoria non altera la somma.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_{ext} &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_P) \times m_i \left(\frac{\Delta \mathbf{v}_i}{\Delta t} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left[\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i + (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_P) \times \left(\frac{\Delta \mathbf{v}_i}{\Delta t} \right) \right]\end{aligned}$$

Sfruttiamo la definizione di $\mathbf{v}_i := \frac{\Delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_P)}{\Delta t}$ per sostituirla nell'espressione precedente:

$$\boldsymbol{\tau}_{ext} = \sum_{i=1}^N m_i \left[\left(\frac{\Delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_P)}{\Delta t} \right) \times \mathbf{v}_i + (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_P) \times \left(\frac{\Delta \mathbf{v}_i}{\Delta t} \right) \right]$$

Ma, tenendo a mente il prerequisito menzionato all'inizio di questo documento (Δ d'un prodotto), ci accorgiamo che il termine dentro parentesi quadra equivale a

$$\begin{aligned}\frac{\Delta[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{v}_i]}{\Delta t} \\ \boldsymbol{\tau}_{ext} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\Delta[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{v}_i]}{\Delta t} = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta[m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{v}_i]}{\Delta t}\end{aligned}$$

Essendo l'ultimo passaggio motivato dal fatto che le m_i sono delle costanti.

Vi sarete certamente accorti che il termine a numeratore è uguale a $\Delta \mathbf{L}_i$, cioè la variazione del momento angolare rispetto al polo fisso P della particella i -esima, dunque scriviamo:

$$\tau_{ext} = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta L_i}{\Delta t} = \frac{\Delta \sum_{i=1}^N L_i}{\Delta t} = \frac{\Delta L_{tot}}{\Delta t}$$

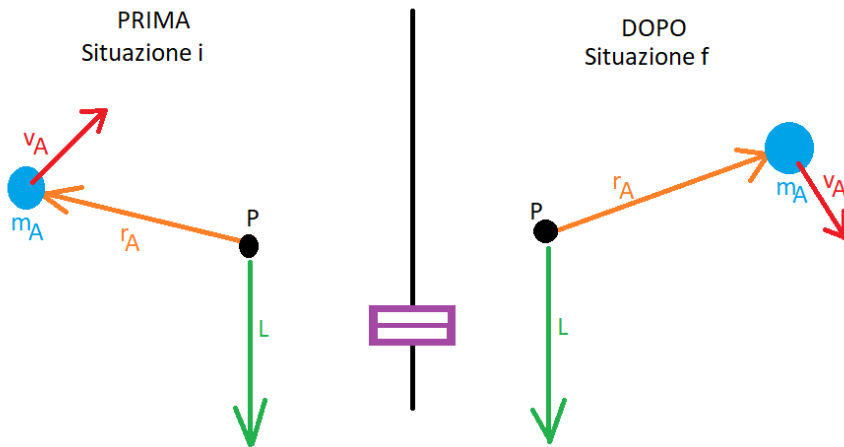
Siamo giunti a un risultato importantissimo: *la risultante dei momenti delle forze esterne che agiscono su un sistema di punti materiali è pari al tasso di variazione nel tempo del momento angolare del sistema: fare momento torcente equivale a modificare il momento angolare!*

291

Non solo: se le forze esterne che agiscono sugli elementi del sistema danno un momento risultante *nullo*, allora la variazione del momento angolare complessivo del sistema è nulla, pertanto ciò significa che *il momento angolare totale si conserva*.

Legge della conservazione del momento angolare: se la risultante dei momenti delle forze esterne che agiscono su un sistema rispetto a un polo fisso è nulla, allora il momento angolare totale del sistema si mantiene costante nel tempo, ossia si conserva.

Esempio: supponete di avere un dispositivo formato da due sferette unite attraverso un filo rigido, quest'ultimo munito di un meccanismo interno capace di farlo accorciare: inizialmente le sfere ruotano con una certa velocità. Supponete ora di azionare il meccanismo interno... Le sfere, più vicine, cominceranno a ruotare più velocemente: il momento angolare del sistema si deve infatti conservare, ma, dal momento che la massa delle sfere resta costante e si accorcia la loro distanza, la loro velocità deve necessariamente aumentare! Uguali considerazioni (con molte semplificazioni) si applicano a un sistema binario formato da due stelle: in questo caso, il meccanismo interno corrisponde alla gravità con cui le componenti interagiscono...



Le due equazioni ricavate in questa sezione, una all'inizio e l'altra adesso, sono di importanza fondamentale nella meccanica, e le riportiamo qui:

$$\begin{cases} F_{ext\,sistema} = \frac{\Delta P_{sistema}}{\Delta t} \\ \tau_{ext\,sistema} = \frac{\Delta L_{sistema}}{\Delta t} \end{cases}$$

Esse sono chiamate *equazioni cardinali della meccanica*, e, a ben vedere, hanno un aspetto molto simile tra loro: ecco, perché, nel definire il momento angolare, avevamo usato l'espressione *analogo rotazionale della quantità di moto...*

In generale molte equazioni riferite a moti rotazionali sono simili alle corrispondenti equazioni per moti traslazionali; ecco uno schema che tenta di riassumere i parallelismi:

	TRASLAZIONE	ROTAZIONE
GRANDEZZE “analoghe”	Velocità traslazionale	Velocità angolare
	Quantità di moto	Momento angolare
	Forza	Momento di una forza
	Massa inerziale	Momento d’inerzia (vedremo tra poco)

Momento angolare e centro di massa

Vogliamo calcolare il momento angolare di un sistema di punti materiali, scegliendo però come polo fisso il centro di massa del sistema. Utilizziamo le medesime notazioni per le grandezze fisiche introdotte già da qualche paragrafo:

$$\mathbf{L}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{CM}) \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_i$$

La prima sommatoria equivale al momento angolare del sistema calcolato scegliendo come polo fisso l'origine del sistema di riferimento, mentre continuiamo per riarrangiare il secondo termine:

$$\mathbf{L}_{CM} = \mathbf{L}_O - \mathbf{r}_{CM} \times \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{L}_O - \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}_{tot} = \mathbf{L}_O - \mathbf{r}_{CM} \times M \mathbf{v}_{CM}$$

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_{CM} + M_{tot} \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{v}_{CM}$$

Il momento angolare di un sistema rispetto all'origine del s.r. scelto è uguale al momento angolare del sistema valutato rispetto al centro di massa più un termine, uguale al momento angolare rispetto all'origine di un punto materiale che occupa il centro di massa (e si muove con la sua velocità) e che possiede una massa uguale a tutta la massa del sistema.

Energia cinetica e centro di massa

Obiettivo di questo paragrafo è il calcolo dell'energia cinetica del solito sistema di punti materiali: cercheremo anche questa volta di correlare tale grandezza alle proprietà del centro di massa: l'energia cinetica del sistema, essendo l'energia una grandezza additiva, è pari alla somma delle energie cinetiche delle sue singole componenti:

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

295

Le relazioni che definiscono posizione e velocità del centro di massa sono relazioni vettoriali... cerchiamo di sfruttare le proprietà dei vettori per poterci ricondurre a tali espressioni; ricordiamo che, come visto nel capitolo riguardante il prodotto scalare, il quadrato del modulo di un vettore è pari al prodotto scalare del vettore per se stesso: quindi possiamo scrivere l'espressione precedente mettendo in luce questa proprietà:

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i * \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i) * (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i)$$

Abbiamo operato la sostituzione $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i$ perché la velocità della particella i-esima nel sistema di riferimento esterno è pari alla velocità della medesima particella nel sistema di riferimento del centro di massa (\mathbf{v}'_i) più la velocità del centro di massa stesso (\mathbf{v}_{CM}). Continuiamo a svolgere i passaggi algebrici ricordando le proprietà del prodotto scalare:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{CM} * \mathbf{v}_{CM} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{CM} * \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}'_i * \mathbf{v}_{CM} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}'_i * \mathbf{v}'_i \\ K &= \frac{1}{2} v_{CM}^2 \sum_{i=1}^N m_i + \mathbf{v}_{CM} * \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \end{aligned}$$

Il secondo termine di quest'espressione è nullo: infatti, nel sistema di riferimento con origine nel centro di massa, la velocità del centro di massa è nulla, ed è inoltre così definita:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i'}{\sum_{i=1}^N m_i} \rightarrow \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0} \rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i' = \mathbf{0}$$

296

Il terzo termine è uguale all'energia cinetica complessiva del sistema valutata nel sistema di riferimento con origine nel centro di massa: chiameremo tale grandezza K_{CM} . Il termine $\sum_{i=1}^N m_i$ è pari alla massa totale del sistema: quindi

$$K = K_{CM} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

L'energia cinetica di un sistema di punti materiali in un sistema di riferimento in cui il centro di massa possiede una certa velocità, è uguale all'energia cinetica del sistema valutata nel sistema di riferimento del centro di massa più un termine, uguale all'energia cinetica di un punto materiale avente modulo della velocità pari a quello della v. del centro di massa e massa pari alla massa complessiva del sistema.

Quantità di moto e centro di massa (considerazioni finali)

Riprendiamo l'equazione:

$$\mathbf{P}_{tot} = M\mathbf{v}_{CM}$$

Nel sistema di riferimento del centro di massa $\mathbf{v}_{CM} = 0$, dunque:

$$\mathbf{P}_{totCM} = 0$$

La quantità di moto complessiva nel sistema di riferimento del centro di massa è nulla.

297

Come avrete notato, nel sistema di riferimento del centro di massa tutte le equazioni scritte in precedenza assumono un aspetto molto semplice; ciò lo rende un sistema “privilegiato” per descrivere il moto di una serie di oggetti, attraverso relazioni più semplici ed eleganti.

Sistemi a due corpi

Un caso importante di sistemi di punti materiali sono i sistemi che contano solo due componenti, i *sistemi a due corpi*, in particolare quando i due corpi si possono considerare soggetti esclusivamente alla loro mutua interazione (sistemi isolati e forze interne). Vedremo che una grandezza assai comoda per esprimere alcune proprietà di tali sistemi è la *massa ridotta*, che definiremo al momento opportuno.

Se chiamiamo i due corpi 1 e 2, allora per un osservatore inerziale saranno vere le due seguenti equazioni (II principio della dinamica):

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = m_1 \mathbf{a}_1$$

Ma, per il terzo principio della dinamica, si ha che $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \mathbf{F}$, perciò:

$$\mathbf{F} = m_2 \mathbf{a}_2$$

$$-\mathbf{F} = m_1 \mathbf{a}_1$$

Pertanto, sommando membro a membro le precedenti equazioni, otteniamo che

$$m_2 \mathbf{a}_2 = -m_1 \mathbf{a}_1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{a}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{a}_1$$

Adesso determiniamo l'accelerazione relativa dei due corpi, ossia il vettore $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) = -\mathbf{a}_1 \left(\frac{m_2 + m_1}{m_2} \right)$$

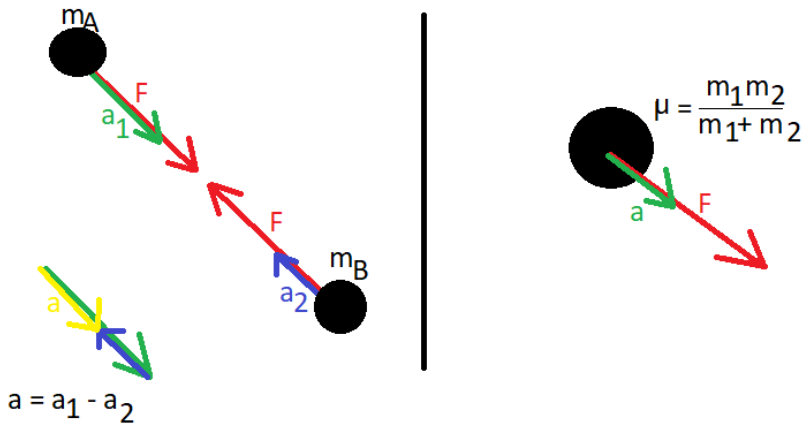
Moltiplichiamo e dividiamo per m_1 : il nostro obiettivo è far comparire \mathbf{F} :

$$\mathbf{a} = -\mathbf{a}_1 \frac{m_1}{m_1} \left(\frac{m_2 + m_1}{m_2} \right) = \frac{\mathbf{F}}{\frac{m_1 m_2}{m_2 + m_1}}$$

Se eseguite l'analisi dimensionale del denominatore di quest'espressione, vi accorgete che le sue dimensioni sono quelle di una massa. A tale grandezza si dà il nome di *massa ridotta* del sistema, poiché il suo valore è minore di quello di entrambe le masse (provate a dimostrarlo autonomamente). Se le masse hanno valore molto diverso tra loro (si pensi al sistema Terra-Sole), la massa ridotta assume un valore molto prossimo a quello della massa più piccola (la massa della Terra in questo caso). La massa ridotta si indica con il simbolo μ , per cui:

$$\mathbf{F} = \mu \mathbf{a}$$

A ben vedere, siamo riusciti a semplificare il problema grazie all'introduzione di μ : l'accelerazione relativa di una massa rispetto all'altra è pari a quella che in un sistema di riferimento inerziale avrebbe *un solo* corpo di massa pari alla massa ridotta del sistema, su cui agisce una forza pari alla forza d'interazione reciproca degli elementi del sistema.



Così, in un sistema binario, le due stelle si attraggono reciprocamente con una forza pari a:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Se le due stelle hanno masse confrontabili, non possiamo procedere con le varie semplificazioni già viste, ma dobbiamo applicare la relazione scritta sopra.

Dunque, vista la bontà dell'ipotesi di isolamento del sistema, si ha, per la relazione appena trovata:

$$\mu \mathbf{a} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{con} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Adesso poniamoci nel sistema di riferimento del centro di massa del sistema a due corpi: dev'essere, come già visto in precedenza:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad m_1 \mathbf{v}_1 = -m_2 \mathbf{v}_2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{v}_2$$

Nel sistema del centro di massa, i vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono paralleli. La velocità relativa tra i due oggetti sarà:

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 + \frac{m_2}{m_1} \mathbf{v}_2 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \mathbf{v}_2 = \frac{m_2}{\mu} \mathbf{v}_2$$

300

Determiniamo l'energia cinetica del sistema in questo sistema di riferimento:

$$\begin{aligned} K_{CM} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) v_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_2^2}{m_1} v_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) \end{aligned}$$

Essendo $m_2 = \frac{v\mu}{v_2}$ abbiamo che:

$$K_{CM} = \frac{1}{2} \frac{v\mu}{v_2} v_2^2 \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) = \frac{1}{2} v\mu v_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)$$

Il prodotto degli ultimi due termini è ancora uguale a v , perciò:

$$K_{CM} = \frac{1}{2} \mu v^2$$

L'energia cinetica nel sistema di riferimento del centro di massa di un sistema a due corpi è uguale all'energia cinetica di un corpo singolo che si muove con una velocità di modulo pari alla velocità relativa dei due corpi e avente massa pari alla massa ridotta del sistema.

Un nuovo modo di vedere la 2^a legge di Keplero

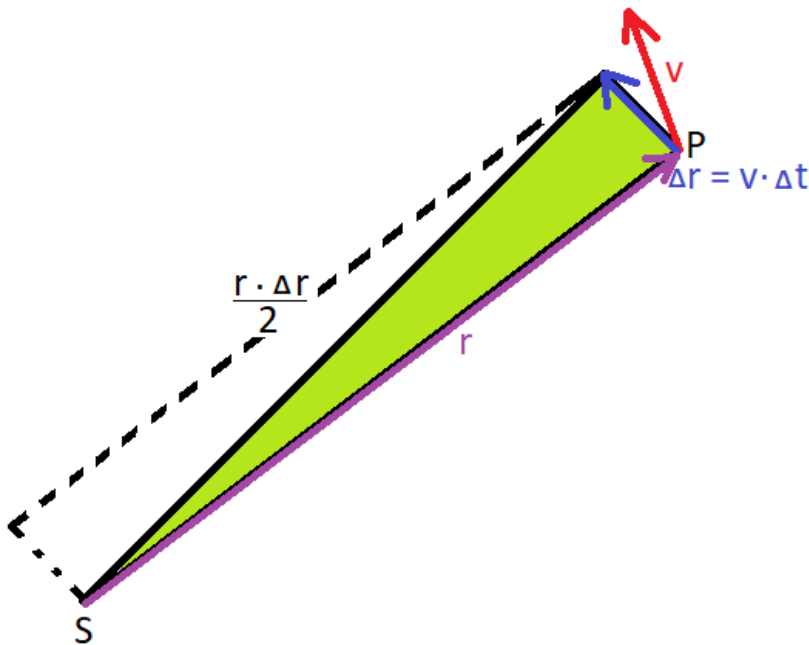
Consideriamo un pianeta che orbita attorno al Sole: la seconda legge di Keplero afferma che *il raggio vettore dell'orbita spazza aree uguali in tempi uguali*. Questa legge fu ricavata da Keplero sulla base delle sue osservazioni, ma si spiega grazie alla legge di conservazione del momento angolare.

Scegliamo un sistema di riferimento con origine nel Sole, in cui il pianeta (di massa m trascurabile rispetto al Sole) in un determinato punto dell'orbita è individuato dal raggio vettore \mathbf{r} e possiede una velocità pari a \mathbf{v} . Dev'essere allora

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad \Delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \Delta t$$

A quanto corrisponde l'area spazzata dal raggio vettore nel tempo Δt ? È pari alla metà del parallelogramma che ha per lati $\Delta \mathbf{r}$ e \mathbf{r} , quindi equivale alla metà del modulo del prodotto vettoriale di questi ultimi due vettori:

$$A = \frac{|\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}|}{2}$$



$$A = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \Delta t}{2}$$

$$\frac{A}{\Delta t} = \frac{m}{m} \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|}{2} = \frac{|m\mathbf{r} \times \mathbf{v}|}{2m} = \frac{|\mathbf{L}|}{2m}$$

Possiamo assumere che il sistema Sole + pianeta non sia sottoposto all'azione di forze esterne rilevanti. Quindi \mathbf{L} si conserva, ossia in particolare $|\mathbf{L}| = \text{costante}$. Ma allora $\frac{A}{\Delta t}$ è costante, cioè *le aree spazzate dal raggio vettore nel medesimo tempo sono uguali*.

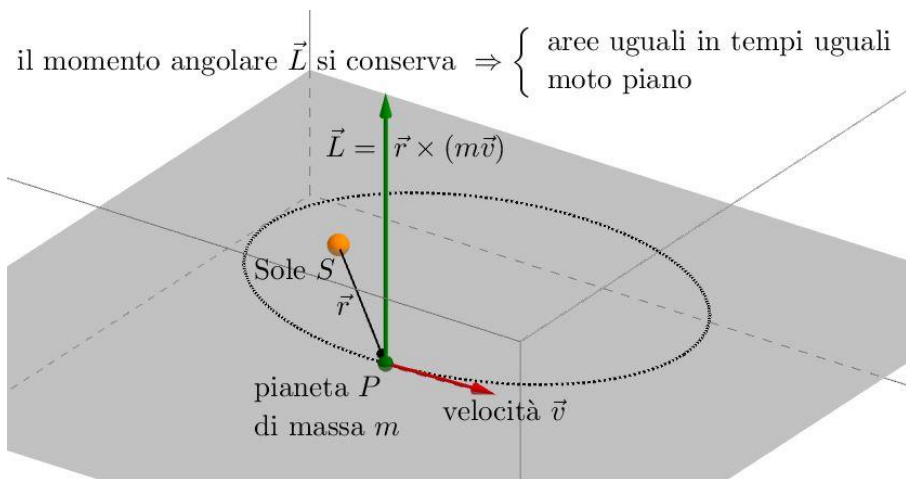
Applichiamo la legge di conservazione del momento angolare al perielio e all'afelio: qui il raggio vettore è perpendicolare alla direzione della velocità e ha modulo, rispettivamente d_A e d_P : per cui possiamo adoperare con facilità le relazioni scalari

$$L_A = L_P$$

$$mv_A d_A = mv_P d_P$$

$$v_A d_A = v_P d_P$$

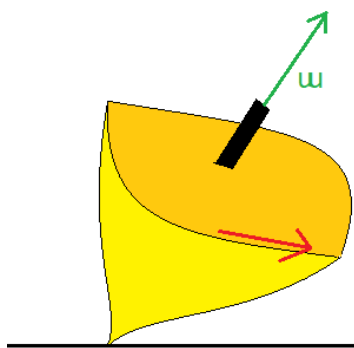
Per posizioni generiche sull'orbita, vale ancora la legge di conservazione del momento angolare, ma va correttamente scritta adoperando la relazione vettoriale: infatti non è generalmente vero che il raggio vettore sia perpendicolare alla velocità!



Il vettore velocità angolare

Il titolo di questo paragrafo potrebbe, a prima vista, indurre qualcuno in confusione: la velocità angolare è stata precedentemente definita come uno scalare... perché adesso è accompagnata nel titolo dalla parola *vettore*?

Supponiamo che un amico vi dica: “*Ho posto in rotazione una trottola sul tavolo e adesso ruota con una velocità angolare di 5 rad/s*”. Provate a visualizzare nella vostra mente questa trottola: il suo asse potrà essere inclinato di 20°, 5°, 14°, ecc., il vostro amico non l’ha specificato; la trottola potrà ruotare in senso orario o antiorario vista dall’alto: l’importante è che ruoti a 5 rad/s...



Un modo per quantificare sia l’ampiezza dell’angolo percorso, sia la direzione dell’asse di rotazione e il verso di quest’ultima in un determinato sistema di riferimento sta nel modificare lievemente il concetto di velocità angolare *scalare* e sostituirlo con un *vettore*. Questo vettore ha modulo pari alla velocità angolare scalare, direzione parallela all’asse di rotazione

e verso così determinabile: avvolgete le quattro dita opposte al pollice della mano destra nel verso della rotazione, come per fare un “OK” con la mano: il pollice punterà nel verso del vettore velocità angolare.



Indichiamo tale vettore con ω .

Per esempio, in un moto circolare uniforme che si svolge sul piano del foglio in senso antiorario, il vettore velocità angolare è costante, esce perpendicolarmente dal foglio e punta verso il lettore.

Chiaramente possiamo riscrivere le relazioni cinematiche relative al moto circolare attraverso tale vettore; per esempio, la velocità tangenziale è esprimibile tramite la seguente formula, dove r è il raggio vettore (congiungente centro-punto)

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

Momento d'inerzia

L'esperienza mostra che è più difficile, a parità di momento torcente (= momento di una forza) applicato, mettere in rotazione attorno a un asse fisso un oggetto che:

- 1) Ha massa maggiore di un altro, a parità di distanza dall'asse;
- 2) Ha distanza dall'asse maggiore di un altro, a parità di massa.

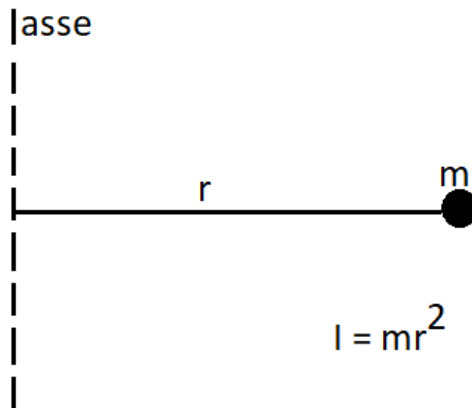
La medesima difficoltà (con uguali caratteristiche) si riscontra quando vogliamo fermare un oggetto in rotazione. Il corpo tende a mantenere, in assenza di interventi esterni, la propria velocità angolare inalterata. Possiamo riferirci a tale tendenza come a una sorta di *inerzia rotazionale*.

Esiste una grandezza fisica che quantifichi l'inerzia posseduta da un corpo? Nel caso del moto traslatorio, la grandezza caratteristica è la *massa inerziale*: un corpo con una maggiore massa inerziale rispetto a un altro tenderà, a parità di forza applicata, a modificare meno la sua velocità.

In regime rotatorio, una grandezza analoga esiste ed è chiamata *momento d'inerzia*.

Il momento d'inerzia di un punto materiale di massa m rispetto a un asse posto a distanza r è una grandezza scalare così definita:

$$I = mr^2$$



L'unità di misura di tale grandezza è il $kg * m^2$.

Il momento d'inerzia è una grandezza additiva: il momento d'inerzia di un corpo è pari alla somma dei momenti d'inerzia delle sue componenti. Dunque, per un sistema di N punti materiali aventi massa m_i e distanze r_i da un determinato asse fisso, si ha:

$$I_{tot} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

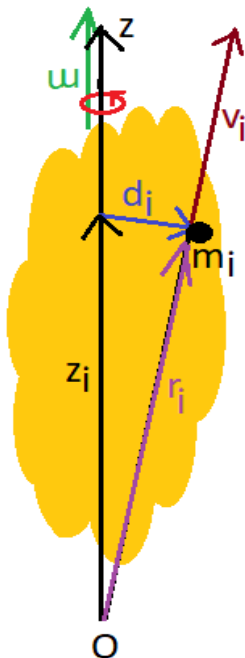
Corpo rigido

Immaginate un corpo con la seguente proprietà: i suoi punti non modificano mai la loro posizione reciproca. In altre parole, il corpo è un *corpo rigido*.

Anche per un corpo rigido valgono le equazioni cardinali scritte sopra: possiamo infatti considerarlo come un insieme di infiniti punti materiali di massa infinitesima.

Chiaramente, se poniamo in rotazione un corpo di questo genere attorno a un asse, ogni punto descriverà una traiettoria circolare, e, per via della rigidità, il moto di tutti i punti sarà caratterizzato dall'avere lo stesso vettore velocità angolare: perciò, possiamo riferirci in generale al vettore velocità angolare del corpo rigido.

Vogliamo trovare la relazione che lega la velocità angolare di un corpo rigido con il suo momento angolare, e poi utilizzare una delle equazioni cardinali della meccanica: otterremo un importante risultato, che spiega anche numerose esperienze quotidiane...



Supponiamo di avere un corpo rigido ruotante con velocità angolare istantanea ω attorno a un asse fisso. Scegliamo l'origine del sistema di riferimento sull'asse di rotazione, e l'asse z coincidente con l'asse di rotazione. Immaginiamo di suddividere il corpo rigido in un'infinità di punti materiali, ciascuno di massa (infinitesima) m_i .

Chiamiamo \mathbf{r}_i il vettore che congiunge l'origine con il punto i -esimo, mentre \mathbf{d}_i il vettore che congiunge perpendicolarmente l'asse col punto i -esimo (vedi figura). Sia z_i la quota rispetto all'origine del punto i -esimo.

Si ha:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$$

Valgono le seguenti relazioni, che sostituiamo nella formula di \mathbf{L} :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{z}_i + \mathbf{d}_i \quad \mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_i$$

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{z}_i + \mathbf{d}_i) \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{z}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_i) + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{d}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_i)$$

In queste espressioni compaiono tripli prodotti vettoriali: semplifichiamoli attraverso la regola “BAC-CAB” vista nel capitolo dell’algebra vettoriale:

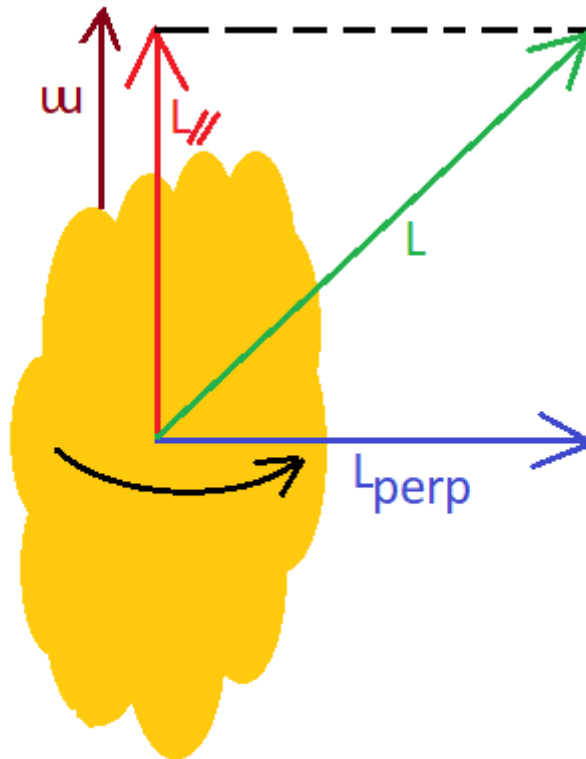
$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{z}_i * \mathbf{d}_i) - \mathbf{d}_i(\mathbf{z}_i * \boldsymbol{\omega})] + \sum_{i=1}^N m_i [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{d}_i * \mathbf{d}_i) - \mathbf{d}_i(\mathbf{d}_i * \boldsymbol{\omega})]$$

Il termine $(\mathbf{z}_i * \mathbf{d}_i)$ è nullo: i due vettori sono infatti perpendicolari. \mathbf{z}_i e $\boldsymbol{\omega}$ sono paralleli: il loro prodotto scalare è pari al prodotto dei loro moduli (idem per \mathbf{d}_i che moltiplica se stesso). \mathbf{d}_i e $\boldsymbol{\omega}$ sono perpendicolari: il loro prodotto scalare è nullo. In definitiva si ha:

$$\mathbf{L} = -\boldsymbol{\omega} \sum_{i=1}^N m_i z_i d_i + \left(\sum_{i=1}^N m_i d_i^2 \right) \boldsymbol{\omega}$$

Il termine dentro parentesi è uguale a I (momento d’inerzia). Il primo termine è un vettore diretto perpendicolarmente a $\boldsymbol{\omega}$ (dunque all’asse), mentre il secondo termine ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\boldsymbol{\omega}$ (dunque sta sull’asse). Il momento angolare \mathbf{L} quindi si scrive tramite la somma vettoriale di due componenti: una parallela all’asse pari a $I\boldsymbol{\omega}$ e una perpendicolare (indichiamola con \mathbf{L}_{perp}). Quindi:

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{L}_{perp}$$



Essendo il corpo rigido, il vettore \mathbf{L}_{perp} ruota nel sistema di riferimento scelto, puntando sempre verso lo stesso punto: in conseguenza di ciò, la retta su cui giace il momento angolare \mathbf{L} descrive un doppio cono (se ω si mantiene costante); se ω non si mantiene costante, la retta su cui giace \mathbf{L} “oscilla” a seconda del valore di ω .

Il risultato trovato ci insegna che, in generale, *l'asse di rotazione non coincide con la retta su cui giace il momento angolare*. Quand'è che tali direzioni coincidono, ossia \mathbf{L} giace sull'asse di rotazione? \mathbf{L} dev'essere parallelo ad ω , perciò è sufficiente che il termine \mathbf{L}_{perp} s'annulli. Affinché tale termine s'annulli, è sufficiente che, a parità di \mathbf{z} , a ciascun punto (individuato dal vettore \mathbf{d}_i) ne corrisponda un altro diametralmente opposto (individuato dal vettore $-\mathbf{d}_i$), in maniera tale che i contributi dovuti a \mathbf{d}_i si annullino a vicenda. Tale configurazione si ha, per esempio, nei solidi di rotazione, generabili attraverso la rotazione di una figura piana attorno a un asse.

Chiaramente, essendo I costante per un corpo rigido, si ha:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = I \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Definiamo il vettore $\frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ *accelerazione angolare* e lo indichiamo con la lettera α : esso quantifica la rapidità con cui cambia il vettore velocità angolare nel tempo, esattamente come l'accelerazione indica la rapidità con cui cambia il vettore velocità nel tempo.

Perciò:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = I \alpha$$

Ma, applicando la seconda equazione cardinale della meccanica, otteniamo:

$$\tau_{ext_{tot}} = I \alpha$$

Questa relazione somiglia moltissimo alla ben nota $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

*$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ significa che maggiore è la massa inerziale (indice dell'inerzia traslazionale di un corpo), minore è il cambiamento di velocità subito dal corpo (quantificato da \mathbf{a}) a parità di forza applicata;
 $\tau = I\alpha$ significa che maggiore è il momento d'inerzia (indice dell'inerzia rotazionale di un corpo), minore è il cambiamento di velocità angolare subito dal corpo (quantificato da α) a parità di momento torcente applicato.*

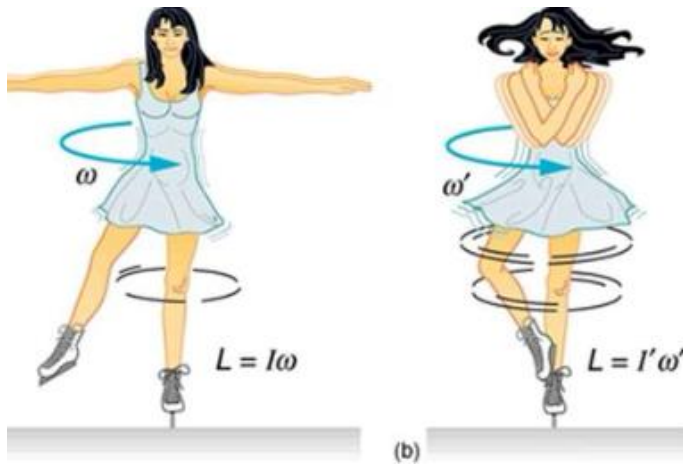
Se la risultante di tutte le forze che agiscono sul corpo è pari a $\mathbf{0}$, il corpo si muove di moto rettilineo uniforme.

Se la risultante di tutti i momenti delle forze esterne che agiscono sul corpo rigido è pari a $\mathbf{0}$, il corpo rigido ruota con velocità angolare costante, ossia il moto di ogni suo punto è circolare uniforme attorno all'asse.





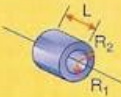




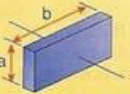
Se la massa di un corpo in rotazione è maggiormente concentrata attorno all'asse, il suo momento d'inerzia è minore. Quest'ultima affermazione

giustifica come facciano le pattinatrici su ghiaccio a compiere spettacolari piroette, raggiungendo velocità angolari impressionanti.

La ballerina inizialmente parte a ruotare su se stessa con le braccia e le gambe abbastanza estese: il suo momento d'inerzia è abbastanza alto. Poi, rapidamente, raccoglie braccia e gambe vicino all'asse di rotazione che passa per il suo corpo: il suo momento d'inerzia si abbassa notevolmente, ma il momento angolare si deve conservare: la velocità angolare di rotazione della ballerina aumenterà dunque notevolmente.



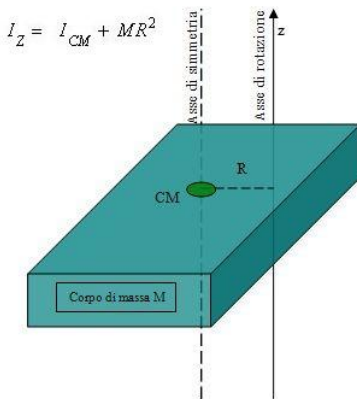
Momento d'inerzia di alcuni solidi

<p>Guscio cilindrico, rispetto all'asse</p> $I = mR^2$ 	<p>Asta sottile, rispetto a una retta perpendicolare passante per il suo centro</p> $I = \frac{1}{12}mL^2$ 
<p>Cilindro pieno, rispetto all'asse</p> $I = \frac{1}{2}mR^2$ 	<p>Asta sottile, rispetto a una retta perpendicolare passante per una estremità</p> $I = \frac{1}{3}mL^2$ 
<p>Cilindro cavo, rispetto all'asse</p> $I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$ 	<p>Guscio sferico sottile, rispetto a un diametro</p> $I = \frac{2}{3}mR^2$ 
<p>Guscio cilindrico, rispetto a un diametro passante per il centro</p> $I = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$ 	<p>Sfera piena, rispetto a un diametro</p> $I = \frac{2}{5}mR^2$ 
<p>Cilindro pieno, rispetto a un diametro passante per il centro</p> $I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$ 	<p>Parallelepipedo rettangolo pieno, rispetto a un asse passante per il centro, perpendicolare a una faccia</p> $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ 

Teorema di Huygens-Steiner

Abbiamo visto come si definisce il momento d'inerzia di un punto materiale e fornito una tabella che elenca i momenti d'inerzia per solidi rigidi notevoli. Non ha senso parlare di momento d'inerzia di un corpo come di una sua proprietà intrinseca, come accade per la massa. Se poniamo in rotazione il corpo attorno a un determinato asse, per esempio quello che passa per il suo centro di massa, al corpo assoceremo un determinato momento d'inerzia. Se cambiamo l'asse, il momento d'inerzia cambierà e dovremo dunque ricalcolarlo per descrivere il nuovo moto rotatorio. Dunque, *il valore del momento d'inerzia dipende anche dalla posizione dell'asse attorno cui si svolge il moto rotatorio rispetto al corpo che ruota.*

I valori che trovate in tabella sono ricavati grazie all'uso del calcolo infinitesimale (che voi studierete presumibilmente più avanti), e spesso gli assi che si considerano sono gli assi di simmetria dei solidi notevoli (passanti generalmente per il centro di massa). Come fare per ricavare il momento d'inerzia del medesimo solido rigido rispetto a un altro asse? È necessario ricalcolarlo daccapo? Oppure è possibile, a partire da un valore noto, ricavarne uno ignoto più rapidamente?



La risposta a quest'ultima domanda è affermativa ed è fornita dal *Teorema di Huygens-Steiner* o *Teorema degli assi paralleli*:

Sia I_{cm} il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto a un asse passante per il suo centro di massa: allora il momento d'inerzia I del medesimo corpo rispetto a un asse parallelo al primo e distante d da esso è dato da:

$$I = I_{cm} + md^2$$

Esempio: Calcolare il momento d'inerzia di una sfera omogenea di massa $m=100 \text{ kg}$ e raggio $R=1 \text{ m}$ rispetto a un asse tangente la sua superficie.

Soluzione:

Il momento d'inerzia di una sfera omogenea rispetto a un qualsiasi asse passante per il suo centro (che è anche il suo centro di massa) è dato da:

$$I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$$

Applichiamo il teorema appena citato: l'asse a cui si riferisce la traccia è parallelo a un opportuno asse passante per il centro di massa della sfera e dista R da esso: quindi:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{5} mR^2 + mR^2 = \left(\frac{2}{5} + 1 \right) mR^2 = \frac{7}{5} mR^2 = 1.4 * 100 * 1^2 \text{ kg m}^2 = \\ &= 140 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

Energia cinetica rotazionale

Consideriamo un corpo rigido che compie un moto generico nello spazio: in virtù del vincolo di rigidità, il suo moto può essere scomposto in due movimenti più elementari:

- 1) Una traslazione nello spazio con velocità pari alla velocità del suo centro di massa: infatti i punti non possono modificare le loro posizioni reciproche;
- 2) Una rotazione (più o meno complessa) attorno a un determinato asse, nel sistema di riferimento del centro di massa: infatti in tale sistema la velocità del centro di massa è nulla.

Di conseguenza, l'energia cinetica totale di questo corpo in un dato sistema di riferimento è dovuta sia al moto di rotazione sia a quello di traslazione: è dunque errato ritenere che essa sia pari esclusivamente a:

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

Riprendiamo un'equazione scritta nel paragrafo *Sistema di due corpi*:

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + K_{cm}$$

Ove K_{cm} rappresenta l'energia cinetica del corpo nel sistema di riferimento del centro di massa: un'energia rotazionale, appunto: come fare a determinarla? Dividiamo il corpo rigido in un numero molto grande di parti, così piccole da poterle assimilare a punti materiali, e sommiamo i vari contributi all'energia cinetica nell'ipotesi che in tale sistema l'asse si mantenga fisso:

$$K_{cm} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Ove v_i è il modulo della velocità della particella i -esima nel s. r. del centro di massa. Ma, come abbiamo già precisato, ogni punto del corpo rigido descrive attorno all'asse fisso un moto circolare con velocità angolare ω , dunque:

$$v_i = \omega d_i$$

Ove con d_i abbiamo indicato la distanza tra il punto i -esimo e l'asse fisso; pertanto:

$$K_{cm} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega d_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i d_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Per cui:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

316

Il primo termine è chiamato *energia cinetica rotazionale*, il secondo *energia cinetica traslazionale*.

Esercizi

Sulla conservazione del momento angolare

Betelgeuse è una supergigante rossa giunta a una fase piuttosto avanzata della sua evoluzione. La sua massa è pari a circa 20 masse solari. Pertanto è possibile che tale stella esploda come supernova (se l'esplosione non è già avvenuta), e si trasformi in una stella di neutroni. Se, invece di espellere gli strati più esterni, Betelgeuse conservasse tutta la sua massa, e si contraesse fino a raggiungere le dimensioni di una stella di neutroni (assumete $R=15$ km), con che periodo ruoterebbe su se stessa? Fate la grossolana approssimazione di considerare Betelgeuse una sfera omogenea e rigida, che ruota su se stessa attualmente con un periodo di 17 anni e possiede un raggio pari a circa 990 raggi solari.

317

Soluzione:

Durante la contrazione non intervengono forze esterne: il momento angolare si conserva, per cui

$$L = I\omega$$

$$L_i = L_f$$

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$\frac{2}{5}MR_i^2\omega_i = \frac{2}{5}MR_f^2\omega_f$$

$$\omega_f = \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2 \omega_i = \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2 \frac{2\pi}{T_i}$$

$$\frac{2\pi}{T_f} = \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2 \frac{2\pi}{T_i} \rightarrow T_f = \left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2 T_i$$

$$T_f = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

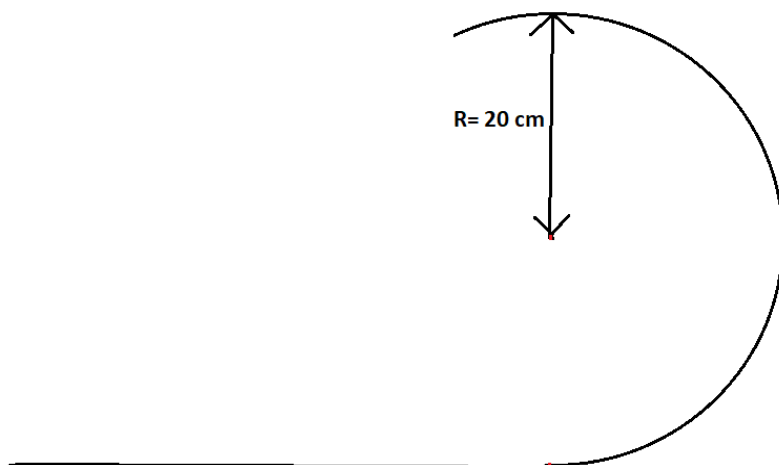
Chiaramente otteniamo un valore molto piccolo, 250 nanosecondi! In realtà la massa di Betelgeuse varierà durante il collasso, per via dell'espulsione degli strati più esterni, e perciò il periodo di rotazione della stella di neutroni

risultante sarà maggiore (tipici valori per stelle di neutroni: da qualche millisecondo a qualche secondo).

Sul corpo rigido ed energia rotazionale

318

Si supponga di lanciare una monetina (disco omogeneo di diametro 23.25 mm, spessore 2.33 mm e massa 7.5 g -descrizione di una moneta da 1 €-) di taglio lungo il percorso in figura: determinare la velocità iniziale con cui è necessario lanciarla, nell'ipotesi che essa percorra il profilo in figura rotolando senza strisciare, affinché essa si distacchi dal profilo esattamente nel punto più alto.



Soluzione:

La forza peso è l'unica forza agente sulla moneta a compiere lavoro, quindi l'energia meccanica si conserva. Inizialmente, la moneta ruota attorno all'asse perpendicolare al piano del foglio e, nel tratto piano, il suo centro di massa è alto r (raggio della moneta).

Quando giunge nel punto più alto del profilo, non ruoterà più (si sta per staccare), su di essa non agirà più la reazione vincolare del profilo, ma

soltanto la forza peso, da cui dipenderà il valore della velocità tangenziale in quel punto (v_f), infatti:

$$g = \frac{v_f^2}{R - r}$$

Ove $R-r$ è il raggio di curvatura del moto del centro di massa nel punto più alto della traiettoria. Dunque

$$v_f^2 = g(R - r)$$

Imponiamo la conservazione dell'energia meccanica (cinetica, a sua volta sia traslazionale che rotazionale + potenziale gravitazionale) tra inizio e fine:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}I_{moneta}\omega_i^2 + mgr = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg(2R - r)$$

La moneta è assimilabile a un disco omogeneo:

$$I_{disco} = \frac{1}{2}mr^2$$

Inoltre la moneta *rotola senza strisciare*: vale dunque la seguente relazione:

$$v = \omega r$$

Per cui:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2} * \frac{1}{2}mr^2 * \frac{v_i^2}{r^2} + mgr = \frac{1}{2}mg(R - r) + mg(2R - r)$$

$$\frac{1}{2}v_i^2 + \frac{1}{4}v_i^2 + gr = \frac{1}{2}gR - \frac{1}{2}gr + 2gR - gr$$

$$\frac{3}{4}v_i^2 = \frac{5}{2}gR - \frac{5}{2}gr$$

$$\frac{3}{4}v_i^2 = \frac{5}{2}g(R - r)$$

$$v_i^2 = \frac{5}{2} * \frac{4}{3}g(R - r) = \frac{10}{3}g(R - r)$$

$$v_i = \sqrt{\frac{10}{3}g\left(R - \frac{d}{2}\right)} = 2.48 \frac{m}{s}$$

ELEMENTI di STATISTICA

Gli errori di misura

Per *misura* si intende una determinata procedura attraverso la quale si assegna un intervallo di valori numerici a una determinata grandezza: il processo di misura si deve basare dunque sui seguenti punti:

- 1) Una descrizione accurata del sistema fisico in esame e della grandezza da misurare;
- 2) Una descrizione accurata degli strumenti con i quali effettuare la misura e del loro utilizzo.

Perché abbiamo affermato che l'esito di una misura di una grandezza fisica è un *intervallo di valori* piuttosto che un ben determinato valore?

Durante il processo di misura intervengono una serie di fattori (anche molto diversi tra loro) che tendono a “spostare” il risultato dal valore *vero* di quella determinata grandezza; quest'ultimo, dunque, è inconoscibile. Dal momento che non possiamo determinare sperimentalmente il valor vero di una determinata grandezza, è necessario associare un'*incertezza* a ogni misura, ossia esprimerne l'esito come un intervallo di valori con una certa ampiezza, tipicamente centrato su un valore che potremmo definire *ottimale*.

Spesso si fa confusione tra i termini *incertezza* ed *errore*: essi sono spesso usati come sinonimi, ma in realtà tra di essi intercorre una sottile differenza concettuale.

L'*errore* è definito come il valore assoluto della differenza tra il valore ottimale misurato e il valor vero di una determinata grandezza: essendo inconoscibile il valor vero, anche l'entità dell'errore è inconoscibile.

Quindi l'effettuazione di una misura consiste nella determinazione della *miglior stima del valor vero di una determinata grandezza* (cioè nella determinazione di un valore ottimale) e della *miglior stima dell'errore sulla misura* (ovvero l'incertezza).

Pertanto, l'esito della misura di una grandezza G sarà così genericamente espresso:

$$G = (x_{ottimale} \pm \Delta x) \text{ u. m.}$$

$$\Delta x = \text{incertezza}$$

Dove con la dicitura “u. m.” si intende l'opportuna unità di misura.

Esempio: abbiamo misurato la massa di una persona ottenendo

$$m = (81.2 \pm 0.3) \text{ kg}$$

321

Prima di analizzare brevemente le tipologie di errore e le loro cause, notiamo che è possibile esprimere l'incertezza su una misura in due modi:

- 1) Sotto forma di *incertezza assoluta*: essa corrisponde all'intervallo Δx e ha le stesse dimensioni della grandezza G (0.3 kg nell'esempio sopra);
- 2) Sotto forma di *incertezza relativa* (detta anche *precisione*): essa corrisponde al rapporto tra l'incertezza assoluta e il valore ottimale della grandezza, ossia:

$$\text{incertezza relativa} = \frac{\Delta x}{x_{ottimale}}$$

Pertanto, l'incertezza relativa è adimensionale.

Nell'esempio sopra:

$$\text{incertezza relativa} = \frac{0.3}{81.2} = 4 * 10^{-3}$$

È possibile esprimere tale incertezza anche in termini percentuali:

$$\text{inc. percentuale} = \frac{\Delta x}{x_{ottimale}} * 100\%$$

Riprendendo sempre l'esempio fatto:

$$\text{inc. percentuale} = 0.4\%$$

Tipologie di misure

Una misura può essere:

- 1) **Diretta:** la grandezza fisica viene direttamente confrontata con la grandezza campione scelta come unità di misura.

Esempio: la misura dell'altezza di una persona attraverso un metro, della massa di un corpo attraverso una bilancia a bracci uguali...

- 2) **Strumentale:** la grandezza fisica da misurare viene *tradotta* in un'altra grandezza dallo strumento di misura; quest'ultimo viene opportunamente *tarato* per restituire direttamente i valori della grandezza in esame.

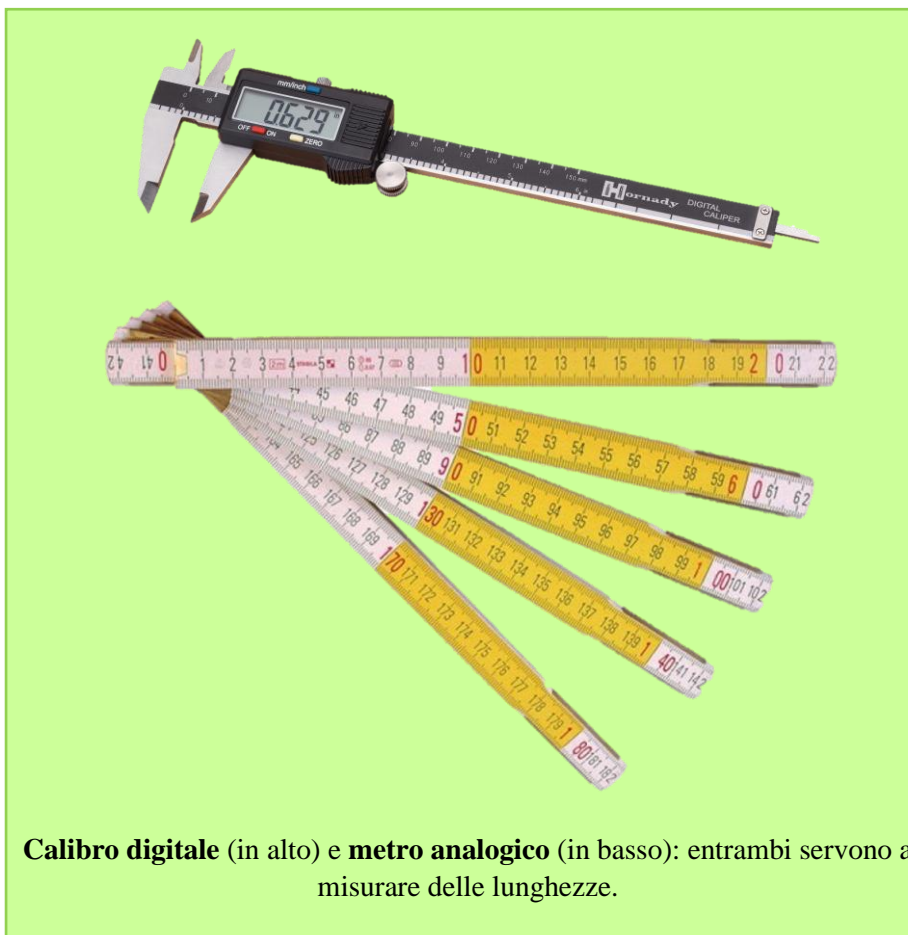
Esempio: la temperatura di un liquido viene misurata con un termometro a mercurio: in realtà, la grandezza *temperatura* viene *tradotta* dallo strumento (il termometro), in un'altra grandezza, ossia l'*altezza* della colonnina di mercurio. Il termometro è *tarato* in maniera tale che noi possiamo leggere direttamente la temperatura, ossia il costruttore del termometro si incarica di effettuare la conversione altezza colonnina → temperatura.

- 3) **Indiretta:** il valore della grandezza fisica viene determinato attraverso una formula fisica che lega tra di loro altre grandezze.

Esempio: misura del peso di un oggetto attraverso la formula $P = mg$, avendo misurato direttamente m e g .

Gli strumenti di misura possono essere analogici o digitali:

- 1) **Strumenti analogici:** la misura si effettua individuando un punto su una scala graduata oppure valutando la posizione di un ago o altro indicatore;
- 2) **Strumenti digitali:** il valore ottimale della misura compare su uno schermo, lo sperimentatore deve leggerlo.



Calibro digitale (in alto) e **metro analogico** (in basso): entrambi servono a misurare delle lunghezze.

Tipologie di errori

Errori massimi (o strumentali)

324

Gli strumenti utilizzati per effettuare una misura hanno una certa *risoluzione* che li caratterizza. Con tale termine intendiamo la minima variazione del valore della grandezza che lo strumento riesce ad apprezzare. Ad esempio, un normale righello possiede tipicamente una risoluzione di 1 mm, ossia la distanza tra due “tacche” più vicine è pari a 1 mm. Quando effettueremo una misura di lunghezza con tale righello, tipicamente assoceremo al valore ottimale trovato un’incertezza pari alla risoluzione dello strumento, non riuscendo a quantificare frazioni di lunghezza inferiori alla minima distanza fra due tacche adiacenti della scala.

In questo caso, l’errore che viene introdotto nel processo di misura è un errore *massimo* o *strumentale*, ossia *il valore vero della grandezza in esame è incluso nell’intervallo definito dal valore ottimale e dall’incertezza*. In altri termini, vi è una probabilità del 100% che il valor vero della grandezza cada nell’intervallo suddetto.

Errori sistematici

Può succedere che l’esito di una misura si discosti dal valore vero per via d’una serie di cause incontrollate *ma in linea di principio controllabili*, che determinano una sottostima o una sovrastima sistematica del valore della grandezza: in questo caso siamo in presenza di un errore *sistematico*. In altre parole, otteniamo un valore misurato sistematicamente maggiore oppure minore rispetto, ad esempio, a un valore di riferimento. Alcune situazioni tipiche in cui ciò si verifica sono le seguenti:

- 1) Lo strumento di misura è calibrato male o non riproduce fedelmente l’unità di misura (per esempio, le tacche del righello di cui sopra non distano esattamente 1 mm ma leggermente di più, ciò comporta che le lunghezze misurate con questo strumento siano sottostimate);

- 2) Si sta adoperando lo strumento in condizioni operative diverse da quelle per cui esso è stato progettato.

Esempio: il manuale di un sensore di temperatura per liquidi specifica che lo strumento va inserito completamente nel recipiente: inserirlo solo parzialmente può introdurre nel processo di misura degli errori sistematici;

- 3) La grandezza misurata non corrisponde in realtà con quella che si vorrebbe misurare.

Esempio: vogliamo misurare l'attività di una sorgente radioattiva, ma nei dati raccolti è presente anche il fondo ambientale: l'attività della sorgente viene così sovrastimata.

Una procedura che riduce maggiormente l'impatto degli errori sistematici rispetto a un'altra si definisce più *accurata*.

Errori casuali

Misure *ripetute* di una stessa grandezza possono dare esiti diversi per via di una serie di fattori, fluttuazioni incontrollabili: siamo in presenza di *errori casuali*. Per esempio, supponete di misurare per 100 volte con un cronometro al centesimo di secondo il tempo di discesa di una sferetta lungo un piano inclinato: verosimilmente non otterrete 100 valori uguali, bensì una serie di valori che ricorrono (cioè sono frequenti) in modo variabile.

In generale, le cause della variabilità delle misure ripetute possono essere svariate, ad esempio:

- 1) La grandezza in esame caratterizza una popolazione di individui, e il suo valore varia da individuo a individuo. Esempio: l'altezza degli abitanti di una città;
- 2) La grandezza in esame è *intrinsecamente casuale* (o *intrinsecamente stocastica*)

Esempio: il decadimento radioattivo è un fenomeno intrinsecamente casuale;

- 3) La risoluzione dello strumento utilizzato è così buona da far sì che si superi il limite di riproducibilità della misura; è il caso dell'esempio a inizio paragrafo, in cui il cronometro al centesimo di secondo possiede

una buona risoluzione... se ne avessimo usato uno con una risoluzione di 1 s, probabilmente non avremmo ottenuto variabilità su misure ripetute, bensì misure tutte uguali.

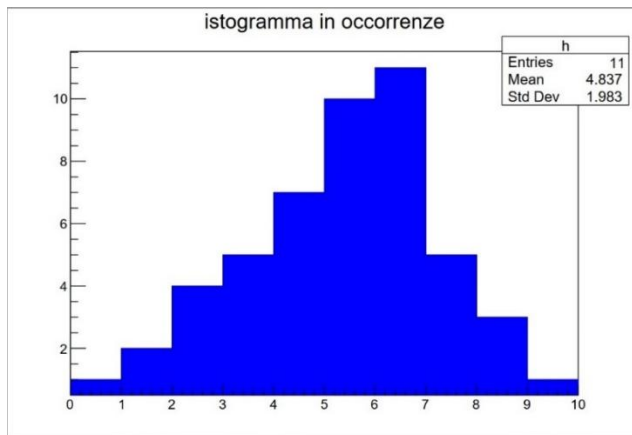
I fattori che provocano errori casuali agiscono, a differenza di ciò che accade in presenza di errori sistematici, in entrambi i versi, e all'aumentare del numero di misure il loro effetto tende dunque statisticamente ad annullarsi. Tali errori si possono perciò trattare rigorosamente attraverso gli strumenti della statistica e del calcolo delle probabilità.

Quando effettuiamo misure ripetute di una stessa grandezza in presenza di fluttuazioni casuali otteniamo un *campione sperimentale* (ossia l'insieme dei valori trovati). Immaginiamo che tale campione sia estratto da una *popolazione*, ossia l'insieme di tutti i possibili valori teoricamente ottenibili come esito di una misura di quella grandezza. Ogni singolo valore di quest'insieme prende il nome di *individuo*.

Possiamo rappresentare graficamente l'esito di un campionamento, per esempio attraverso un istogramma.

L'istogramma può mostrare in ascissa gli intervalli relativi ai valori ottenuti e in ordinata il numero di misure (ossia il numero di *occorrenze*) il cui valore cade in ciascun determinato intervallo. Un istogramma di questo tipo prende il nome di *istogramma in occorrenze*.

Esempio: si consideri la figura qui sotto. Essa mostra un istogramma in occorrenze: come si può vedere, abbiamo ottenuto, per esempio, 4 misure comprese fra i valori 2 e 3, una misura soltanto nel range 0-1... mentre la maggior parte di valori ottenuti (ben 11 misure) è nel range 6-7.



Possiamo anche confrontare istogrammi ottenuti da campionamenti con un numero totale di misure diverso, tuttavia a tal fine l'istogramma in occorrenze non è molto adatto; è preferibile servirsi di un istogramma in frequenze. La frequenza relativa a un generico intervallo k è così definita:

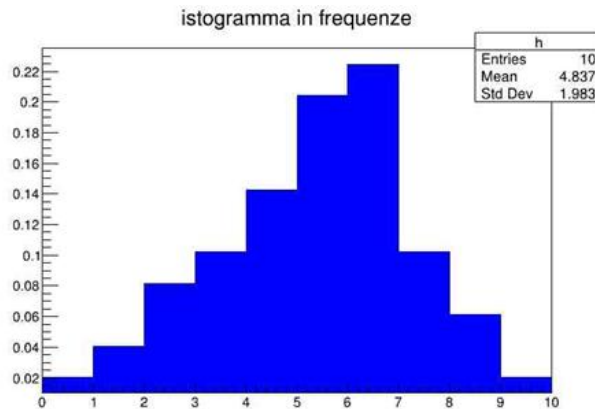
$$f_k = \frac{n_k}{N_{tot}}$$

Dove con n_k si intende il numero di occorrenze in quel determinato intervallo, mentre N_{tot} è il numero totale di misure (la somma di tutte le occorrenze nei vari intervalli). Per esempio, nel nostro istogramma $N_{tot} = 49$ (provate a contare voi stessi le occorrenze totali), e se prendiamo in esame l'intervallo 6-7, allora $n_{6-7} = 11$. Dunque

$$f_{6-7} = \frac{11}{49} = 0.22$$

Ossia il 22% delle misure cade nell'intervallo 6-7.

L'istogramma in frequenze si costruisce calcolando le frequenze per ciascun intervallo con la formula riportata e riportandole in ordinata. Le ascisse restano invariate. Qui sotto riportiamo l'istogramma in frequenze realizzato a partire dal precedente istogramma:



Istogramma in frequenze ottenuto a partire dall'ist. precedente: notare, come già calcolato sopra, come il picco abbia una frequenza pari a circa 0.22. Si provi a calcolare come esercizio le altre frequenze e a confrontarle con tale istogramma.

Dalle figure potete notare come il campione sia distribuito attorno a un valore “di picco”, a cui compete una frequenza maggiore, ma contemporaneamente si estenda sia a valori maggiori sia a valori minori rispetto all’intervallo a maggior frequenza.

328

Come possiamo comportarci se volessimo riassumere l’esito del nostro campionamento in maniera più sintetica, senza cioè riportare tutti i valori ottenuti? Possiamo definire alcuni parametri rappresentativi del campione, che rientrano in generale nelle categorie degli *indici di posizione* e degli *indici di dispersione*. I primi quantificano sinteticamente la posizione complessiva dei dati del campione nella scala dei valori che può assumere la grandezza in esame: possono dunque essere usati per determinare il valore ottimale della grandezza. Nel caso del campione rappresentato attraverso gli istogrammi in figura, possiamo notare come esso si posizioni complessivamente attorno al valore 6.

Gli indici di *dispersione* quantificano l’ampiezza della dispersione (cioè dello scostamento) dei singoli valori del campione dall’indice di posizione: possono essere utilizzati per stimare l’incertezza sul valore ottimale.

Tipici indici di posizione

Centro intervallo

È così definito:

$$x_c = \frac{x_{massimo} + x_{minimo}}{2}$$

Ove $x_{massimo}$ è il valore più alto del campione e x_{minimo} è il minimo. Corrisponde, come dice il nome stesso, al valore che sta a metà tra il massimo e il minimo del campione.

329

Moda

È il valore che ricorre con maggiore frequenza.

Mediana

Per determinare la mediana ordiniamo in modo crescente gli elementi del campione: se il numero di elementi è dispari, la mediana sarà il valore centrale di questa sequenza; se è pari, vi saranno due valori centrali: la mediana corrisponde alla semisomma di tali due valori (che è a metà strada tra i due).

Esempio: determinare la mediana dati i valori 11, 3, 5, 2, 7, 14.

Ordiniamo i valori in ordine crescente

2 3 5 7 11 14

Essi sono in numero pari, dunque

$$mediana = \frac{5 + 7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Media aritmetica (tipicamente l'indice di posizione più usato)

Essa è pari al rapporto tra la somma di tutti i valori del campione e il numero totale di misure:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

330

Esempio: *Calcolare la media dei valori dell'esempio precedente.*

$$\bar{x} = \frac{11 + 3 + 5 + 2 + 7 + 14}{6} = 7$$

Tipici indici di dispersione

Semidispersione massima

Quantifica la “semiampiezza massima” dei valori del campione ed è così definita:

$$\text{semidisp. massima} = \frac{x_{\text{massimo}} - x_{\text{minimo}}}{2}$$

Esempio: usando i valori dell’esempio di cui sopra, otteniamo

$$\text{semidisp. massima} = \frac{14 - 2}{2} = 6$$

331

Scarto medio

Data una generica misura x_i di un campione, definiamo così il suo scarto d rispetto alla media:

$$d = x_i - \bar{x}$$

(differenza tra il valore e la media).

Chiaramente, la somma di tutti gli scarti deve fare 0. Infatti:

$$\text{somma scarti} = \sum_{i=1}^N d_i = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \bar{x} = N\bar{x} - N\bar{x} = 0$$

Come fare a non far annullare il contributo complessivo di tali scarti? Potremmo considerare ciascuno di essi in valore assoluto. Definiamo *scarto medio* la media dei valori assoluti degli scarti:

$$\bar{d} = \sum_{i=1}^N |d_i| = \frac{|d_1| + |d_2| + \dots + |d_N|}{N}$$

Deviazione standard (o scarto quadratico medio)

Essa è pari alla radice quadrata del rapporto tra la somma dei quadrati degli scarti e il numero totale delle misure diminuito di 1.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \\ &= \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N-1}}\end{aligned}$$

La deviazione standard del campione rappresenta *la miglior stima dell'incertezza che è possibile associare a una singola misura del campione stesso*: in altre parole, se effettuassimo un'ulteriore misura, il valore trovato avrebbe una probabilità abbastanza alta di cadere nell'intervallo con centro nella media aritmetica del campione e ampio $\pm\sigma_x$. Qualora effettuassimo campionamenti sufficientemente numerosi, ma con un diverso numero di misure per ciascuno, noteremmo che il valore di σ_x cambierebbe di poco.

Perché a denominatore compare un N-1 al posto di N? La spiegazione è da ricercarsi nel numeratore. A numeratore compaiono gli scarti delle singole misure, che, come ormai sappiamo, non sono tutti indipendenti. Dal momento che la loro somma deve dare 0, conoscendo N-1 valori degli scarti potremmo determinare l'N-esimo. Se per esempio la somma dei primi N-1 scarti fa 0.3, l'N-esimo scarto dev'essere pari a -0.3 perché la somma complessiva deve dare 0. Dunque, gli scarti *indipendenti* (cioè quelli che possono assumere un determinato valore indipendentemente dal valore degli altri) sono in realtà N-1. Ecco perché a denominatore si divide per N-1.

Abbiamo detto che la deviazione standard del campione è la miglior stima dell'incertezza da associare a ogni singola misura del campione. Ma qual è la miglior stima dell'incertezza da associare alla media aritmetica di un campione? Essa prende il nome di *deviazione standard della media* e si calcola così:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Ovvero la *deviazione standard della media* è pari al rapporto tra la *deviazione standard del campione* e la *radice del numero totale di misure*.

Al crescere del numero di misure, la deviazione standard della media diminuisce: ciò ha senso, dal momento che, disponendo di un numero di misure via via maggiore, la media tende ad avvicinarsi al valor vero della grandezza in esame. Al limite, se potessimo effettuare un campionamento con un N tendente a infinito, la media del campione sarebbe uguale al valor vero della grandezza in esame.

Dunque, la misura di una grandezza G affetta da errori casuali, di cui si è raccolto un campione di valori, può essere così espressa:

$$G = (\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}) \text{ u. m.}$$

TABELLA DATI

Sole

Raggio medio	695475 km
Massa	$1.99 * 10^{30} kg$
Temperatura	5778 K
Magnitudine apparente dalla Terra	-26.74
Magnitudine assoluta	+4.83
Età stimata	$4.57 * 10^9 anni$
Classe spettrale	G2 V
Posizione nel diagramma H-R	Sequenza principale
Distanza dal centro galattico	$27 * 10^3 a. l.$
Periodo di rivoluzione intorno al centro galattico	$2.5 * 10^8 anni$

Mercurio

Raggio medio	2440 <i>km</i>
Massa	$3.301 * 10^{23}$ <i>kg</i>
Semiasse maggiore dell'orbita	$57.91 * 10^6$ <i>km</i>
Periodo orbitale	87.969 <i>giorni</i>
Periodo di rotazione	58.646 <i>giorni</i>
Eccentricità dell'orbita	0.2056
Albedo	0.14

Venere

337

Raggio medio	6052 <i>km</i>
Massa	$4.867 * 10^{24}$ <i>kg</i>
Semiasse maggiore dell'orbita	$108.2 * 10^6$ <i>km</i>
Periodo orbitale	224.70 <i>giorni</i>
Periodo di rotazione	-243.03 <i>giorni</i>
Eccentricità dell'orbita	0.0068
Albedo	0.67

Terra

Raggio medio	<i>6378 km</i>
Massa	$5.972 * 10^{24} \text{ kg}$
Semiasse maggiore dell'orbita	$149.6 * 10^6 \text{ km}$
Periodo orbitale	<i>365.25 giorni</i>
Periodo di rotazione	<i>23h 56m 4s</i>
Eccentricità dell'orbita	0.0167
Albedo	0.37

Luna

339

Raggio medio	<i>1738 km</i>
Massa	<i>$7.346 * 10^{22} \text{ kg}$</i>
Semiasse maggiore dell'orbita	<i>$384.4 * 10^3 \text{ km}$</i>
Periodo orbitale	<i>27.322 giorni</i>
Periodo di rotazione	<i>27.322 giorni</i>
Eccentricità dell'orbita	<i>0.0549</i>
Albedo	<i>0.11</i>

Marte

Raggio medio	<i>3397 km</i>
Massa	$6.417 * 10^{23} \text{ kg}$
Semiasse maggiore dell'orbita	$227.9 * 10^6 \text{ km}$
Periodo orbitale	<i>686.97 giorni</i>
Periodo di rotazione	<i>24h 37.4m</i>
Eccentricità dell'orbita	0.0934
Albedo	0.15

Giove

341

Raggio medio	<i>71490 km</i>
Massa	$1.899 * 10^{27} \text{ kg}$
Semiasse maggiore dell'orbita	$778.4 * 10^6 \text{ km}$
Periodo orbitale	<i>11.863 anni</i>
Periodo di rotazione	<i>9h 55.5m</i>
Eccentricità dell'orbita	0.0489
Albedo	0.52

Saturno

Raggio medio	<i>60270 km</i>
Massa	$5.685 * 10^{26} \text{ kg}$
Semiasse maggiore dell'orbita	$1.427 * 10^9 \text{ km}$
Periodo orbitale	<i>29.447 anni</i>
Periodo di rotazione	<i>10h 33.6m</i>
Eccentricità dell'orbita	0.0542
Albedo	0.47

Urano

343

Raggio medio	25560 <i>km</i>
Massa	$8.682 * 10^{25}$ <i>kg</i>
Semiasse maggiore dell'orbita	$2.871 * 10^9$ <i>km</i>
Periodo orbitale	84.017 <i>anni</i>
Periodo di rotazione	−17h 14.4 <i>m</i>
Eccentricità dell'orbita	0.0472
Albedo	0.51

Nettuno

Raggio medio	<i>24770 km</i>
Massa	$1.024 * 10^{26} \text{ kg}$
Semiasse maggiore dell'orbita	$4.498 * 10^9 \text{ km}$
Periodo orbitale	<i>164.79 anni</i>
Periodo di rotazione	<i>16h 6.6m</i>
Eccentricità dell'orbita	0.0086
Albedo	0.41

Superficie e volume di alcuni solidi

Area dell'ellisse	$\pi * a * b$
Superficie della sfera	$4\pi R^2$
Superficie del cilindro	$2\pi R(h + R)$
Volume della sfera	$\frac{4}{3}\pi R^3$
Volume del cilindro	$\pi R^2 h$

Fattori di conversione

1 anno luce		$9460.7 * 10^9 km$	$63240 UA$
1 parsec		$3.2616 anni luce$	$206265 UA$
1 radiante		$57^{\circ} 17' 45''$	$206265''$
Giga (G)	10^9	Micro (μ)	10^{-6}
Mega (M)	10^6	Nano (n)	10^{-9}
Kilo (k)	10^3	Angstrom (\AA)	10^{-10}
Milli (m)	10^{-3}		

Costanti fisiche e dati astronomici

Costante di Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5.670 * 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$
Velocità della luce nel vuoto	$c = 299792458 m s^{-1}$
Costante di Gravitazione Universale	$G = 6.674 * 10^{-11} N m^2 kg^{-2}$
Costante di Wien	$b = 2.898 * 10^{-3} m K$
Accelerazione terrestre s.l.m.	$g = 9.807 m s^{-2}$
Obliquità dell'eclittica	$23^{\circ} 27'$
Lunghezza d'onda a riposo della riga H_{α}	6562.8 \AA
Costante di Hubble	$67 km s^{-1} Mpc^{-1}$ $75 km s^{-1} Mpc^{-1}$

BIBLIOGRAFIA

- ❖ Vittorio Castellani, *Astrofisica Stellare* – Zanichelli Editore
- ❖ Ferdinando Flora, *Astronomia Nautica* – Editore Hoepli
- ❖ Pietro Giannone, *Elementi di Astronomia* – Edizione Pitagora
- ❖ Angeletti Giannone, *Esercizi e complementi di astronomia* – Edizioni Nuova Cultura
- ❖ Margherita Hack, *Corso di Astronomia* – Editore Hoepli
- ❖ Halliday-Resnick, *Fondamenti di fisica* – Zanichelli Editore
- ❖ Giuliano Romano, *Introduzione all'astronomia* – Editore Muzzio
- ❖ Leonida Rosino, *Lezioni di Astronomia* – Edizione Cedam
- ❖ Francesco Saverio Delli Santi, *Introduzione all'astronomia* – Zanichelli Editore
- ❖ Cino Tacchini, *Il Cielo* – UTET Editore
- ❖ Francesco Zagari, *Astronomia sferica e teorica* – Zanichelli Editore
- ❖ *Wikipedia*, sito web
- ❖ *Vialattea.net*, sito web
- ❖ *Treccani*, sito web
- ❖ *Superfici e volumi: problemi di massimo e minimo* – Istituto Italiano Edizioni Atlas