XXII Campionati Italiani di Astronomia

Gara Interregionale - 8 febbraio 2024

Categoria Master

1. Mantenere la distanza di sicurezza

Attualmente ci sono 560 satelliti in orbita geostazionaria (ovvero satelliti la cui posizione apparente nel cielo resta immutata nel tempo per un qualsiasi osservatore sulla Terra). Determinate la distanza media, misurata lungo l'orbita, tra uno qualsiasi di essi e quello immediatamente precedente o successivo.

Soluzione:

Per apparire geostazionario un satellite deve trovarsi su un'orbita equatoriale, circolare, e avere un periodo di rivoluzione attorno alla Terra pari a un giorno siderale. Quindi, indicando con $\mathbf{M_T}$ la massa della Terra e con $\mathbf{T}$ il periodo orbitale, il raggio **a** della sua orbita deve essere:

$$a = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg \cdot (86164\, s)^2}{39.48}} \simeq 4.216 \cdot 10^4\, km\,.$$

Quindi la lunghezza **C** dell'orbita geostazionaria risulta:

$$\mathrm{C} = 2\pi \cdot \mathrm{a} \simeq 2\pi \cdot 4.216 \cdot 10^4\ \mathrm{km} \simeq 2.649 \cdot 10^5\ \mathrm{km}\ .$$

Per calcolare la distanza media **D** tra uno di essi e quello immediatamente precedente o successivo, assumiamo che i 560 satelliti siano distribuiti uniformemente lungo l'orbita geostazionaria. Si avrà quindi:

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{C}}{560} \simeq \frac{2.649 \cdot 10^5\ \mathrm{km}}{560} \simeq 473.0\ \mathrm{km}\,.$$

2. Debussy al tramonto del Sole

Il 29 maggio 2023 Mercurio è stato osservato dalla Terra alla massima elongazione occidentale. Con un telescopio adeguato avreste potuto osservare sulla sua superficie il cratere Debussy, di 81 km di diametro, vicino alla linea di demarcazione tra la parte illuminata e quella in ombra del pianeta. Quale è il numero minimo di rotazioni complete di Mercurio necessarie per osservare dalla Terra il cratere Debussy nelle stesse condizioni di illuminazione? Assumete le orbite di Mercurio e Terra circolari e complanari e considerate corretto un arrotondamento del risultato entro il 3%.

Soluzione:

Detti $\mathbf{T_M}$ il periodo orbitale di Mercurio e $\mathbf{T_T}$ il periodo orbitale della Terra, Mercurio verrà osservato da Terra esattamente nella stessa posizione rispetto al Sole dopo tempo pari al periodo sinodico **S** o a un suo multiplo:

$$\frac{1}{\mathrm{S}} = \frac{1}{\mathrm{T_M}} - \frac{1}{\mathrm{T_T}} \simeq \frac{1}{87.969\ \mathrm{g}} - \frac{1}{365.256\ \mathrm{g}} \simeq 8.6298 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{giorni}^{-1}$$

$$S \simeq 115.877\ giorni$$

Perché il cratere Debussy venga visto esattamente nella stessa posizione, occorre che Mercurio faccia un numero intero di rotazioni sul suo asse in un numero intero di periodi sinodici. Detto **P** il periodo di rotazione di Mercurio, il numero minimo di rotazioni necessarie è:

$$N = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{P}} = \frac{115.877\ \mathrm{giorni}}{58.646\ \mathrm{giorni}} = 1.976 \simeq 2\,.$$

Quindi, dopo un solo periodo sinodico, Mercurio avrà completato due rotazioni e sarà possibile osservare da Terra il cratere Debussy all'incirca nella stessa posizione rispetto al Sole.

3. Prendere troppo sole fa male

Una cometa ha una densità di 0.313 g/cm^3 e, giunta al perielio a una distanza di 0.2301 UA dal centro del Sole, si spezza in due parti. I due frammenti A e B assumono velocità v_A = 210.0 km/s e v_B = 35.45 km/s, con la stessa direzione e verso della velocità della cometa prima della frammentazione, e iniziano a muoversi su orbite separate. Quale delle seguenti situazioni si verificherà per ciascuno dei due frammenti? Abbandonare il Sistema Solare, cadere sul Sole o rimanere in orbita intorno al Sole? Giustificate la risposta.

Soluzione:
Detti $\mathbf{d_p}$ la distanza al perielio e $\mathbf{M_\odot}$ la massa del Sole, ricaviamo la velocità di fuga $\mathbf{v_F}$ alla distanza del perielio:

$$v_F = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_\odot}{d_p}} \simeq \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg} \cdot 1.989\ 10^{30}\ kg}{3.442 \cdot 10^{10}\ m}} \simeq 87.82\ \frac{km}{s}\ .$$

La velocità del frammento A è maggiore della velocità di fuga: esso si immetterà quindi su un'orbita iperbolica e lascerà il Sistema Solare.
La velocità del frammento B è minore della velocità di fuga: esso si immetterà quindi su un'orbita ellittica, con semiasse maggiore $\mathbf{a_B}$ pari a:

$$a_B = \left(\frac{2}{d_p} - \frac{v_B^2}{G \cdot M_\odot}\right)^{-1} \simeq\ 2.056 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m} \simeq 0.1374\ \mathrm{UA}\ .$$

Il semiasse maggiore risulta inferiore alla distanza al perielio della cometa originaria. Perciò la distanza $\mathbf{d_p}$ sarà pari alla distanza l'afelio $\mathbf{d_{AB}}$ della nuova orbita ellittica con eccentricità $\mathbf{e_B}$ del frammento B:

$$d_{AB} = d_p = a_B \cdot (1 + e_B)$$

da cui:

$$e_B = \frac{d_{AB}}{a_B} - 1 \simeq \frac{0.2301\ \mathrm{UA}}{0.1374\ \mathrm{UA}} - 1 \simeq 0.6747\ \mathrm{UA}\ .$$

la distanza al perielio $\mathbf{d_{PB}}$ del frammento B diventa quindi:

$$d_{PB} = a_B \cdot (1 - e_B) = 0.04470\ \mathrm{UA}\ .$$

Ma il limite di Roche $\mathbf{D_{Roche}}$ per il Sole e una cometa della densità indicata vale:

$$D_{Roche} \approx 1.51 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_\odot}{\rho}} \approx 2.80 \cdot 10^6\ \mathrm{km} = 0.0187\ \mathrm{UA}\ .$$

e risulta quindi inferiore alla distanza al perielio del frammento B, quest'ultimo sopravvivrà quindi alla disgregazione mareale. Tuttavia, orbitando così vicino al Sole, è destinato a sublimare completamente dopo avere completato poche rivoluzioni.

Nota. la soluzione è stata considerata corretta anche se non è stata confrontata la distanza al perielio con il limite di Roche oppure se per il frammento B è stata assunta una traiettoria parabolica. Agli studenti che hanno considerato l'orbita ellittica e il calcolo del limite di Roche è stata assegnata una valutazione supplementare.

4. Un testimone d'eccezione

Il 26 settembre 2022 il satellite italiano LICIACube ha ripreso l'impatto della sonda Dart sulla superficie dell'asteroide Dimorphos, che si trovava in orbita circolare attorno all'asteroide Didymos, di massa $5.27 \cdot 10^{11}$ kg. Prima dell'impatto il periodo e il semiasse maggiore dell'orbita di Dimorphos erano di 11 h 55 minuti e 1.19 km. Al momento dell'impatto la Terra e Didymos risultavano separati da un angolo di 4°.02 con vertice nel Sole e Didymos distava dal Sole 1.014 UA. Dopo l'impatto il periodo orbitale di Dimorphos è diminuito di 33 minuti.
Calcolate:
a) la velocità orbitale di Dimorphos prima dell'impatto;
b) di quanto si è ridotto in percentuale il semiasse maggiore dell'orbita di Dimorphos;
c) il ritardo con cui sono giunte sulla Terra le prime immagini dell'impatto.
Trascurate le masse di Dart e Dimorphos, la distanza tra Didymos, Dimorphos e LICIACube e assumete l'orbita della Terra circolare.

Soluzione:

a) Detto $\mathbf{a_0}$ il raggio dell'orbita e $\mathbf{P_0}$ il periodo orbitale, otteniamo la velocità $\mathbf{v_0}$ con cui Dimorphos orbitava attorno a Didymos, dalla relazione:

$$v_0 = \frac{2\pi \cdot a_0}{P_0} = \frac{2\pi \cdot 1.19 \cdot 10^3\ m}{42900\ s} = 0.174\ \frac{m}{s}\ .$$

b) Per calcolare il semiasse maggiore $\mathbf{a_1}$ della nuova orbita di Dimorphos, utilizziamo la III legge di Keplero, indicando con $\mathbf{M_D}$ la massa di Didymos, trascurando le masse di Dart e Dimorphos e considerando il nuovo periodo $\mathbf{P_1}$:

$$P_1 = P_0 - 33\ \mathrm{m} = 11\ \mathrm{h}\ 22\ \mathrm{m} = 40920\ \mathrm{s}\ .$$

Avremo quindi:

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{P_1^2 \cdot G \cdot M_D}{4\pi^2}} \simeq \sqrt[3]{\frac{(40920\ s)^2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 5.27 \cdot 10^{11}\ kg}{4\pi^2}} \simeq 1.14 \cdot 10^3\ m\ .$$

Di conseguenza, la riduzione percentuale dell'orbita $\mathbf{r_{\%}}$ vale:

$$r_{\%} = \frac{a_0 - a_1}{a_0} = 4.20\ \%\ .$$

c) Detto $\mathbf{a_T}$ il semiasse maggiore dell'orbita della Terra, $\mathbf{a_D}$ la distanza di Didymos dal Sole al momento dell'impatto e $\boldsymbol{\alpha}$ l'angolo di separazione tra Terra e Didymos visti del Sole, possiamo ricavare la distanza $\mathbf{D_L}$ tra la Terra e LICIACube con il teorema di Carnot:

$$D_L = \sqrt{a_T^2 + a_D^2 - 2 \cdot a_T \cdot a_D \cdot \cos\alpha}$$

$$D_L = \sqrt{1\ UA^2 + 1.028\ UA^2 - 2.023\ UA^2} \simeq 0.071\ UA \simeq 10.7 \cdot 10^6\ km\ .$$

Il ritardo $\mathbf{t}$ del segnale inviato da LICIACube equivale al tempo impiegato dalla luce per percorrere la distanza $\mathbf{D_L}$ del satellite dalla Terra:

$$t = \frac{D_L}{c} \simeq \frac{10.7 \cdot 10^6\ km}{299792\ \frac{km}{s}} \simeq 35.7\ s\ .$$

5. C'è posta per M13

Nel 1974 è stato inviato dal radiotelescopio di Arecibo (Porto Rico) un messaggio radio verso l'ammasso globulare M13, che ha un diametro angolare di 23'.0, si trova a una distanza di 7.70 kpc dal Sole, si stima contenga $6.40 \cdot 10^5$ stelle e ha una magnitudine superficiale media di 21.2 mag/arcsec2. Il radiotelescopio aveva un'apertura di $3.05 \cdot 10^2$ m e trasmetteva alla frequenza di $2.38 \cdot 103$ MHz. Il fascio delle onde radio aveva un'ampiezza angolare pari al doppio del potere risolutivo del telescopio ed era puntato esattamente al centro di M13. Supponete che le stelle siano distribuite uniformemente nel volume di M13 e calcolate:

a) la densità media di stelle in M13;
b) quante stelle verranno effettivamente raggiunte dal messaggio radio;
c) la magnitudine apparente integrata di M13.

Soluzione:

a) Detti $\boldsymbol{\alpha}$ il diametro angolare di M13 e $\mathbf{d}$ la sua distanza dal Sole, ricaviamo il diametro dell'ammasso $\mathbf{D}$:

$$D = \tan(\alpha) \cdot d = \tan(0.383°) \cdot 7700\ pc \simeq 51.5\ pc$$

allora il volume dell'ammasso è dato da:

$$V_{M13} = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (25.8\ pc)^3 \simeq 7.15 \cdot 10^4\ pc^3\ ,$$

e la densità media $\boldsymbol{\rho_{M13}}$ di stelle risulta:

$$\rho_{M13} = \frac{N_{M13}}{V_{M13}} = \frac{6.40 \cdot 10^5\ stelle}{7.15 \cdot 10^4\ pc^3} \simeq 8.95\ \frac{stelle}{pc^3}\ .$$

In M13 in un cubo di lato 1 pc ci sono circa 9 stelle.
Nota: si tratta di una stima piuttosto grossolana, in realtà la concentrazione di stelle aumenta notevolmente verso il centro.

b) L'ampiezza angolare $\boldsymbol{\theta}$ del fascio radio emesso dal radiotelescopio di Arecibo, con un diametro $\boldsymbol{\Delta}$ alla lunghezza d'onda $\boldsymbol{\lambda}$, coincide con il potere risolutivo:

$$\theta = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{\Delta} = \frac{1.22 \cdot 2.99 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}}{2.38 \cdot 10^9\ Hz \cdot 305\ m} \simeq 5.04 \cdot 10^{-4}\ rad \simeq 1.73'\ .$$

Essa è molto più piccola del diametro angolare dell'ammasso, quindi solo una piccola parte delle stelle verrà raggiunta dal messaggio di Arecibo. Il volume $\mathbf{V_A}$ che contiene le stelle raggiunte dal segnale sarà più o meno un cilindro di raggio $\theta \cdot d$ e altezza pari a $\mathbf{D}$, il diametro dell'ammasso:

$$V_A = \pi \cdot (\theta \cdot d)^2 \cdot D = \pi \cdot (5.04 \cdot 10^{-4} rad \cdot 7700\ pc)^2 \cdot 51.5\ pc \simeq 2440\ pc^3\ ,$$

da cui il numero $\mathbf{N_A}$ di stelle che riceveranno il messaggio sarà:

$$N_A = V_A \cdot \rho_{M13} \approx 2440\ pc^3 \cdot 8.95\ \frac{stelle}{pc^3} \simeq 2.18 \cdot 10^4\ stelle$$

ovvero, meno del 3.5% delle stelle di M13.

c) Detta $\mathbf{m_T}$ la magnitudine totale di M13, $\mathbf{m_{sup}}$ sua magnitudine superficiale media, **r** il suo raggio apparente e **A** la sua area (espressa in arcsec²) , si ha:

$$A = \pi\, r^2 \simeq \pi\,(60 \cdot 11.5)^2 \simeq 14.9 \cdot 10^5 \text{ arcsec}^2$$

$$m_T = m_{sup} - 2.5 \log A = 21.2 - 2.5 \log\,(14.9 \cdot 10^5) \simeq 5.8$$