XXIII Campionati Italiani di Astronomia

Finale Nazionale - 7 maggio 2025

Prova Teorica - Categoria Senior

1. Markab alla sua massima altezza

Urania, il pastore abruzzese mascotte della finale, osserva la stella Markab da Teramo (φ = 42° 39' N, λ = 13° 42' E) la sera del 7 ottobre e la vede culminare alle 23h 06m di tempo siderale locale. Calcolate:

a) a che ora di tempo siderale locale Urania vedrà Markab culminare il 2 febbraio osservata da Teramo;

b) a che ora di tempo siderale locale il suo amico Wolfgang, pastore delle Alpi, vede Markab culminare il 7 ottobre da Torino (φ = 45° 04' N, λ = 07° 40' E);

c) l'ascensione retta di Markab.

Soluzione

Osservata da una determinata località una stella culmina quando la sua ascensione retta è uguale al tempo siderale locale. Poiché nell'intervallo di tempo considerato l'ascensione retta ha una variazione trascurabile, Markab culmina allo stesso tempo siderale locale ogni giorno e in ogni località.

a) Urania vedrà Markab culminare alle 23h 06m di tempo siderale locale;

b) Wolfgang vedrà Markab culminare alle 23h 06m di tempo siderale locale;

c) l'ascensione retta di Markab è 23h 06m.

2. Giove e l'asteroide alla deriva

Un asteroide percorre un'orbita, inizialmente circolare, con un periodo orbitale che è esattamente la metà di quello di Giove. Ogni volta che l'asteroide arriva alla minima distanza da Giove, l'eccentricità della sua orbita aumenta di $2.00 \cdot 10^{-6}$ senza però modificare il valore del suo semiasse maggiore. Assumendo che inizialmente Giove e l'asteroide siano allineati con il Sole, dopo quanti anni terrestri l'asteroide arriverà a toccare l'orbita di Giove e quindi a collidere con esso? Assumete l'orbita di Giove circolare.

Soluzione

Detto $\mathbf{T_G}$ il periodo orbitale di Giove, il raggio $\mathbf{a_A}$ (ovvero il semiasse maggiore) dell'orbita inizialmente circolare dell'asteroide si ottiene dalla terza legge di Keplero:

$$a_A = \sqrt[3]{\left(\frac{T_G}{2}\right)^2} \simeq 3.2767 \text{ UA}.$$

L'asteroide raggiunge la distanza minima da Giove quando si trova esattamente tra esso e il Sole. Da quel momento, a ogni orbita di Giove, l'asteroide ne avrà completate due e quindi si ritroverà allineato con Giove. Quindi, ogni periodo T_G l'asteroide aumenterà la sua eccentricità di 0.002 e dopo **N** orbite di Giove percorse in un tempo **t**, l'eccentricità sarà:

$$e = N \cdot 2.00 \cdot 10^{-6} = \frac{t}{T_G} \cdot 2.00 \cdot 10^{-6}.$$

La distanza all'afelio $\mathbf{d_{max}}$ dell'asteroide è:

$$d_{max} = a_A \cdot (1 + e) = a_A \left(1 + \frac{t}{T_G} \cdot 2.00 \cdot 10^{-6}\right).$$

La collisione tra i due corpi avverrà quando questa distanza sarà uguale al raggio dell'orbita di Giove $\mathbf{a_G}$:

$$a_G = a_A \left(1 + \frac{t}{T_G} \cdot 2.00 \cdot 10^{-6}\right),$$

da cui si ottiene dopo quanti anni l'asteroide colliderà con Giove:

$$t = \frac{T_G}{2.00 \cdot 10^{-6}} \cdot \left(\frac{a_G}{a_A} - 1\right) \simeq \frac{11.863 \text{ anni}}{2.00 \cdot 10^{-6}} \cdot \left(\frac{5.203 \text{ UA}}{3.2767 \text{ UA}} - 1\right) \simeq 3.49 \cdot 10^6 \text{ anni} .$$

Nota: l'esercizio può essere svolto anche tenendo conto del fatto che l'asteroide si disgrega quando raggiunge il limite di Roche di Giove.

3. La scintillazione

La scintillazione è il fenomeno per cui la luminosità di una sorgente, a causa della turbolenza atmosferica, viene vista variare nel tempo in modo veloce e irregolare. Essa può essere descritta con la formula di Pogson nella forma

$$m = m_0 - 2.5 \cdot \log \frac{\tau \cdot F}{F_0} ,$$

dove m è la magnitudine apparente della sorgente osservata dalla superficie terrestre, m_0 è la magnitudine apparente fuori dall'atmosfera terrestre e τ è la trasparenza dell'atmosfera in un dato istante. Quest'ultima è un parametro che assume valori tra 0 e 1 ed esprime la frazione di flusso, proveniente dalla sorgente, che riesce ad attraversare l'atmosfera e raggiungere l'osservatore. Calcolate il valore della trasparenza quando la luminosità di una stella viene vista variare di 0.4 magnitudini.

Soluzione

Si tratta di invertire la formula di Pogson, considerando la magnitudine senza effetti atmosferici (ovvero "senza trasparenza", con τ = 1, che chiamiamo "indisturbata") e poi quella che invece contiene la trasparenza:

$$m_{indisturbata} = m_0 - 2.5 \cdot \log \frac{F}{F_0}$$

$$m = m_0 - 2.5 \cdot \log \frac{\tau \cdot F}{F_0} .$$

La loro differenza corrisponde alla variazione Δm cercata:

$$\Delta m = m - m_{indisturbata} = -2.5 \cdot \log \tau$$

da cui, per $\Delta m = 0.4$:

$$\tau = 10^{-0.4 \cdot \Delta m} = 10^{-0.4 \cdot 0.4} \simeq 0.69 .$$

4. Discesa libera su Marte

Il campione di sci Massimo D. Slivello sta eseguendo una discesa libera dal Monte Olimpo, la montagna più alta su Marte, che a causa di un inverno marziano particolarmente rigido è magnificamente coperta di ghiaccio secco. La pista è perfettamente rettilinea e a pendenza costante, con una lunghezza di 610 km e un dislivello di 24.8 km. Assumete che la velocità iniziale sia zero, trascurate l'attrito degli sci con la pista e la resistenza della tenuissima atmosfera marziana. Quanto tempo impiega il signor D. Slivello a percorrere la pista e con quale velocità (in km/h) raggiunge il traguardo?

Soluzione

Trascuriamo la variazione di accelerazione di gravità tra la superficie di Marte e la cima del Monte Olimpo e calcoliamo l'accelerazione di gravità g_M su Marte:

$$g_M = \frac{G \cdot M_M}{R_M^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 \cdot kg} \cdot 6.417 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{(3.397 \cdot 10^6 \text{ m})^2} \simeq 3.711 \frac{m}{s^2} .$$

La componente dell'accelerazione di gravità parallela alla pista $\mathbf{g}_=$ è:

$$g_= = g_M \cdot \frac{h}{L} = 3.711 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{24.8 \text{ km}}{610 \text{ km}} \simeq 0.151 \frac{m}{s^2}.$$

La legge del moto uniformemente accelerato risulta:

$$s = \frac{1}{2} \cdot g_= \cdot t^2 ,$$

dove **s** indica lo spazio percorso. Il tempo **t** necessario per percorrere la pista è quindi:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g_=}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.10 \cdot 10^5 \text{ m}}{0.151 \text{ m} \cdot s^{-2}}} \simeq \sqrt{8.08 \cdot 10^6 \text{ s}^2} \simeq 2.84 \cdot 10^3 \text{ s} \simeq 47.3 \text{ min} ,$$

e la velocità **v** raggiunta al traguardo è:

$$v = g_= \cdot t = 0.151 \frac{m}{s^2} \cdot 2.84 \cdot 10^3 \text{ s} \simeq 429 \frac{m}{s} \simeq 1.54 \cdot 10^3 \frac{km}{h}.$$

5. Salviamo la Terra!
Immaginate che il 5 luglio 2123 l'asteroide Werewolf, con un diametro di 1 km, arrivi alla minima distanza dalla Terra, in corrispondenza del perielio della sua orbita che ha un semiasse maggiore di 1.14525 UA e una eccentricità di 0.11221.
a) Trascurando l'attrazione gravitazionale della Terra, dimostrate che la Terra è a rischio di collisione con Werewolf.
b) La sonda DART 2 verrà lanciata allo scopo di collidere con Werewolf e deviarlo dalla sua orbita, proprio nel momento in cui passerà all'afelio immediatamente precedente alla possibile collisione. In seguito all'impatto di DART 2, la velocità dell'asteroide aumenterà di 2 m/s, senza cambiare direzione. Considerando una distanza di sicurezza dalla superficie terrestre pari a 5 raggi terrestri, la deviazione sarà sufficiente a evitare la collisione con la Terra?
c) Rappresentate con un disegno le orbite e le posizioni della Terra e di Werewolf prima e dopo la deviazione.
Nota: per la risoluzione di questo problema utilizzate i seguenti valori per la massa del Sole ($M_\odot = 1.98849 \cdot 10^{30}$ kg), per la costante di gravitazione universale ($G = 6.67430 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$) e per l'unità astronomica (1 UA = $1.49598 \cdot 10^8$ km).

Soluzione
a) Il 5 luglio la Terra si troverà all'afelio della sua orbita e il suo centro sarà a una distanza dal Sole $\mathbf{D_T}$ pari a:

$$D_T = a_T \cdot (1 + e_T) = 1 \text{ UA} \cdot (1 + 0.01673) = 1.01673 \text{ UA} ,$$

mentre Werewolf passerà lo stesso giorno al perielio, a una distanza $\mathbf{d_W}$ dal Sole:

$$d_W = a_W \cdot (1 - e_W) = 1.14525 \text{ UA} \cdot (1 - 0.11221) \simeq 1.01674 \text{ UA} .$$

In questa situazione la distanza tra il centro dell'asteroide e il centro della Terra è solamente di 0.00001 UA = 1496 km, minore del raggio terrestre. Possiamo affermare che la precisione dei dati è sufficiente a dire che Werewolf ha una probabilità molto alta di colpire la Terra quel giorno.

b) Quando si trova all'afelio, la distanza $\mathbf{D_W}$ dell'asteroide dal Sole è:

$$D_W = a_W \cdot (1 + e_W) = 1.14525 \text{ UA} \cdot (1 + 0.11221) \simeq 1.27376 \text{ UA} ,$$

e la sua velocità $\mathbf{v_W}$, puramente trasversale, è data da

$$v_W = \sqrt{G \cdot M_\odot \cdot \left(\frac{2}{D_W} - \frac{1}{a_W}\right)} = \sqrt{6.67430 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1.98849 \cdot 10^{30}\ kg \cdot \left(\frac{2}{1.27376\ UA} - \frac{1}{1.14525\ UA}\right)} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{6.67430 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1.98849 \cdot 10^{30}\ kg \cdot \left(\frac{2}{1.90552 \cdot 10^{11}\ m} - \frac{1}{1.71327 \cdot 10^{11}\ m}\right)} \simeq 24.8664 \cdot 10^3\ \frac{m}{s}.$$

Se l'impatto riesce ad accelerare l'asteroide di 2 m/s, la velocità diventa v'_W = 24.8684 km/s senza cambiarne la direzione e quindi senza cambiare la linea degli apsidi, e questo aumenta il semiasse maggiore a:

$$a'_W = \left(\frac{2}{D_W} - \frac{v'^2_W}{G \cdot M_\odot}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1.90552 \cdot 10^{11}\ m} - \frac{\left(24.8684 \cdot 10^3\ \frac{m}{s}\right)^2}{6.67430 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1.98849 \cdot 10^{30}\ kg}\right)^{-1} \simeq$$

$$\simeq 1.71349 \cdot 10^{11}\ m \simeq 1.14539\ UA\,,$$

perciò la nuova distanza di Werewolf al perielio è:

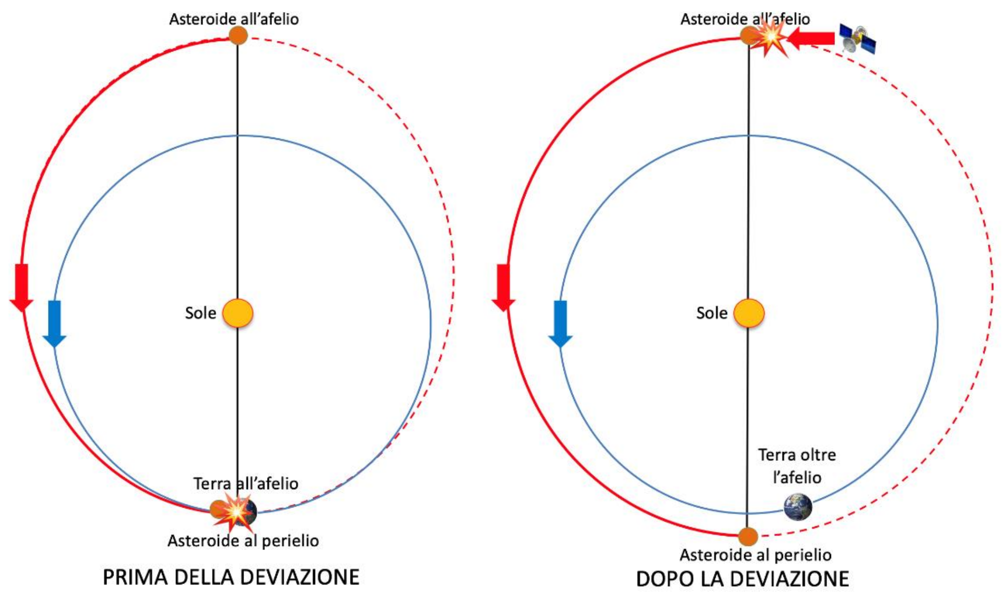
$$d'_W = 2a'_W - D_W = 2 \cdot 1.14539\ UA - 1.27376\ UA = 1.01702\ UA\,.$$

In questo modo la distanza $\mathbf{d_{W\text{-}T}}$ tra Werewolf al perielio e il centro della Terra all'afelio diventa:

$$d_{W-T} = d'_W - D_T = 1.01702\ UA - 1.01673\ UA = 0.00029\ UA \simeq 43383\ km \simeq 6.8\ R_T\,.$$

La distanza dalla superficie sarà di 5.8 raggi terrestri, sufficiente a garantire un passaggio ravvicinato in sicurezza.

c) In seguito all'impatto, il semiasse maggiore dell'orbita di Werewolf aumenta, ma l'eccentricità diminuisce (e'_W = 0.11207). Perciò, se prima l'orbita di Werewolf era esternamente tangente a quella della Terra, ora le due orbite non si intersecano più fra di loro, anche grazie al fatto che la linea degli apsidi non è cambiata. Inoltre, in seguito all'aumento del semiasse maggiore, anche il periodo orbitale aumenta. Prima dell'impatto, il periodo orbitale di Werewolf era T = $(1.14525)^{3/2}$ = 1.22560 anni, mentre dopo è aumentato a 1.22583 anni. Perciò, se prima l'asteroide era esattamente sincronizzato per arrivare all'appuntamento con la Terra, ora arriverà al perielio in ritardo di (1.22583-1.22560)/2 anni = 3629 s, cioè oltre un'ora più tardi dopo che la Terra sarà passata all'afelio e se ne sarà allontanata, viaggiando a 29.3 km/s, di ben 106333 km = 16.6 R_T! Potremo veramente dire di avere salvato la Terra.



Nota: le orbite dei due disegni non sono in scala.