CAMPIONATI ITALIANI DI ASTRONOMIA 2023

Gara interregionale – 15 febbraio

Categoria Master

1. Impatti cosmici

Quando un piccolo oggetto celeste entra nell'atmosfera di un pianeta, tutta la sua energia cinetica viene convertita in energia termomeccanica, che frammenta il corpo, e in radiazione luminosa. Calcolate l'energia, in joule, rilasciata nell'atmosfera di Giove dal frammento K della cometa Shoemaker-Levy 9, caduta su Giove nel luglio 1994. Il frammento K era sferico e aveva diametro di $3.2 \cdot 10^3$ m, velocità rispetto a Giove di $6.0 \cdot 10^4$ m/s e densità di $3.00 \cdot 10^2$ kg/m^3.

Soluzione.

Dette **v** la sua velocità e **m** la sua massa, l'energia cinetica **E** di un corpo vale:

$$E = \frac{1}{2}\,\mathrm{m\,v^2}$$

Detti **d** il diametro del frammento K, che sappiamo essere sferico, e **ρ** la sua densità, la sua massa, data dal prodotto del volume per la densità, era di:

$$m = \frac{4}{3}\,\pi\left(\frac{\mathrm{d}}{2}\right)^3 \cdot \rho \simeq \frac{1}{6}\,\pi\,(3.2 \cdot 10^3\ \mathrm{m})^3 \cdot 3.00 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \simeq 5.1 \cdot 10^{12}\ \mathrm{kg}$$

Ne segue che, essendo la velocità di impatto pari a $60 \cdot 10^3\ m/s$ l'energia rilasciata nell'impatto è di:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 5.1 \cdot 10^{12}\ \mathrm{kg} \cdot \left(6.0 \cdot 10^4\ \frac{m}{s}\right)^2 \simeq 9.2 \cdot 10^{21}\,\frac{kg\,m^2}{s^2} = 9.2 \cdot 10^{21}\,J$$

2. Ma che occhi grandi che hai

A differenza degli esseri umani, i cui occhi sono sensibili alla cosiddetta "luce visibile", gli abitanti del pianeta Titanic hanno occhi sensibili nella banda radio alla frequenza di 3.2 GHz. Si vantano, tuttavia, di possedere lo stesso potere risolutivo dell'occhio dei terrestri che vale, in media, 2'. Sapendo che la relazione che lega lunghezza d'onda e frequenza è: $\lambda = c/\nu$, quanto dovrebbe essere grande la pupilla degli abitanti del pianeta Titanic se raccontassero la verità?

Soluzione.

La relazione che lega frequenza **υ** e lunghezza d'onda **λ** di una radiazione elettromagnetica è:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

Quindi gli occhi degli abitanti del pianeta Titanic sono sensibili alla radiazione di lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{299792\,\frac{km}{s}}{3.2 \cdot 10^9\,s^{-1}} \simeq 9.4\,cm$$

Espresso in secondi d'arco il potere risolutivo **α** di uno strumento di diametro **D** è dato dalla relazione:

$$\alpha = 1.22\,\frac{\lambda}{D} \cdot 206265''$$

Quindi affinché l'occhio degli abitanti del pianeta Titanic abbia lo stesso potere risolutivo dell'occhio umano dovrebbe avere un diametro pari a:

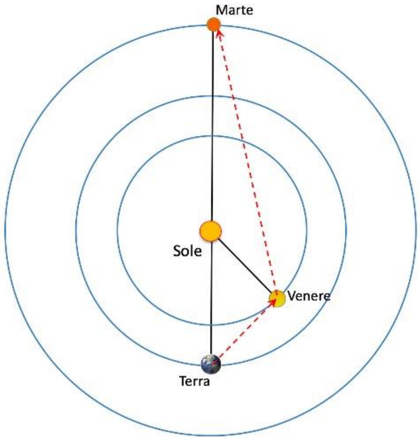
$$D = 1.22\,\frac{\lambda}{\alpha} \cdot 206265 \simeq 1.22\,\frac{9.4\,cm}{120''}\,206265'' \simeq 200\,m$$

3. Triangolazione planetaria

Un segnale radio deve essere immediatamente inviato al rover Perseverance su Marte, che purtroppo è in congiunzione con il Sole e non può essere raggiunto direttamente. Si decide di inviare il segnale verso il ripetitore VRR (Venus Radio Repeater) posto sulla superficie di Venere, che si trova alla massima elongazione. Il VRR, ricevuto il segnale, lo ritrasmette istantaneamente verso Marte. Quanto tempo impiega il segnale per essere trasmesso dalla Terra a Marte? Assumete tutte le orbite circolari e sullo stesso piano e trascurate lo spostamento dei pianeti durante la trasmissione del segnale.

Soluzione.

Se Venere è alla massima elongazione l'angolo Sole-Venere-Terra è retto. Indichiamo con $\mathbf{D_{\odot T}}$ la distanza Sole-Terra, con $\mathbf{D_{\odot V}}$ la distanza Sole-Venere, con $\mathbf{D_{\odot M}}$ la distanza Sole-Marte, con $\mathbf{D_{TV}}$ la distanza Terra-Venere e con $\mathbf{D_{VM}}$ la distanza Venere-Marte. Nell'ipotesi di orbite circolari:



$$\mathrm{D_{TV}} = \sqrt{\mathrm{D_{\odot T}}^2 - \mathrm{D_{\odot V}}^2} \simeq$$

$$\sqrt{(149.6 \cdot 10^6\, km)^2 - (108.2 \cdot 10^6\, km)^2} \simeq 103.3 \cdot 10^6\, km$$

L'angolo $\widehat{\mathbf{TSV}}$ Terra-Sole-Venere vale:

$$\widehat{TSV} = \arccos \frac{\mathbf{D_{\odot V}}}{\mathbf{D_{\odot T}}} \simeq \frac{108.2 \cdot 10^6\, km}{149.6 \cdot 10^6\, km} \simeq 43°.68$$

Quindi l'angolo $\widehat{\mathbf{MSV}}$ Marte-Sole-Venere vale:

$$\widehat{\mathrm{MSV}} = 180° - \widehat{TSV} \simeq 136°.32$$

Ricaviamo la distanza Venere-Marte applicando il teorema di Carnot:

$$\mathrm{D_{VM}} = \sqrt{\mathrm{D_{\odot M}}^2 + \mathrm{D_{\odot V}}^2 - 2\ \mathrm{D_{\odot M}} \cdot \mathrm{D_{\odot V}} \cos \widehat{MSV}} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{(227.9 \cdot 10^6\, km)^2 + (108.2 \cdot 10^6\, km)^2 - 2 \cdot 227.9 \cdot 10^6\, km \cdot 108.2 \cdot 10^6\, km \cdot \cos 136°.32}$$

$$\simeq 315.1 \cdot 10^6\, km$$

il percorso totale del segnale $\mathbf{D_{TOT}}$ è quindi:

$$D_{TOT} = \mathrm{D_{TV}} + \mathrm{D_{VM}} \simeq 418.4 \cdot 10^6 km$$

che viene percorso in un tempo **T** pari a:

$$T = \frac{D_{TOT}}{c} \simeq \frac{418.4 \cdot 10^6 km}{299792 \cdot \frac{km}{s}} \simeq 1396\, s \simeq 23\, m\, 16\, s$$

4. Stella doppia, doppia magnitudine

Alpha Centauri (α Cen) è un sistema binario composto da due stelle di luminosità rispettivamente di 1.5 e 0.5 volte quella del Sole. Il sistema dista da noi 4.344 anni luce, mentre le due stelle distano tra loro 20.0 UA. Osservate α Cen a occhio nudo e con il telescopio spaziale Hubble, alla lunghezza d'onda di 5500 Å. Il potere risolutivo dell'occhio umano è in media 2', mentre lo specchio del telescopio spaziale Hubble ha un diametro di 2.4 m. Assumete il piano orbitale delle componenti di α Cen perpendicolare alla direzione di osservazione.

1. In entrambi i casi distinguete le due componenti del sistema binario?
2. Calcolate la magnitudine apparente di α Cen osservata a occhio nudo, trascurando l'assorbimento dell'atmosfera terrestre, e con il telescopio spaziale Hubble.

Soluzione.

1. Dette **D** la distanza di α Cen dalla Terra e **d** la distanza tra le due componenti, poiché il piano orbitale è perpendicolare alla direzione di osservazione, la distanza angolare $\boldsymbol{\theta_\alpha}$ tra le due stelle è:

$$\theta_\alpha = \arctan \frac{d}{D} \simeq \arctan \frac{20.0\, UA}{4.344\, anni\ luce} \simeq \arctan \frac{29.9 \cdot 10^8\, km}{4.110 \cdot 10^{13}\, km} \simeq 4°.17 \cdot 10^{-3} \simeq 15.0"$$

Detti **d** il diametro dello specchio e **λ** la lunghezza d'onda di osservazione, la risoluzione $\boldsymbol{\theta_H}$ del telescopio spaziale Hubble in secondi d'arco vale:

$$\theta_H = 1.22\,\frac{\lambda}{d}\cdot 206265'' \simeq 1.22\,\frac{5500\;\cdot\;10^{-10}\,m}{2.4\,m}\cdot 206265'' \simeq 0.058''$$

Pertanto α Cen appare come una singola sorgente a occhio nudo, mentre il telescopio spaziale Hubble è in grado di risolvere le due componenti.

2. Indichiamo con $\mathbf{F_\odot}$, $\mathbf{L_\odot}$, $\mathbf{m_\odot}$ e $\mathbf{d_\odot}$, rispettivamente, il flusso che la Terra riceve dal Sole, la luminosità del Sole, la magnitudine apparente del Sole e la distanza del Sole dalla Terra. Allo stesso modo indichiamo con $\mathbf{F_\alpha}$, $\mathbf{L_\alpha}$, $\mathbf{m_\alpha}$ e $\mathbf{d_\alpha}$, rispettivamente, il flusso che la Terra riceve dalle due componenti di α Cen, la luminosità totale delle due componenti, la magnitudine apparente delle due componenti non risolte e la distanza di α Cen dalla Terra.
Poiché sappiamo che:

$$L_\alpha = 1.5\,L_\odot + 0.5\,L_\odot = 2.0\,L_\odot$$

La differenza tra la magnitudine apparente delle due componenti non risolte e la magnitudine del Sole vale:

$$m_\alpha - m_\odot = -2.5\log\frac{F_\alpha}{F_\odot} = -2.5\log\left(\frac{L_\alpha}{4\pi\,{d_\alpha}^2}\,\frac{4\pi\,{d_\odot}^2}{L_\odot}\right) = -2.5\log\left(\frac{2\,{d_\odot}^2}{{d_\alpha}^2}\right)$$

e quindi:

$$m_\alpha = m_\odot - 2.5\,log\left(\frac{2\,{d_\odot}^2}{{d_\alpha}^2}\right) \simeq -26.74 - 2.5\,log\left(\frac{4.476\;\cdot\;10^{16}\,km^2}{1.689\;\cdot\;10^{27}\,km^2}\right) \simeq -0.30$$

Il telescopio Hubble è invece in grado di distinguere le due stelle, dette quindi $m_{\alpha-1}$ e $m_{\alpha-2}$ le magnitudini apparenti delle due componenti si ha:

$$m_{\alpha-1} = m_\odot - 2.5\,log\left(\frac{1.5\,{d_\odot}^2}{{d_\alpha}^2}\right) \simeq -26.74 - 2.5\,log\left(\frac{3.357\;\cdot\;10^{16}\,km^2}{1.689\;\cdot\;10^{27}\,km^2}\right) \simeq 0.01$$

$$m_{\alpha-2} = m_\odot - 2.5\,log\left(\frac{0.5\,{d_\odot}^2}{{d_\alpha}^2}\right) \simeq -26.74 - 2.5\,log\left(\frac{1.119\;\cdot\;10^{16}\,km^2}{1.689\;\cdot\;10^{27}\,km^2}\right) \simeq 1.21$$

5. La magnitudine di Saturno

L'estate scorsa l'astronomo D. Stratt si è cimentato nel calcolo della magnitudine visuale di Saturno all'opposizione, sulla base del suo raggio, della sua distanza dal Sole, assunta pari al semiasse maggiore dell'orbita, e della sua albedo. Quale valore ha ottenuto? L'astronomo ha scoperto però che la magnitudine di Saturno all'opposizione può arrivare fino a circa -0.5, in netto disaccordo con la sua stima. Quali errori può avere commesso D. Stratt?

Soluzione.

Detta $\mathbf{D_{TS}}$ la distanza Terra-Saturno e $\mathbf{a_T}$ e $\mathbf{a_S}$ i semiassi maggiori delle orbite dei due pianeti, poiché Saturno è in opposizione si ha:

$$D_{TS} = a_S - a_T \simeq 1.427\;\cdot\;10^9\text{ km} - 149.6\;\cdot\;10^6\text{ km} \simeq 1.277\;\cdot\;10^9\text{ km}$$

Detti $\mathbf{F_{\odot T}}$ e $\mathbf{F_{\odot S}}$ i flussi del Sole alla distanza della Terra e di Saturno, $\mathbf{L_\odot}$ la luminosità del Sole, $\mathbf{R_S}$ e **a** il raggio e l'albedo di Saturno, la quantità di luce $\mathbf{L_S}$ riflessa dal disco di Saturno (che è illuminato al 100% in quanto siamo all'opposizione) sarà:

$$L_S = a\cdot F_{\odot S}\cdot\pi\,R_S^2 = \frac{a\,L_\odot\,\pi\,R_S^2}{4\,\pi\,{a_S}^2}$$

Questa luminosità, osservata da Terra, si distribuisce su una semisfera di raggio pari a $\mathbf{D_{TS}}$ e quindi il flusso $\mathbf{F_S}$ di Saturno alla distanza della Terra vale:

$$F_S = \frac{L_S}{2\,\pi\,{D_{TS}}^2} = \frac{a\,L_\odot\,\pi\,R_S^2}{4\,\pi\,{a_S}^2\;\cdot\;2\,\pi\,{D_{TS}}^2} = \frac{a\,L_\odot\,R_S^2}{8\,\pi\,{a_S}^2\;\cdot\;{D_{TS}}^2}$$

La differenza tra la magnitudine visuale del Sole $\mathbf{m_\odot}$ e quella di Saturno $\mathbf{m_S}$ si ottiene dalla relazione:

$$m_S - m_\odot = -2.5\log\frac{F_S}{F_\odot} = -2.5\log\frac{\mathrm{a}\,\mathrm{L}_\odot\,\mathrm{R}_\mathrm{S}^2}{8\,\pi\,\mathrm{a_S}^2\cdot\mathrm{D_{TS}}^2}\cdot\frac{4\,\pi\,\mathrm{a_T}^2}{L_\odot} = -2.5\log\frac{\mathrm{a}\;\mathrm{R}_\mathrm{S}^2\,\mathrm{a_T}^2}{2\,\mathrm{a_S}^2\,\mathrm{D_{TS}}^2}$$

$$m_S = m_\odot - 2.5\log\frac{\mathrm{a}\;\mathrm{R}_\mathrm{S}^2\,\mathrm{a_T}^2}{2\,\mathrm{a_S}^2\,\mathrm{D_{TS}}^2}$$

$$m_S = -26.74 - 2.5\log\frac{0.499\cdot 3.632\cdot 10^9\ \mathrm{km}^2\cdot 2.238\cdot 10^{16}\ \mathrm{km}^2}{2\cdot 2.036\cdot 10^{18}\ \mathrm{km}^2\cdot 1.631\cdot 10^{18}\ \mathrm{km}^2} \simeq 1.30$$

Ma, come detto, la magnitudine media di Saturno all'opposizione può arrivare fino a circa -0.5. Il motivo principale dell'errore dell'astronomo D. Stratt sta nell'avere completamente trascurato la riflessione della luce solare da parte degli anelli di Saturno. Il diametro degli anelli è infatti di circa $275\cdot 10^3\mathrm{km}$, ovvero oltre il doppio del raggio del pianeta; inoltre la loro albedo è maggiore rispetto a quella del pianeta. Il contributo alla luce riflessa da Saturno da parte degli anelli varia in funzione dell'angolo con cui sono visti dalla Terra. L'unico caso in cui tale contributo può essere trascurato è quando gli anelli appaiono di taglio, ma questo accade ogni 15 anni in media, l'ultima volta alla fine del 2008.