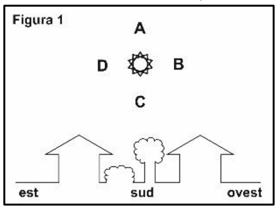
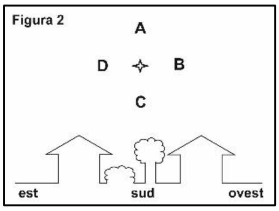
XXIII Campionati Italiani di Astronomia

Gara Interregionale - 27 febbraio 2025

Categoria Senior

1. Karel e Corty osservano il cielo





Il 15 aprile Karel vede il Sole in direzione sud, alto sull'orizzonte come mostrato in figura 1. Quella notte Corty vede la stella Arturo in direzione sud, alta sull'orizzonte come mostrato in figura 2.
Considerate in entrambi i casi le posizioni A, B, C e D e rispondete alle seguenti domande motivando la risposta:

a) dove Karel vedrà il Sole due mesi dopo, alla stessa ora?
b) dove Corty vedrà Arturo un mese dopo, alla stessa ora?

Soluzione:

a) Il Sole tra l'equinozio di primavera e il solstizio d'estate appare di giorno in giorno più alto sull'orizzonte perché la sua declinazione aumenta. Karel vedrà due mesi dopo il Sole nella posizione A.
b) Le stelle sorgono circa 3m 56s in anticipo ogni giorno, per effetto della differenza tra giorno solare e giorno siderale, quindi di giorno in giorno appaiono alla stessa ora spostate a ovest. Corty vedrà un mese dopo Arturo nella posizione B.

Approfondimento: nel corso dell'anno, ogni giorno alla stessa ora, il Sole appare in cielo in posizioni diverse rispetto a un punto immaginario che è l'intersezione tra l'equatore celeste e la direzione sud. Lo spostamento è dovuto alla forma ellittica dell'orbita terrestre e all'inclinazione dell'asse terrestre rispetto al piano dell'eclittica. L'equazione del tempo ha valore 0 sia il 15 aprile che il 14 giugno: in questi due giorni il Sole si trova nella stessa direzione, ma il 14 giugno sarà più a nord perché si sta avvicinando al solstizio d'estate quando raggiungerà la massima altezza sull'orizzonte.

2. Magnitudine del sistema binario

Un sistema binario ha una magnitudine apparente totale pari a 2.15. La luminosità di una delle due stelle è il doppio di quella della compagna. Assumendo che le due stelle siano alla stessa distanza dall'osservatore, calcolate la magnitudine di ciascuna delle due stelle.

Soluzione:

Detti $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ i flussi delle due stelle, essendo esse alla stessa distanza dall'osservatore, la relazione tra i flussi è $F_1 = 2 \cdot F_2$.

Dalla definizione di magnitudine si ottiene:

$$m_{TOT} - m_1 = -2.5 \cdot \log\left(\frac{F_{TOT}}{F_1}\right) = -2.5 \cdot \log\left(\frac{F_1 + F_2}{F_1}\right) = -2.5 \cdot \log\left(\frac{3 \cdot F_2}{2 \cdot F_2}\right) =$$
$$= -2.5 \cdot \log\left(\frac{3}{2}\right) \simeq -2.5 \cdot 0.176 \simeq -0.440$$

da cui

$$m_1 = m_{TOT} + 0.440 = 2.15 + 0.440 = 2.59\,.$$

Analogamente:

$$m_{TOT} - m_2 = -2.5 \cdot \log\left(\frac{F_{TOT}}{F_2}\right) = -2.5 \cdot \log\left(\frac{F_1 + F_2}{F_2}\right) = -2.5 \cdot \log\left(\frac{3 \cdot F_2}{F_2}\right) =$$

$$= -2.5 \cdot \log(3) \simeq -2.5 \cdot 0.477 \simeq -1.19$$

da cui

$$m_2 = m_{TOT} + 1.19 = 2.15 + 1.19 = 3.34\,.$$

È possibile risolvere il problema con una soluzione alternativa, più lunga, ma corretta, riportata di seguito. Le differenze sull'ultima cifra decimale del risultato sono dovute agli arrotondamenti.

Dall'equazione

$$m_1 - m_2 = -2.5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = -2.5 \cdot \log\left(\frac{2 \cdot F_2}{F_2}\right) = -2.5 \cdot \log(2) \simeq -0.75$$

otteniamo

$$m_1 = m_2 - 0.75\,.$$

Inseriamo il valore di m_1 nell'equazione:

$$m_{tot} = -2.5 \cdot \log(10^{-0.4 \cdot m_1} + 10^{-0.4 \cdot m_2})$$

$$\frac{m_{tot}}{-2.5} = \log\left(10^{-0.4 \cdot m_2 + 0.4 \cdot 0.75} + 10^{-0.4 \cdot m_2}\right) = \log(10^{-0.4 \cdot m_2} \cdot 10^{0.4 \cdot 0.75} + 10^{-0.4 \cdot m_2}) = \log\left(10^{-0.4 \cdot m_2} \cdot (10^{0.3} + 1)\right) =$$

$$= \log(10^{-0.4 \cdot m_2} \cdot 3) = \log(10^{-0.4 \cdot m_2}) + \log(3) \simeq \log(10^{-0.4 \cdot m_2}) + 0.48$$

da cui

$$\log(10^{-0.4 \cdot m_2}) = \frac{m_{tot}}{-2.5} - 0.48 = \frac{2.15}{-2.5} - 0.48 = -0.86 - 0.48 = -1.34$$

$$-0.4 \cdot m_2 = -1.34 \quad \rightarrow \quad m_2 = 3.35\,.$$

Inserendo questo valore nella prima equazione otteniamo

$$m_1 = m_2 - 0.75 = 3.35 - 0.75 = 2.60\,.$$

3. Quale focale?

Un sistema binario viene osservato con un telescopio con apertura di 150 mm e lunghezza focale di 750 mm. Le due stelle hanno una separazione di 4". Quale deve essere la lunghezza focale massima di un oculare per distinguere le due stelle considerando il potere risolutivo dell'occhio umano pari a 2'?

Soluzione:

La risoluzione dell'occhio umano è pari a 2', pertanto per distinguere le due stelle separate di 4" è necessario un numero di ingrandimenti pari almeno a:

$$I = \frac{2'}{4"} = \frac{2' \cdot 60}{4"} = \frac{120"}{4"} = 30 \text{ ingrandimenti}\,.$$

La focale dell'oculare che fornisce 30 ingrandimenti e permette separare le due componenti è data da

$$F_{oculare} = \frac{F_{telescopio}}{I} = \frac{750\text{ mm}}{30} = 25\text{ mm}\,.$$

La focale massima è 25 mm, in quanto un oculare con una focale maggiore fornisce un ingrandimento minore e non permette di risolvere le due componenti del sistema binario.

Nota: per poter distinguere le due componenti di un sistema binario è necessario che la loro separazione sia maggiore del seeing. Mediamente il seeing è pari a 2", quindi in questo caso le due componenti sono distinguibili.

4. Le stagioni di Arsura e Ghiacciolo

Un sistema planetario comprende due pianeti, chiamati Ghiacciolo e Arsura. Gli abitanti di Arsura si lamentano che le loro stagioni durano troppo poco rispetto a quelle di Ghiacciolo. Le orbite dei due pianeti sono circolari e complanari. L'inclinazione dell'asse di rotazione rispetto al piano orbitale è di 32° per entrambi i pianeti. Arsura ha un semiasse maggiore dell'orbita pari alla metà del semiasse maggiore dell'orbita di Ghiacciolo. Calcolate il rapporto tra la durata dell'estate su Arsura e su Ghiacciolo.

Soluzione:

Arsura e Ghiacciolo hanno l'asse di rotazione inclinato rispetto alla normale al piano dell'eclittica: questo assicura la presenza delle stagioni su entrambi i pianeti.

Definiamo i semiassi maggiori e i periodi delle orbite di Arsura e Ghiacciolo rispettivamente $\mathbf{a_A}$, $\mathbf{a_G}$, $\mathbf{T_A}$ e $\mathbf{T_G}$, dalla terza legge di Keplero ricaviamo:

$$\frac{a_A^3}{T_A^2} = \frac{a_G^3}{T_G^2}$$

da cui, sapendo che $a_G = 2 \cdot a_A$:

$$\frac{a_A^3}{T_A^2} = \frac{8 \cdot a_A^3}{T_G^2}$$

$$T_A = \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot T_G \simeq 0.35 \cdot T_G\,.$$

Poiché entrambe le orbite sono circolari, l'estate dura esattamente ¼ del periodo di rivoluzione. Quindi il rapporto tra le due estati è 0.35 e gli abitanti di Arsura hanno ragione di lamentarsi.

5. Chi ha ragione?

Karel e Corty si trovano su Mercurio e durante la lunghissima notte mercuriana avvistano due astri luminosissimi in opposizione. Karel li riconosce subito: "sono Giove e la Terra! Giove è l'astro più luminoso, perché è più grande". Corty dissente: "Ma no, l'astro più luminoso è la Terra, perché è più vicina". Considerando tutte le orbite circolari e complanari, stabilite chi dei due ha ragione e calcolate la differenza di magnitudine tra Terra e Giove visti da Mercurio. Trascurate il contributo della Luna e dei satelliti di Giove alla luminosità dei due pianeti.

Soluzione:

Nella configurazione descritta nel problema Sole, Mercurio, Terra e Giove sono approssimativamente allineati. Calcoliamo la luminosità della Terra: detta $\mathbf{L_S}$ la luminosità del Sole, il suo flusso $\mathbf{f_T}$ alla distanza $\mathbf{d_T}$ tra Terra e Sole è pari a:

$$f_T = \frac{L_S}{4\pi \cdot d_T^2}\,.$$

La luminosità totale riflessa dalla Terra $\mathbf{L_T}$ è il flusso ricevuto dal Sole moltiplicato per l'area del disco terrestre e per l'albedo della Terra $\mathbf{a_T}$:

$$L_T = f_T \cdot \pi R_T^2 \cdot a_T = \frac{L_S \cdot R_T^2 \cdot a_T}{4 \cdot d_T^2}\,.$$

Questa luminosità riflessa si ridistribuisce sulla superficie di una semisfera di raggio pari alla distanza tra Terra e Mercurio $\mathbf{d_{TM} = d_T - d_M}$, quindi il flusso proveniente dalla Terra e osservato da Karel e Corty è:

$$F_T = \frac{L_T}{2\pi \cdot d_{TM}^2} = \frac{L_S \cdot R_T^2 \cdot a_T}{8\pi \cdot d_{TM}^2 \cdot d_T^2}\,.$$

Una relazione analoga vale per Giove:

$$F_G = \frac{L_G}{2\pi \cdot d_{GM}^2} = \frac{L_S \cdot R_G^2 \cdot a_G}{8\pi \cdot d_{GM}^2 \cdot d_G^2}\,.$$

Scriviamo il rapporto tra i flussi provenienti dai due pianeti osservati da Karel e Corty:

$$\frac{F_T}{F_G} = \frac{L_S \cdot R_T^2 \cdot a_T}{8\pi \cdot d_{TM}^2 \cdot d_T^2} \cdot \frac{8\pi \cdot d_{GM}^2 \cdot d_G^2}{L_S \cdot R_G^2 \cdot a_G} = \left(\frac{R_T}{R_G}\right)^2 \cdot \frac{a_T}{a_G} \cdot \left(\frac{d_G - d_M}{d_T - d_M}\right)^2 \cdot \left(\frac{d_G}{d_T}\right)^2$$

sostituendo i valori otteniamo:

$$\frac{F_T}{F_G} = \left(\frac{6378\ \text{km}}{71490\ \text{km}}\right)^2 \cdot \frac{0.434}{0.538} \cdot \left(\frac{5.203\ \text{UA} - 0.3871\ \text{UA}}{1\ \text{UA} - 0.3871\ \text{UA}}\right)^2 \cdot \left(\frac{5.203\ \text{UA}}{1\ \text{UA}}\right)^2 \simeq 10.7\,.$$

La differenza di magnitudine è data da:

$$\Delta m = -2.5 \cdot \log\left(\frac{F_T}{F_G}\right) = -2.5 \cdot \log(10.7) \simeq -2.57\,.$$

Vista da Mercurio la Terra risulta più luminosa di Giove e Corty ha ragione.