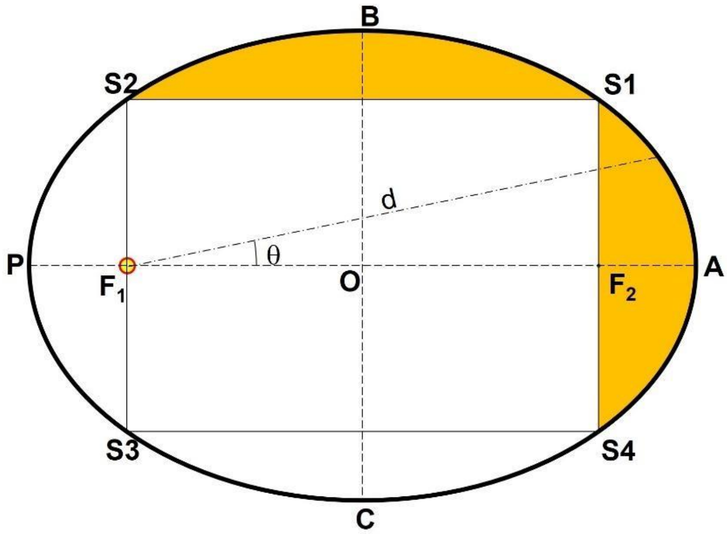
XXII Campionati Italiani di Astronomia

Finale Nazionale - 17 aprile 2024

Prova Pratica - Categoria Senior

1. Osservabilità della cometa Rootsquare-2

La cometa periodica Rootsquare-2 si muove intorno al Sole su un'orbita ellittica di semiasse maggiore 4.061 UA ed eccentricità $1/\sqrt{2} \simeq 0.7071$. Per tale valore dell'eccentricità, l'ellisse ha una serie di proprietà "speciali", tra cui spicca, in particolare, l'equivalenza delle aree delle cosiddette "lunette ellittiche" perpendicolari ai due assi, che corrispondono alle zone colorate nella figura qui sotto, dove il Sole si trova nel fuoco F_1.



Ipotizzando che all'istante iniziale la cometa si trovi all'afelio, si considerino i punti A, S1, B, S2, P, S3, C, S4 e di nuovo A, che caratterizzano una rivoluzione completa. In corrispondenza a tali punti, completate la tabella sottostante con le distanze d, le longitudini θ, e i tempi t necessari a percorrere i tratti che vanno dall'afelio a ciascuno dei suddetti punti dell'orbita.

Cometa Rootsquare-2			
Posizione	**d (UA)**	**t (anni)**	**θ (°)**
A (inizio)		0	0
S1			
B			
S2			
P			
S3			
C			
S4			
A (fine)			

Soluzione

Data la simmetria dell'ellisse rispetto all'asse maggiore, sarà sufficiente calcolare le grandezze richieste solo nel tratto A(inizio)-S1-B-S2-P, risultando in questo modo automaticamente determinate le grandezze anche nei punti A(fine)-S4-C-S3, come riportato **provvisoriamente** nella tabella seguente:

Cometa Rootsquare-2			
Posizione	**d (UA)**	**t (anni)**	**θ (°)**
A (inizio)	$d(A_{inizio}) = a(1+e)$	$t(A_{inizio}) = 0$	$\theta(A_{inizio}) = 0$
S1	$d(S_1)$	$t(S_1)$	$\theta(S_1)$
B	$d(B) = a$	$t(B)$	$\theta(B)$
S2	$d(S_2)$	$t(S_2)$	$\theta(S_2) = 90°$
P	$d(P) = a(1-e)$	$t(P) = T_{riv}/2$	$\theta(P) = 180°$
S3	$d(S_3) = d(S_2)$	$t(S_3) = T_{riv} - t(S_2)$	$\theta(S_3) = \theta(S_2)$
C	$d(C) = d(B)$	$t(C) = T_{riv} - t(B)$	$\theta(C) = 360° - \theta(B)$
S4	$d(S_4) = d(S_1)$	$t(S_4) = T_{riv} - t(S_1)$	$\theta(S_4) = 360° - \theta(S_1)$
A (fine)	$d(A_{fine}) = d(A_{inizio})$	$t(A_{fine}) = T_{riv}$	$\theta(A_{fine}) = 360° - \theta(A_{inizio})$

dove T_{riv} è il periodo di rivoluzione della cometa.
Determiniamo ora le grandezze tipiche dell'ellisse, cominciando dalle distanze d e dalle longitudini θ.
Poiché la distanza tra il centro e ciascun fuoco è $a \cdot e$, avremo

$$\underline{OF_1} = \underline{OF_2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

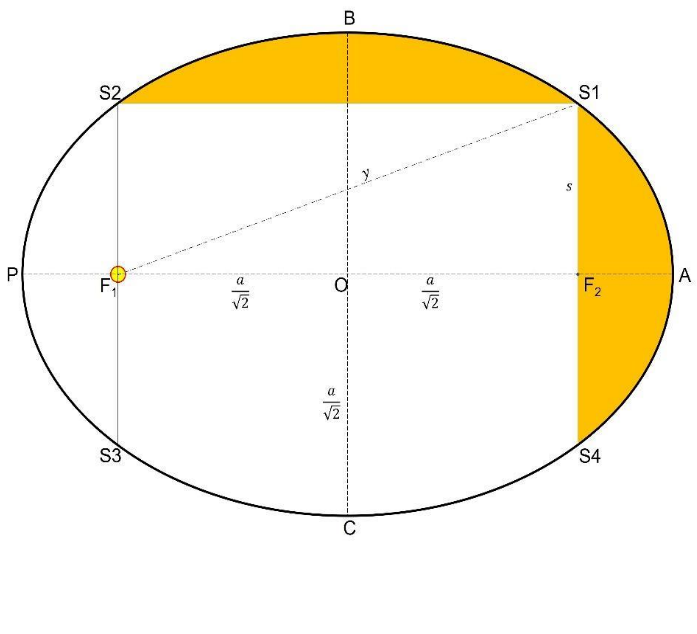
mentre per il semiasse minore b si ha:

$$b = a\sqrt{1-e^2} = a\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = a\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Vediamo che $b = \underline{OF_1} = \underline{OF_2}$: il triangolo F_1OB è in realtà la metà di un quadrato di lato b, per cui

$$\theta(B) = 45° \qquad \text{e} \qquad \theta(C) = 360° - 45° = 315°\,.$$

Con riferimento alla figura sottostante, infine, possiamo calcolare la lunghezza del cosiddetto semilato retto: $\underline{F_2S_1} = \underline{F_2S_4} = \underline{F_1S_2} = \underline{F_1S_3}$.



Utilizzando infatti:

1) il Teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo $F_1F_2S_1$, in cui s è il semilato $\overline{F_2S_1}$, y è l'ipotenusa $\overline{F_1S_1}$ e il terzo cateto è $\overline{F_2F_2} = 2 \cdot a/\sqrt{2} = a\sqrt{2}$,
2) la proprietà fondamentale dell'ellisse, per cui in particolare in questo triangolo la somma delle distanze di S1 da F1 (y) e da F2 (s) è costante e pari alla lunghezza dell'asse maggiore 2a,

possiamo scrivere il seguente sistema:

$$y + s = 2a$$
$$y^2 - s^2 = \left(2\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2a^2\,.$$

Sostituendo nella seconda equazione l'espressione $y = 2a - s$, otteniamo

$$(2a - s)^2 - s^2 = 2\,a^2\,, \qquad 4a^2 - 4as = 2a^2\,,$$

$$2s = a\,, \quad s = \frac{a}{2}\,, \qquad y = \frac{3}{2}a\,.$$

Completiamo quindi la lista delle distanze:

$$d(A_{inizio}) = d(A_{fine}) = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 4.061\text{ UA} \cdot 1.707 \simeq 6.932\text{ UA}\,,$$
$$d(S_1) = d(S_4) = y = \frac{3}{2}a = 4.061\text{ UA} \cdot 1.5 \simeq 6.091\text{ UA}\,,$$
$$d(B) = d(C) = a = 4.061\text{ UA}\,,$$
$$d(S_2) = d(S_3) = s = \frac{a}{2} = 2.030\text{ UA}\,,$$
$$d(P) = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 4.061\text{ UA} \cdot 0.2929 \simeq 1.189\text{ UA}\,.$$

e completiamo anche il calcolo delle longitudini determinando il valore di $\theta(S_1)$:

$$\theta(S_1) = \arcsin\left(\frac{s}{y}\right) = \arcsin\left(\frac{a/2}{3a/2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \cong 19.47°.$$

Ancora in modo provvisorio, la tabella da compilare risulta adesso essere la seguente:

Cometa Rootsquare-2			
Posizione	**d (UA)**	**t (anni)**	**θ (°)**
A (inizio)	**6.932**	$t(A_{inizio}) = 0$	**0**
S1	**6.091**	$t(S_1)$	**19.47**
B	**4.061**	$t(B)$	**45**
S2	**2.030**	$t(S_2)$	**90**
P	**1.189**	$t(P) = T_{riv}/2$	**180**
S3	**2.030**	$t(S_3) = T_{riv} - t(S_2)$	**90**
C	**4.061**	$t(C) = T_{riv} - t(B)$	**315**
S4	**6.091**	$t(S_4) = T_{riv} - t(S_1)$	**340.53**
A (fine)	**6.932**	$t(A_{fine}) = T_{riv}$	**360**

Per completare la tabella con i tempi di attraversamento, dobbiamo innanzitutto calcolare il periodo di rivoluzione, utilizzando la III Legge di Keplero in cui i semiassi sono misurati in UA e i periodi di rivoluzione in anni:

$$T_{riv} = \sqrt{a^3} = 8.184 \text{ anni}$$

e quindi t(P)=4.092 anni.

Per calcolare il tempo di attraversamento del generico punto X dell'orbita ellittica, che chiamiamo t(X), utilizziamo quindi la II legge di Keplero, calcolando l'area spazzata dalla congiungente Sole-Cometa tra il punto A e il punto X e ricorrendo alla proporzione:

$$\frac{A(X)}{t(X) - t(A_{iniziale})} = \frac{A_{ellisse}}{T_{riv} - t(A_{iniziale})}$$

da cui, poiché $t(A_{iniziale})=0$, si ricava

$$t(X) = \frac{A(X)}{A_{ellisse}} T_{riv}.$$

Dobbiamo quindi calcolare le varie aree spazzate: diventa essenziale calcolare l'area di ciascuna delle quattro lunette ellittiche.
Sappiamo per definizione che per questa ellisse esse sono tutte equivalenti (hanno cioè la stessa area), e vediamo facilmente che la somma delle loro aree è pari alla differenza tra l'area dell'ellisse $A_{ellisse}$ e l'area del rettangolo S_1S_2 S_3S_4 , quindi l'area della singola lunettaA' (per esempio S_1S_4A) sarà pari a ¼ di questa differenza:

$$A_{ellisse} = \pi\, a\, b = \frac{\pi\, a^2}{\sqrt{2}},$$

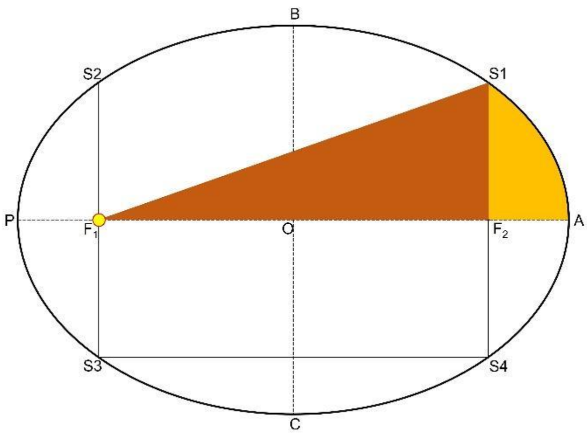
$$A_{S1S2S3S4} = \left(2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{a}{2}\right) = a^2\sqrt{2},$$

$$A' = \frac{\frac{\pi\, a^2}{\sqrt{2}} - a^2\sqrt{2}}{4} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}}.$$

Converrà anche, per il calcolo dei tempi di attraversamento, considerar l'area A" della semi-lunetta (per esempio S_1F_2A), che per motivi di simmetria sarà semplicemente metà di A':

$$A'' = \frac{A'}{2} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}}.$$

Siamo ora pronti per calcolare i tempi di attraversamento dei punti S1, B e S2, che corrispondono agli intervalli di tempo necessari alla congiungente Sole-Cometa per spazzare le aree dei segmenti ellittici, rispettivamente, OF_1S_1, OF_1B e OF_1S_2 .
Facendo riferimento alle figure corrispondenti, calcoliamo queste tre aree.



Tempo di attraversamento di S_1 .

La regione spazzata è costituita dalla semi-lunetta S_1F_2A e dal triangolo rettangolo $S_1F_1F_2$, quest'ultima pari a

$$A_{F1F2S1} = \frac{1}{2} 2 \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}.$$

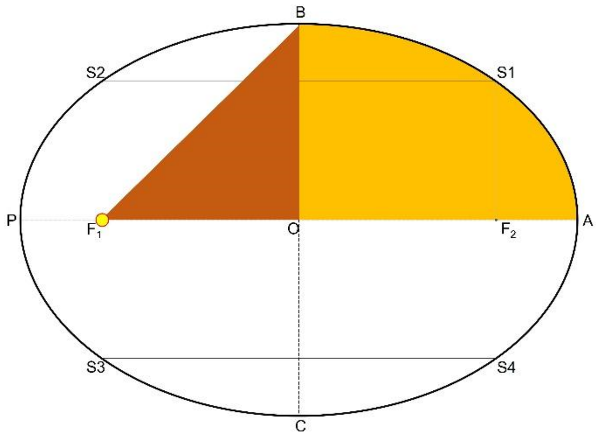
L'area è pari alla somma di queste due aree:

$$A(S_1) = A'' + A_{F1F2S1} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}} + \frac{a^2}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}},$$

Il tempo di attraversamento di S_1 è dunque

$$t(S_1) = \frac{A(S_1)}{A_{ellisse}} T_{riv} = \frac{\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}} T_{riv} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4\pi}\right) T_{riv} = 1.674 \text{ anni}.$$

<u>Tempo di attraversamento di B .</u>
La regione spazzata è costituita dal quarto di ellisse AOB e dal triangolo rettangolo F_1OB , quest'ultima pari a



$$A_{F1OB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4}.$$

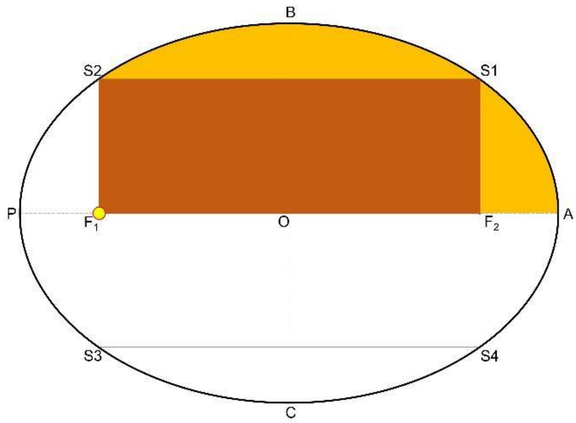
L'area è pari alla somma di queste due aree:

$$A(B) = \frac{A_{ellisse}}{4} + \frac{a^2}{4},$$

il tempo di attraversamento di B è dunque

$$t(B) = \frac{A(B)}{A_{ellisse}} T_{riv} = \frac{A_{ellisse} + a^2}{4A_{ellisse}} T_{riv} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi}\right) T_{riv} = 2.967 \text{ anni.}$$

<u>Tempo di attraversamento di S_2 .</u>
La regione spazzata è costituita dalla semi-lunetta S_1F_2A, dalla lunetta S_1S_2B e dal rettangolo $F_1F_2S_1S_2$, aventi rispettivamente area:



$$A_{S1F2A} = A'' = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}},$$

$$A_{S1S2B} = A' = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}},$$

$$A_{F1F2S1S2} = 2\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^2}{\sqrt{2}}.$$

L'area è pari alla somma di queste tre aree:

$$A(S_2) = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}} + \frac{a^2}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + 1\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}} = \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}}.$$

Il tempo di attraversamento di S_2 è dunque

$$t(S_2) = \frac{A(S_2)}{A_{ellisse}} T_{riv} = \frac{\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}} T_{riv} = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4\pi}\right) T_{riv} = 3.720 \text{ anni.}$$

Dati questi tempi, possiamo calcolare infine i tempi di attraversamento in S_3, C ed S_4 :

$$t(S_3) = T_{riv} - t(S_2) = (8.184 - 3.720) \text{ anni} = 4.464 \text{ anni},$$

$$t(C) = T_{riv} - t(B) = (8.184 - 2.967) \text{ anni} = 5.217 \text{ anni},$$

$$t(S_4) = T_{riv} - t(S_1) = (8.184 - 1.674) \text{ anni} = 6.510 \text{ anni}.$$

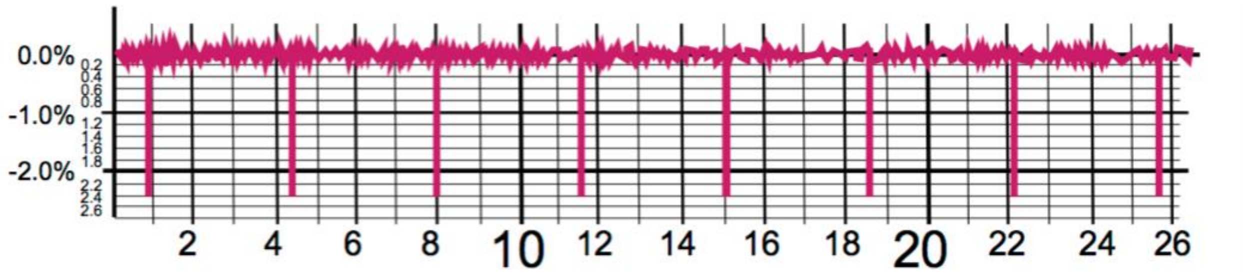
La tabella definitiva, compilata con tutti i dati, è quindi la seguente:

Cometa Rootsquare-2			
Posizione	**d (UA)**	**t (anni)**	**θ (°)**
A (inizio)	6.932	0	0
S1	6.091	1.674	19.47
B	4.061	2.967	45
S2	2.030	3.720	90
P	1.189	4.092	180
S3	2.030	4.464	270
C	4.061	5.217	315
S4	6.091	6.510	340.53
A (fine)	6.932	8.184	360

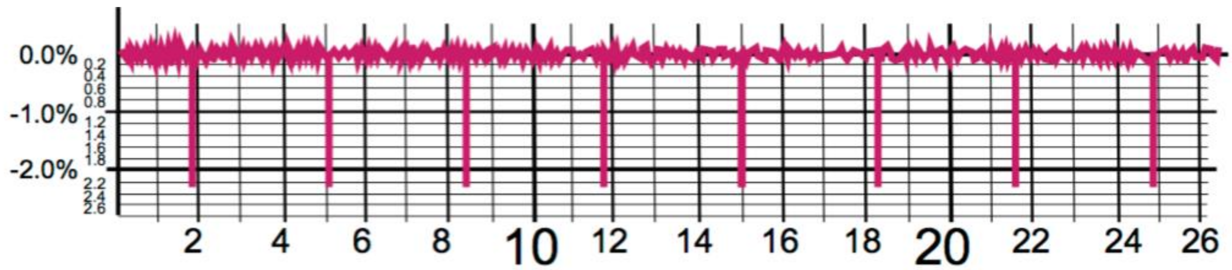
2. Missione Kepler: alla ricerca di mondi abitabili

La missione spaziale Kepler della Nasa ha scoperto migliaia di esopianeti utilizzando il metodo dei transiti, ovvero le variazioni periodiche di luminosità provocate dal passaggio dei pianeti orbitanti attorno alle loro “stelle madri”. Gli esopianeti individuati sono denominati con il nome della stella madre seguito da una lettera minuscola in ordine alfabetico iniziando da “b” per il primo pianeta scoperto intorno a una data stella, “c” per il secondo e così via. Qui sotto sono riportate le curve di luce di alcuni transiti dei primi quattro pianeti di Kepler-5. Il tempo sull’asse orizzontale è espresso in giorni. Completate la tabella, sapendo che la massa dei pianeti è trascurabile rispetto a quella della stella intorno a cui orbitano.

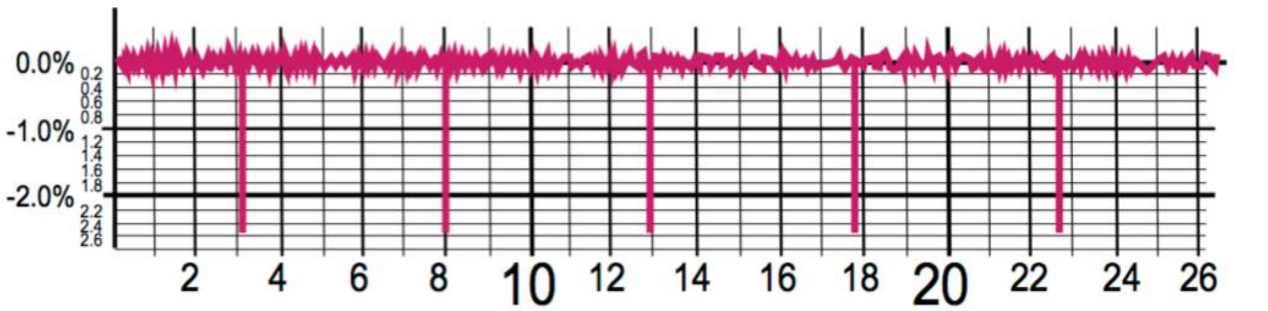
Pianeta	**Massa della stella ($M_\odot$)**	**Periodo orbitale (giorni)**	**Semiasse maggiore (UA)**	**Semiasse maggiore (km)**
Kepler-5b			0.05064	
Kepler-6b	1.21			
Kepler-7b				$9.35\ 10^{6}$
Kepler 8b	1.21			
Kepler-452b	1.04			$1.56\ 10^{8}$



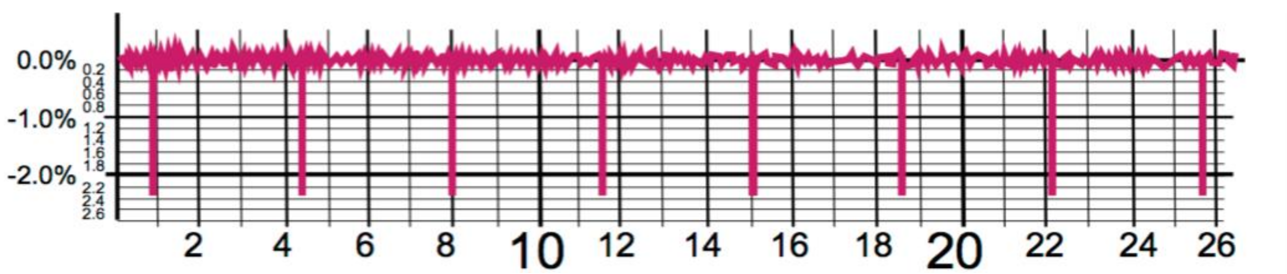
Kepler 5b



Kepler 6b



Kepler 7b



Kepler 8b

Soluzione

Una volta ricavato il periodo orbitale (per ridurre l'errore conviene misurare il tempo compreso fra il primo e l'ultimo minimo e dividere per il numero dei periodi), usando la III legge di Keplero si ottengono il semiasse maggiore qualora sia nota la massa della stella o, viceversa, la massa della stella qualora sia noto il semiasse maggiore. È ovviamente possibile eseguire tutti i calcoli dettagliati, oppure usare la formula adimensionale, che lega la massa della stella M in masse solari, il periodo T in anni, e il semiasse maggiore a in UA:

$$T(\text{anni})^2 = \frac{a(\text{UA})^3}{M(m_\odot)}$$

da cui

$$T(\text{anni}) = \sqrt{\frac{a(\text{UA})^3}{M(m_\odot)}},$$

$$a(\text{UA}) = \sqrt[3]{(T\ (\text{anni}))^2 M(m_\odot)} \quad \text{e}$$

$$M(m_\odot) = \frac{a(\text{UA})^3}{T(\text{anni})^2}$$

I risultati sono riportati nella tabella seguente (sono evidenziati in grassetto i dati forniti nella traccia). Il fattore che limita la precisione è il periodo orbitale.

Pianeta	**Massa della stella ($M_\odot$)**	**Periodo orbitale (giorni)**	**Semiasse maggiore (UA)**	**Semiasse maggiore (km)**
Kepler-5b	1.3	3.6	**0.05064**	$7.58 \cdot 10^6$
Kepler-6b	**1.21**	3.2	0.045	$6.8 \cdot 10^6$
Kepler-7b	1.4	4.9	0.0625	$\mathbf{9.35 \cdot 10^6}$
Kepler 8b	**1.21**	3.5	0.048	$7.2 \cdot 10^6$
Kepler-452b	**1.04**	3.81	1.043	$\mathbf{1.56 \cdot 10^8}$