# XXII Campionati Italiani di Astronomia

## Finale Nazionale - 17 aprile 2024

## Prova Teorica - Categoria Senior

### 1. La Terra sincrona

Se la Terra avesse un periodo di rivoluzione esattamente uguale a un giorno siderale:

a) A quale distanza si troverebbe dalla fotosfera del Sole?

b) Visto dalla Terra, quale sarebbe il diametro angolare apparente del Sole?

**Soluzione**

Applichiamo la III Legge di Keplero all'orbita terrestre nella situazione ipotetica descritta dal problema. Esprimendo il semiasse maggiore **a** in unità astronomiche e il periodo di rivoluzione **T** in anni terrestri attuali, abbiamo:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1\,.$$

Il numero di giorni siderali in un periodo orbitale della Terra è esattamente uguale a 365.256 giorni solari più uno. Quindi:

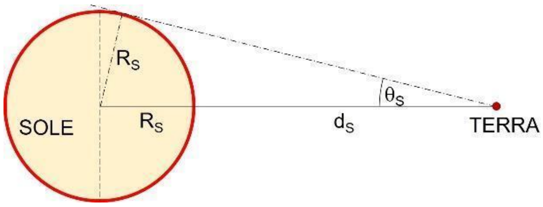
$$T = \frac{1 \text{ giorno siderale}}{366.256 \text{ giorni siderale}} \simeq 2.7303 \cdot 10^{-3} \text{ anni}\,,$$

da cui

$$a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{(2.7303 \cdot 10^{-3})^2} \simeq 1.9535 \cdot 10^{-2} \text{ UA} \simeq 2.922 \cdot 10^9 \text{ m} = 2.922 \cdot 10^6 \text{ km}\,.$$

Sottraendo il raggio solare $\mathbf{R_S}$, la Terra dovrebbe trovarsi a una distanza $\mathbf{d_S}$ dalla superficie solare pari a:

$$d_S = a - R_S = 2.227 \cdot 10^6 \text{ km}\,.$$




Per calcolare il diametro angolare apparente del Sole $\boldsymbol{\theta_S}$ visto dalla Terra, facciamo riferimento alla figura a destra:

$$\sin\theta_S = \frac{R_S}{R_S + d_S}$$

da cui

$$\theta_S = \arcsin\left(\frac{R_S}{R_S + d_S}\right) = \arcsin\left(\frac{R_S}{a}\right) = \arcsin\left(\frac{0.6955 \cdot 10^6}{2.922 \cdot 10^6}\right) \simeq 13.77°\,.$$

Il diametro angolare apparente $\mathbf{D_a}$ sarebbe dunque:

$$D_a = 2\,\theta_S \simeq 27.54°.$$

### 2. Ai confini del Sistema Solare

Il Sole si muove su un'orbita circolare intorno al centro galattico. A quale distanza dal Sole la sua attrazione gravitazionale è esattamente bilanciata dall'attrazione gravitazionale del resto della Galassia? Trascurate gli effetti della rotazione del Sole attorno al centro galattico.

**Soluzione**

Il Sole orbita a una distanza di $D_\odot = 2.72 \cdot 10^4$ anni luce = 8.34 kpc dal centro galattico, dunque Imponiamo la condizione che la velocità orbitale del Sole intorno al centro galattico $v_\odot$ coincida con la prima velocità cosmica. Dette $\mathbf{M_{Gal}}$ la massa galattica all'interno dell'orbita solare e la $\mathbf{D_\odot}$ distanza del Sole dal centro della Via Lattea si ha:

$$v_\odot = \sqrt{\frac{G\,M_{Gal}}{D_\odot}}\,,$$

da cui:

$$M_{Gal} = \frac{v_{\odot}^2\ D_{\odot}}{G}.$$

Calcoliamo la velocità orbitale del Sole:

$$v_{\odot} = \frac{2\,\pi\,D_{\odot}}{T_{\odot}} = \frac{6.28\ \cdot\ 8.34\ \cdot 10^3\ \ \cdot\ \ 3.09\ \cdot\ 10^{16}\ \mathrm{m}}{2.30\ \cdot\ 10^8\ \ \cdot 3.65\ \cdot\ 10^2 \cdot\ 8.64\ \cdot\ 10^4\ \mathrm{s}} \simeq 2.23 \cdot\ 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

e ricaviamo la massa galattica contenuta entro l'orbita del Sole:

$$M_{Gal} = \frac{v_{\odot}^2\ D_{\odot}}{G} = \frac{(2.23\ \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2\ \ \cdot\ \ 8.34\ \cdot 10^3\ \ \cdot\ \ 3.09\ \cdot\ 10^{16}\ \mathrm{m}}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\ \ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot \mathrm{s}^2}} \simeq 1.92\ \cdot 10^{41}\,\mathrm{kg} \simeq 9.66 \cdot 10^{10}\ M_{\odot}\quad .$$

Poiché la forza di attrazione risultante di $M_{Gal}$ equivale a quella della stessa massa concentrata nel centro galattico, possiamo scrivere la relazione di equilibrio delle forze gravitazionali su una massa generica **m**, ad una distanza **R** dal Sole (e quindi a distanza $D_{\odot} - R$ dal centro galattico):

$$G \cdot \frac{M_{Gal}\ m}{(D_{\odot} - R)^2} = G \cdot \frac{M_{\odot}\ m}{R^2}$$

da cui, semplificando G e m, otteniamo

$$\frac{M_{Gal}}{(D_{\odot} - R)^2} = \frac{M_{\odot}}{R^2}.$$

Riorganizzando i termini, possiamo scrivere

$$\frac{(D_{\odot} - R)^2}{R^2} = \frac{M_{Gal}}{M_{\odot}} = 9.66\ \cdot\ 10^{10}$$

ed estraendo la radice da ambo i membri, otteniamo

$$\frac{D_{\odot} - R}{R} = \frac{D_{\odot}}{R} - 1 = 3.11 \cdot 10^5$$

da cui

$$R = \frac{D_{\odot}}{1 + 3.11 \cdot 10^5} = \frac{8.34\ \mathrm{kpc}}{1 + 3.11 \cdot 10^5} \simeq \frac{8.34 \cdot 10^3\ \ \mathrm{pc}}{3.11 \cdot 10^5} \simeq 2.68\ \cdot\ 10^{-2}\ \mathrm{pc}\,.$$

**Nota**: il valore ottenuto è una forte sottostima del raggio della distanza oltre la quale la gravità della Galassia predomina su quella del Sole, in quanto viene trascurato il contributo della forza centrifuga dovuto alla rivoluzione del Sole intorno al centro galattico. Per tenerne conto, si dovrebbe calcolare il *raggio di Hill* del Sole, che risulta di 1.26 pc.

**3. Osservando il Sole**

Due osservatori nell'emisfero boreale, posti entrambi al livello del mare, si trovano alla stessa latitudine e a longitudini $\lambda_1$ = 15° 16' 30" e $\lambda_2$ = 195° 16' 30". Per entrambi la culminazione superiore del Sole avviene a sud dello zenith, l'orizzonte è sgombro e il cielo perfettamente sereno. In un certo istante il tempo solare medio del primo osservatore è $T_{sm1}$ = 12h 00m. Trascurando il valore dell'equazione del tempo:

1. calcolate il tempo solare medio nello stesso istante per il secondo osservatore;
2. descrivete a quali latitudini e in quali giorni dell'anno dovrebbero trovarsi i due osservatori affinché entrambi possano vedere il Sole quando $T_{sm1}$ = 12h 00m ;
3. descrivete a quali latitudini e in quali giorni dell'anno dovrebbero trovarsi i due osservatori affinché entrambi non possano vedere il Sole quando $T_{sm1}$ = 12h 00m .

**Soluzione**

1. La differenza di longitudine tra i due osservatori è $\Delta\lambda$ = 180° che, convertita in tempo, equivale a una differenza di 12h.

   Quindi per il secondo osservatore: $T_{sm2} = T_{sm1} + \Delta\lambda$ =12h 00m + 12h 00m = 24h .

2. L'angolo orario del Sole per i due osservatori vale: $H_1 = 0h$, $H_2 = 12h$. Quindi per il primo osservatore il Sole sta passando al meridiano in direzione sud (massima altezza sull'orizzonte), mentre per il secondo sta passando al meridiano in direzione nord (minima altezza sull'orizzonte). L'altezza minima del Sole osservato da una località a latitudine $\varphi$ è data dalla relazione: $h_{min} = -90° + \varphi + \delta$. La minima latitudine dalla quale il Sole è visibile a 12h di angolo orario nell'emisfero boreale si ottiene imponendo $h_{min} = 0°$, ovvero $\varphi = 90° - \delta$, il cui valore minimo corrisponde alla massima declinazione del Sole, che viene raggiunta al solstizio d'estate, ed è quindi $\varphi_{min} = 90 - 23° 26' = 66° 34'$, ovvero la latitudine del circolo polare artico. Tuttavia, il Sole non è una sorgente puntiforme, avendo una dimensione di circa 30', e inoltre all'orizzonte la rifrazione contribuisce ad aumentare l'altezza del Sole per circa ulteriori 35'. Questi due effetti portano il limite a: $\varphi_{min} \simeq 66° 34' - 15' – 35' \simeq$ **65° 44'**. A questa latitudine i due osservatori potranno entrambi osservare il Sole quando $T_{sm1} = 12h$ per un giorno all'anno. A latitudini maggiori il numero di giorni aumenterà, fino ad arrivare a circa 6 mesi se si trovano nelle immediate vicinanze del Polo nord.

3. In questo caso occorre che il primo osservatore non veda il Sole al passaggio al meridiano in direzione sud. L'altezza massima del Sole osservato da una località a latitudine $\varphi$ è data dalla relazione: $h_{max} = 90° - \varphi + \delta$ . La minima latitudine dalla quale il Sole non è visibile a 0h di angolo orario nell'emisfero boreale si ottiene imponendo $h_{max} = 0°$, ovvero $\varphi = 90° + \delta$, il cui valore minimo corrisponde alla minima declinazione del Sole, che viene raggiunta al solstizio d'inverno, ed è quindi $\varphi_{min} = 90 - 23° 26' = 66° 34'$, ovvero la latitudine del circolo polare artico. Considerando la dimensione apparente del Sole e la rifrazione il limite sarà: $\varphi_{min} = 66° 34' + 15' + 35' \simeq$ **67° 24'**. A questa latitudine i due osservatori non potranno osservare il Sole quando $T_{sm1} = 12h$ per un giorno all'anno. A latitudini maggiori il numero di giorni aumenterà, fino ad arrivare a circa 6 mesi se si trovano nelle immediate vicinanze del Polo Nord.

**4. L'Astropolpo tra le chele del granchio**

Nello spettro di una stella nella costellazione del Cancro si osserva una riga di assorbimento del calcio (valore misurato in laboratorio $\lambda_0 = 3968.46730$ Å) che mostra uno spostamento verso il rosso che varia tra un valore massimo di 3968.82920 Å e un valore minimo di 3968.82820 Å, in modo ciclico con un periodo di 4867 giorni. Questa variazione viene interpretata come dovuta alla presenza del mitico Astropolpo, già incontrato nella Gara Interregionale, orbitante intorno alla stella a una distanza dal suo centro di 5.447 UA. Assumete l'orbita del polpo circolare, che il piano della sua orbita formi un angolo di 37° con la vostra linea di vista e, trascurando l'effetto gravitazionale dei pianeti del sistema, determinate la massa dell'Astropolpo.

**Soluzione**

Lo spostamento verso il rosso della riga del calcio è dovuto a due componenti: il moto di allontanamento della stella e l'oscillazione della stella intorno al centro di massa comune con l'Astropolpo. Dette $\boldsymbol{\lambda_M}$ la lunghezza d'onda massima e $\boldsymbol{\lambda_m}$ la lunghezza d'onda minima, il valore medio delle lunghezze d'onda ci restituisce lo spostamento verso il rosso dovuto al moto radiale del baricentro del sistema:

$$\lambda_B = \frac{\lambda_M + \lambda_m}{2} = 3968.82870 \text{ Å},$$

mentre gli spostamenti verso il rosso massimo e minimo corrispondono ai momenti in cui la stella ha una componente di oscillazione rispettivamente in allontanamento da noi o verso di noi. In tali momenti la velocità radiale della stella rispetto al baricentro è

$$v_{*,r} = \frac{\lambda_M - \lambda_B}{\lambda_0} c = \frac{5.0 \cdot 10^{-4} \text{ Å}}{3968.46730 \text{ Å}} \, 2.99792 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \simeq \pm 38 \, \frac{m}{s}.$$

Quindi, il modulo della velocità della stella vale

$$v_* = \frac{v_{*,r}}{\cos \, 37°} \simeq 47 \, \frac{m}{s},$$

e il raggio dell'orbita della stella è:

$$a_* = \frac{v_* \, T}{2\pi} = \frac{47 \, \frac{m}{s} \, \cdot \, 4867 \text{ giorni} \, \cdot \, 86400 \text{ s}}{6.28} \simeq 3.1 \, \cdot \, 10^6 \text{ km} \simeq 0.021 \text{ UA}.$$

Il raggio dell'orbita dell'Astropolpo intorno al centro di massa è

$$a_P = a - a_* = 5.447\ \mathrm{UA} - 0.021\ \mathrm{UA} = 5.426\ \mathrm{UA}\,.$$

La massa **$M_{tot}$** del sistema stella più Astropolpo è data dalla III legge di Keplero:

$$M_{tot} = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} = \frac{39.48 \cdot (5.447 \cdot 1.496 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m})^3}{6.674\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot \mathrm{s}^2} \cdot (4867 \cdot 86400\ \mathrm{s})^2} \simeq 1.81 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}\,.$$

La massa dell'Astropolpo e della stella sono inversamente proporzionali alle rispettive distanze dal centro di massa:

$$\frac{m_*}{m_P} = \frac{a_P}{a_*},$$

$$\frac{m_* + m_P}{m_P} = \frac{a_P + a_*}{a_*},$$

$$m_P = \frac{a_*}{a} \cdot M_{tot} = \frac{0.021\ \mathrm{UA}}{5.447\ \mathrm{UA}} \cdot 1.81 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} \simeq 7.0 \cdot 10^{27}\ \mathrm{kg}\,,$$

da cui si ricava che l'Astropolpo è circa 3.7 volte più massiccio di Giove ed è quindi notevolmente ingrassato rispetto alla Gara Interregionale.

**5. Una nebulosa oscura minaccia la Terra**

Immaginate che il Sistema Solare attraversi una gigantesca nube di polvere e che il moto orbitale della Terra venga rallentato dall'attrito con le particelle della nube. Se l'attrito causa una diminuzione costante di energia orbitale della Terra pari a $3.20 \cdot 10^{20}$ J/s, calcolate il raggio dell'orbita terrestre (assumendola circolare e supponendo che tale rimanga) dopo $1.00 \cdot 10^5$ anni di permanenza nella nube.

**Soluzione**

L'energia orbitale totale della Terra è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. Il valore **$E_0$** prima dell'attraversamento della nube, è dato dall'espressione:

$$E_0 = \frac{1}{2}\, m_T\, v_T^2 - \frac{G\, M_\odot\, m_T}{R_0}\,.$$

Poiché l'orbita è circolare, la velocità della Terra coincide con la prima velocità cosmica:

$$v_T = \sqrt{\frac{G\, M_\odot}{R_0}}$$

e, sostituendo nell'espressione dell'energia:

$$E_0 = \frac{1}{2}\, m_T \cdot \left(\frac{G\, M_\odot}{R_0}\right) - \frac{G\, M_\odot\, m_T}{R_0} = -\frac{G\, M_\odot\, m_T}{2\, R_0}\,.$$

.

Detta **$P_{att}$** la perdita di energia al secondo, dopo un tempo **t** l'energia diviene **$E_t$**, che corrisponde all'energia orbitale alla nuova distanza **$R_t$** dal Sole:

$$E_t = -\frac{G\, M_\odot\, m_T}{2\, R_t}\,.$$

Questo valore è pari a quello iniziale, diminuito per la quantità dispersa per attrito:

$$E_t = -\frac{G\, M_\odot\, m_T}{2\, R_0} - P_{att}\, t\,.$$

Uguagliando i secondi membri delle ultime due relazioni e ricavando **$R_t$** si ottiene

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_0} + \frac{2\, P_{att}\, t}{G\, M_\odot\, m_T}$$

$$R_t = \frac{1}{\left(\frac{1}{149.6 \cdot 10^9\ \mathrm{m}} + \frac{2\ \cdot\ 3.20 \cdot 10^{20}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} \cdot 10^5 \cdot 365.25\ \ \cdot 86400\ \mathrm{s}}{6.674 \cdot 10^{-11}\, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{kg}}\ \cdot\ 1.989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}\ \cdot\ 5.972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}\right)} \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{\left(\frac{1}{149.6 \cdot 10^9\ \mathrm{m}} + \frac{2.02 \cdot 10^{33}\ \mathrm{J}}{7.93 \cdot 10^{44}\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{m}}\right)} \simeq 1.08 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m} \simeq 0.723\ \mathrm{UA}\,,$$

il che significa che la nuova orbita della Terra avrebbe un raggio circa uguale a quello che ha attualmente l'orbita di Venere.