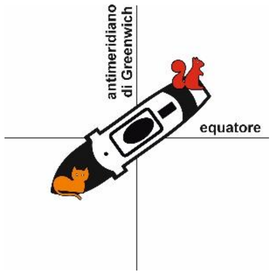
XXIII Campionati Italiani di Astronomia

Gara Interregionale - 27 febbraio 2025

Categoria Master

1. Gli antenati di Karel e Corty solcano l'oceano Pacifico

Alla fine del XIX secolo il piroscafo SS Warrimoo stava solcando le acque del Pacifico con a bordo gli antenati di Karel e Corty. Alla mezzanotte del 31 dicembre 1899 la SS Warrimoo ha attraversato l'equatore esattamente all'istante del passaggio sull'antimeridiano di Greenwich, con nonna Karel a prua e nonno Corty a poppa (vedi figura a destra). In quale stagione e in quale giorno si trovavano in quell'istante nonna Karel e nonno Corty?



Soluzione:

Nonna Karel si trovava nell'emisfero australe in estate, il 1 gennaio 1900. Nonno Corty si trovava nell'emisfero boreale in inverno, il 31 dicembre 1899. Nonna Karel e nonno Corty, nello stesso istante e sulla stessa nave, si trovavano in due emisferi, stagioni, giorni, mesi e anni diversi!

2. Magnitudine del sistema binario

Un sistema binario ha una magnitudine apparente totale pari a 2.15. La luminosità di una delle due stelle è il doppio di quella della compagna. Assumendo che le due stelle siano alla stessa distanza dall'osservatore, calcolate la magnitudine di ciascuna delle due stelle.

Soluzione:

Detti $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ i flussi delle due stelle, essendo esse alla stessa distanza dall'osservatore, la relazione tra i flussi è $F_1 = 2 \cdot F_2$.

Dalla definizione di magnitudine si ottiene:

$$m_{TOT} - m_1 = -2.5 \cdot \log\left(\frac{F_{TOT}}{F_1}\right) = -2.5 \cdot \log\left(\frac{F_1 + F_2}{F_1}\right) = -2.5 \cdot \log\left(\frac{3 \cdot F_2}{2 \cdot F_2}\right) =$$
$$= -2.5 \cdot \log\left(\frac{3}{2}\right) \simeq -2.5 \cdot 0.176 \simeq -0.440$$

da cui

$$m_1 = m_{TOT} + 0.440 = 2.15 + 0.440 = 2.59\,.$$

Analogamente:

$$m_{TOT} - m_2 = -2.5 \cdot \log\left(\frac{F_{TOT}}{F_2}\right) = -2.5 \cdot \log\left(\frac{F_1 + F_2}{F_2}\right) = -2.5 \cdot \log\left(\frac{3 \cdot F_2}{F_2}\right) =$$
$$= -2.5 \cdot \log(3) \simeq -2.5 \cdot 0.477 \simeq -1.19$$

da cui

$$m_2 = m_{TOT} + 1.19 = 2.15 + 1.19 = 3.34\,.$$

È possibile risolvere il problema con una soluzione alternativa, più lunga, ma corretta, riportata di seguito. Le differenze sull'ultima cifra decimale del risultato sono dovute agli arrotondamenti.

Dall'equazione

$$m_1 - m_2 = -2.5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = -2.5 \cdot \log\left(\frac{2 \cdot F_2}{F_2}\right) = -2.5 \cdot \log(2) \simeq -0.75$$

otteniamo

$$m_1 = m_2 - 0.75\,.$$

Inseriamo il valore di m_1 nell'equazione:

$$m_{tot} = -2.5 \cdot \log(10^{-0.4\cdot m_1} + 10^{-0.4\cdot m_2})$$

$$\frac{m_{tot}}{-2.5} = \log\,(10^{-0.4\cdot m_2+0.4\cdot 0.75} + 10^{-0.4\cdot m_2}) = \log(10^{-0.4\cdot m_2}\cdot 10^{0.4\cdot 0.75} + 10^{-0.4\cdot m_2}) = \log\big(10^{-0.4\cdot m_2}\cdot (10^{0.3}+1)\big) =$$

$$= \log(10^{-0.4\cdot m_2}\cdot 3) = \log(10^{-0.4\cdot m_2}) + \log(3) \simeq \log(10^{-0.4\cdot m_2}) + 0.48$$

da cui

$$\log(10^{-0.4\cdot m_2}) = \frac{m_{tot}}{-2.5} - 0.48 = \frac{2.15}{-2.5} - 0.48 = -0.86 - 0.48 = -1.34$$

$$-0.4\cdot m_2 = -1.34 \quad \rightarrow \quad m_2 = 3.35\,.$$

Inserendo questo valore nella prima equazione otteniamo

$$m_1 = m_2 - 0.75 = 3.35 - 0.75 = 2.60\,.$$

3. Quale focale?

Un sistema binario viene osservato con un telescopio con apertura di 150 mm e lunghezza focale di 750 mm. Le due stelle hanno una separazione di 4". Quale deve essere la lunghezza focale massima di un oculare per distinguere le due stelle considerando il potere risolutivo dell'occhio umano pari a 2'?

Soluzione:
La risoluzione dell'occhio umano è pari a 2', pertanto per distinguere le due stelle separate di 4" è necessario un numero di ingrandimenti pari almeno a:

$$I = \frac{2'}{4''} = \frac{2'\cdot 60}{4''} = \frac{120''}{4''} = 30 \text{ ingrandimenti}\,.$$

La focale dell'oculare che fornisce 30 ingrandimenti e permette separare le due componenti è data da

$$F_{oculare} = \frac{F_{telescopio}}{I} = \frac{750 \text{ mm}}{30} = 25 \text{ mm}\,.$$

La focale massima è 25 mm, in quanto un oculare con una focale maggiore fornisce un ingrandimento minore e non permette di risolvere le due componenti del sistema binario.

Nota: per poter distinguere le due componenti di un sistema binario è necessario che la loro separazione sia maggiore del seeing. Mediamente il seeing è pari a 2", quindi in questo caso le due componenti sono distinguibili.

4. L'allineamento planetario

Supponete che in un dato momento Giove, Saturno, Urano e Nettuno si trovino esattamente allineati in opposizione con la Terra. Considerate tutte le orbite complanari e calcolate l'attrazione gravitazionale massima complessiva che essi eserciterebbero sulla Terra e poi confrontatela con l'attrazione minima che il Sole esercita sulla Terra. C'è motivo di temere che tale allineamento possa perturbare l'orbita terrestre?

Soluzione:
L'attrazione gravitazionale massima si ha con i pianeti al perielio e la Terra all'afelio.

d_G = distanza al perielio di Giove = $a_G \cdot (1 - e_G) = 7.406 \cdot 10^8$ km
d_S = distanza al perielio di Saturno = $a_S \cdot (1 - e_S) = 1.348 \cdot 10^9$ km
d_U = distanza al perielio di Urano = $a_U \cdot (1 - e_N) = 2.736 \cdot 10^9$ km
d_N = distanza al perielio di Nettuno = $a_N \cdot (1 - e_N) = 4.458 \cdot 10^9$ km
d_T = distanza all'afelio della Terra = $a_T \cdot (1 + e_T) = 1.521 \cdot 10^8$ km
Calcoliamo l'attrazione gravitazionale massima $\mathbf{F_{GT}}$ tra Giove e Terra:

$$F_{GT} = \frac{G \cdot M_G \cdot M_T}{(d_G - d_T)^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot 1.899 \cdot 10^{27}\ kg \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}{(7.406 \cdot 10^{11}\ m - 1.521 \cdot 10^{11}\ m)^2} \simeq 2.185 \cdot 10^{18}\ N\,.$$

Calcoliamo l'attrazione gravitazionale massima $\mathbf{F_{ST}}$ tra Saturno e Terra:

$$F_{ST} = \frac{G \cdot M_S \cdot M_T}{(d_S - d_T)^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot 5.685 \cdot 10^{26}\ kg \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}{(1.348 \cdot 10^{12}\ m - 1.521 \cdot 10^{11}\ m)^2} \simeq 1.584 \cdot 10^{17}\ N\,.$$

Calcoliamo l'attrazione gravitazionale massima $\mathbf{F_{UT}}$ tra Urano e Terra:

$$F_{UT} = \frac{G \cdot M_U \cdot M_T}{(d_U - d_T)^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot 8.682 \cdot 10^{25}\ kg \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}{(2.736 \cdot 10^{12}\ m - 1.521 \cdot 10^{11}\ m)^2} \simeq 5.193 \cdot 10^{15}\ N\,.$$

Calcoliamo l'attrazione gravitazionale massima $\mathbf{F_{NT}}$ tra Nettuno e Terra:

$$F_{NT} = \frac{G \cdot M_N \cdot M_T}{(d_N - d_T)^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot 1.024 \cdot 10^{26}\ kg \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}{(4.458 \cdot 10^{12}\ m - 1.521 \cdot 10^{11}\ m)^2} \simeq 2.201 \cdot 10^{15}\ N\,.$$

La loro somma è data da:

$$F_{GT} + F_{ST} + F_{UT} + F_{NT} = 2.185 \cdot 10^{18}\ N + 1.584 \cdot 10^{17}\ N + 5.193 \cdot 10^{15}\ N + 2.201 \cdot 10^{15}\ N \simeq 2.351 \cdot 10^{18}\ N\,.$$

Calcoliamo l'attrazione gravitazionale minima tra Terra e Sole:

$$F_{\odot T} = \frac{G \cdot M_\odot \cdot M_T}{d_T^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ kg \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}{(1.521 \cdot 10^{11}\ m)^2} \simeq 3.427 \cdot 10^{22}\ N\,.$$

Il rapporto tra l'attrazione minima del Sole e l'attrazione massima dei pianeti gassosi messi insieme è $1.458 \cdot 10^4$. Concludiamo quindi che non c'è motivo di preoccuparsi che l'orbita della Terra possa venire perturbata da eventuali allineamenti planetari.

5. Chi ha ragione?

Karel e Corty si trovano su Mercurio e durante la lunghissima notte mercuriana avvistano due astri luminosissimi in opposizione. Karel li riconosce subito: "Sono Giove e la Terra! Giove è l'astro più luminoso, perché è più grande". Corty dissente: "Ma no, l'astro più luminoso è la Terra, perché è più vicina". Considerando tutte le orbite circolari e complanari, stabilite chi dei due ha ragione e calcolate la differenza di magnitudine tra Terra e Giove visti da Mercurio. Trascurate il contributo della Luna e dei satelliti di Giove alla luminosità dei due pianeti.

Soluzione:

Nella configurazione descritta nel problema Sole, Mercurio, Terra e Giove sono approssimativamente allineati. Calcoliamo la luminosità della Terra: detta $\mathbf{L_S}$ la luminosità del Sole, il suo flusso $\mathbf{f_T}$ alla distanza $\mathbf{d_T}$ tra Terra e Sole è pari a:

$$f_T = \frac{L_S}{4\pi \cdot d_T^2}\,.$$

La luminosità totale riflessa dalla Terra $\mathbf{L_T}$ è il flusso ricevuto dal Sole moltiplicato per l'area del disco terrestre e per l'albedo della Terra $\mathbf{a_T}$:

$$L_T = f_T \cdot \pi R_T^2 \cdot a_T = \frac{L_S \cdot R_T^2 \cdot a_T}{4 \cdot d_T^2}\,.$$

Questa luminosità riflessa si ridistribuisce sulla superficie di una semisfera di raggio pari alla distanza tra Terra e Mercurio $\mathbf{d_{TM} = d_T - d_M}$, quindi il flusso proveniente dalla Terra e osservato da Karel e Corty è:

$$F_T = \frac{L_T}{2\pi \cdot d_{TM}^2} = \frac{L_S \cdot R_T^2 \cdot a_T}{8\pi \cdot d_{TM}^2 \cdot d_T^2}\,.$$

Una relazione analoga vale per Giove:

$$F_G = \frac{L_G}{2\pi \cdot d_{GM}^2} = \frac{L_S \cdot R_G^2 \cdot a_G}{8\pi \cdot d_{GM}^2 \cdot d_G^2}\,.$$

Scriviamo il rapporto tra i flussi provenienti dai due pianeti osservati da Karel e Corty:

$$\frac{F_T}{F_G} = \frac{L_S \cdot R_T^2 \cdot a_T}{8\pi \cdot d_{TM}^2 \cdot d_T^2} \cdot \frac{8\pi \cdot d_{GM}^2 \cdot d_G^2}{L_S \cdot R_G^2 \cdot a_G} = \left(\frac{R_T}{R_G}\right)^2 \cdot \frac{a_T}{a_G} \cdot \left(\frac{d_G - d_M}{d_T - d_M}\right)^2 \cdot \left(\frac{d_G}{d_T}\right)^2$$

sostituendo i valori otteniamo:

$$\frac{F_T}{F_G} = \left(\frac{6378\ \text{km}}{71490\ \text{km}}\right)^2 \cdot \frac{0.434}{0.538} \cdot \left(\frac{5.203\ \text{UA} - 0.3871\ \text{UA}}{1\ \text{UA} - 0.3871\ \text{UA}}\right)^2 \cdot \left(\frac{5.203\ \text{UA}}{1\ \text{UA}}\right)^2 \simeq 10.7\,.$$

La differenza di magnitudine è data da:

$$\Delta m = -2.5 \cdot \log\left(\frac{F_T}{F_G}\right) = -2.5 \cdot \log(10.7) \simeq -2.57\,.$$

Vista da Mercurio la Terra risulta più luminosa di Giove e Corty ha ragione.