XXII Campionati Italiani di Astronomia

Finale Nazionale - 17 aprile 2024

Prova Teorica - Categoria Master

1. La Terra sincrona

Se la Terra avesse un periodo di rivoluzione esattamente uguale a un giorno siderale:

a) A quale distanza si troverebbe dalla fotosfera del Sole?

b) Visto dalla Terra, quale sarebbe il diametro angolare apparente del Sole?

c) Visto dalla Terra, quale sarebbe la magnitudine apparente del Sole?

Soluzione

Applichiamo la III Legge di Keplero all'orbita terrestre nella situazione ipotetica descritta dal problema. Esprimendo il semiasse maggiore **a** in unità astronomiche e il periodo di rivoluzione **T** in anni terrestri attuali, abbiamo:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1 .$$

Il numero di giorni siderali in un periodo orbitale della Terra è esattamente uguale a 365.256 giorni solari più uno.

Quindi:

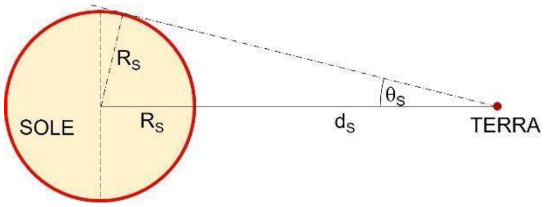
$$T = \frac{1 \text{ giorno siderale}}{366.256 \text{ giorni siderale}} \simeq 2.7303 \cdot 10^{-3} \text{ anni} ,$$

da cui

$$a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{(2.7303 \cdot 10^{-3})^2} \simeq 1.9535 \cdot 10^{-2} \text{ UA} \simeq 2.922 \cdot 10^9 \text{ m} = 2.922 \cdot 10^6 \text{ km} .$$

Sottraendo il raggio solare $\mathbf{R_S}$, la Terra dovrebbe trovarsi a una distanza $\mathbf{d_S}$ dalla superficie solare pari a:

$$d_S = a - R_S = 2.227 \cdot 10^6 \text{ km} .$$



Per calcolare il diametro angolare apparente del Sole $\boldsymbol{\theta_S}$ visto dalla Terra, facciamo riferimento alla figura a destra:

$$\sin \theta_S = \frac{R_S}{R_S + d_S}$$

da cui

$$\theta_S = \arcsin\left(\frac{R_S}{R_S + d_S}\right) = \arcsin\left(\frac{R_S}{a}\right) = \arcsin\left(\frac{0.6955 \cdot 10^6}{2.922 \cdot 10^6}\right) \simeq 13.77° .$$

Il diametro angolare apparente $\mathbf{D_a}$ sarebbe dunque:

$$D_a = 2\,\theta_S \simeq 27.54°.$$

Per calcolare infine la magnitudine apparente del Sole usiamo la formula di Pogson. Detta **M** la magnitudine assoluta del Sole e dopo avere convertito **a** in parsec ($a = 1.953 \cdot 10^{-2}$ UA $= 9.469 \cdot 10^{-8}$ pc), otteniamo:

$$m_{d_S} = M + 5 \log a - 5 = 4.83 + 5 \log (9.469 \cdot 10^{-8} \text{ pc}) - 5 = -35.29.$$

2. Lancio e fuga in Re minore

Un razzo, inizialmente fermo, parte in verticale dalla superficie terrestre, spinto da un potente motore che gli assicura, oltre che di vincere la gravità terrestre, un'accelerazione costante di 8.000 m/s^2. Il razzo, nel momento in cui raggiunge la velocità di fuga, spegne i motori.

a) Quanto tempo è trascorso dal lancio nel momento in cui vengono spenti i motori?

b) A quale distanza dalla superficie terrestre vengono spenti i motori?

c) A che distanza e dopo quanto tempo andrebbero spenti i motori se il lancio avvenisse dalla superficie lunare? Trascurate la velocità di rotazione terrestre.

Soluzione

a) Nel tratto compreso tra il lancio e lo spegnimento dei motori, il razzo ha un moto uniformemente accelerato, con accelerazione costante **a**. Dette **r(t)** e **v(t)** la distanza dal centro della Terra e la velocità del razzo all'istante t, ponendo l'origine dei tempi (t=0) al momento del lancio, e detto $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra, la legge del moto per r(t) e v(t) si scrive come

$$r(t) = R_T + \frac{1}{2} a\, t^2 ,$$

$$v(t) = a\, t .$$

Detta $\mathbf{M_T}$ la massa della Terra, la velocità di fuga $\mathbf{v_f}$ alla distanza r è data da

$$v_f = \sqrt{\frac{2\, G\, M_T}{r}} = \sqrt{\frac{2\, G\, M_T}{R + \frac{1}{2}\, a\, t^2}} .$$

Eguagliando la velocità del razzo al tempo t alla velocità di fuga alla distanza r:

$$a\, t = \sqrt{\frac{2\, G\, M}{R + \frac{1}{2}\, a\, t^2}} ,$$

$$a^2\, t^2 = \frac{2\, G\, M}{R + \frac{1}{2}\, a\, t^2} ,$$

da cui otteniamo l'equazione di quarto grado

$$\frac{1}{2}\, a^3\, t^4 + R\, a^2\, t^2 - 2\, G\, M = 0 .$$

Questa è un'equazione biquadratica, che si risolve introducendo la nuova incognita $\tau = t^2$:

$$\frac{1}{2}\, a\, \tau^2 + R\, \tau - \frac{2\, G\, M}{a^2} = 0 .$$

Calcoliamo le radici di questa equazione:

$$\tau_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\, \frac{1}{2}\, a\, (-\frac{2\, G\, M}{a^2})}}{2\, \frac{1}{2}\, a} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + \frac{4\, G\, M}{a}}}{a} .$$

Vediamo subito che soltanto la radice positiva (quella con il segno + davanti alla radice) è accettabile, in quanto τ è il quadrato di un tempo e quindi deve essere positivo. Dunque abbiamo una soluzione per il quadrato del tempo T trascorso dal lancio allo spegnimento dei motori:

$$T^2 = \frac{\sqrt{R^2 + \frac{4\, G\, M}{a}} - R}{a} ,$$

le cui soluzioni sono

$$T = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{R^2 + \frac{4\,G\,M}{a}} - R}{a}}\,,$$

di cui solo quella positiva è accettabile:

$$T = \sqrt{\frac{\sqrt{(6.378 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^2 + \frac{\left(4\ \cdot\ 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}\ \cdot\ 5.972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}\right)}{8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} - 6.378 \cdot 10^6\ \mathrm{m}}{8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \simeq 1067\ \mathrm{s}\,.$$

b) Al tempo T dal lancio corrisponde una distanza **d** dalla superficie terrestre:

$$d = r(T) - R = \frac{1}{2}\,a\,T^2 = \frac{1}{2}\,8.000\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,(1067\ \mathrm{s})^2 \simeq 4.554 \cdot 10^6\ \mathrm{m}\,.$$

c) Se il razzo fosse lanciato dalla Luna, a parità di accelerazione verticale netta, si ridurrebbero sia il tempo che la distanza ai quali si raggiunge la velocità di fuga. Ripetendo i calcoli con il raggio e la massa della Luna, si ricavano un tempo pari a:

$$T = \sqrt{\frac{\sqrt{(1.738 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^2 + \frac{\left(4\ \cdot\ 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}\ \cdot\ 7.342 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}\right)}{8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} - 1.738 \cdot 10^6\ \mathrm{m}}{8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \simeq 274.1\ \mathrm{s}\,,$$

e una distanza pari a:

$$d = \frac{1}{2} \cdot a\,T^2 \simeq 300.5\ \mathrm{km}\,.$$

3. La stella felina

La gattina Karel sta osservando il cielo con il suo telescopio (comprato coi punti delle crocchette), quando la sua attenzione viene catturata dalla stella PURR 126 nella costellazione della Lince, che ha esattamente la massa e il raggio del nostro Sole. Tuttavia, come si può desumere dalle sue righe spettrali, PURR 126 è composta unicamente da gatti neri super-resistenti al calore e alla pressione, che, giocando tra loro, emettono radiazione come dei corpi neri. Ogni gatto ha una massa di 4.0 kg e ognuno di essi irradia in tutte le direzioni una potenza di 0.30 W. Calcolate:

a) la temperatura superficiale di PURR 126;
b) la lunghezza d'onda corrispondente al massimo di emissione dello spettro di PURR 126.

N.B. Nessun gatto, nero o di altro colore, è stato maltrattato per realizzare questo problema.

Soluzione

Il numero di gatti si ottiene dividendo la massa della stella, pari a quella del Sole $\mathbf{M}_\odot$ per la massa **m** di un gatto. Indicando con **P** la potenza irradiata da un gatto, la potenza totale irradiata **L**, che è la luminosità della stella, vale:

$$L = P\,\frac{M_\odot}{m} = 0.30\ \mathrm{W}\ \frac{1.989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}{4.0\ \mathrm{kg}} \simeq\ 1.5 \cdot 10^{29}\ \mathrm{W}\,.$$

La temperatura di PURR 126 si ricava dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$T = \sqrt[4]{\frac{L}{4\,\pi\,R_\odot^2\,\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1.5 \cdot 10^{29}\ \mathrm{W}}{12.56 \cdot (6.955 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m})^2 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4}}} \simeq 2.6 \cdot 10^{4}\ \mathrm{K}\,,$$

che corrisponde a un colore blu.

Dalla legge dello spostamento di Wien, il picco di emissione si verifica alla lunghezza d'onda:

$$\lambda_{max} = \frac{2.898\ \mathrm{mm}}{T} \simeq 1.1 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{mm}\ = 0.11\ \mu\mathrm{m}\,.$$

Quindi la stella, nonostante abbia massa e raggio pari al Sole, ha il massimo dell'emissione nell'ultravioletto.

4. Una nebulosa oscura minaccia la Terra

Immaginiamo che il sistema Solare attraversi una gigantesca nube di polvere e che il moto orbitale della Terra venga rallentato dall'attrito con le particelle della nube. Se l'attrito causa una diminuzione costante di energia orbitale della Terra pari a $3.20 \cdot 10^{20}$ J/s, calcolare il raggio dell'orbita terrestre (assumendola circolare e supponendo che tale rimanga) dopo $1.00 \cdot 10^{5}$ anni di permanenza nella nube.

Soluzione

L'energia orbitale totale della Terra è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. Il valore $\mathbf{E_0}$ prima dell'attraversamento della nube, è dato dall'espressione:

$$E_0 = \frac{1}{2}\,m_T\,v_T^2 - \frac{G\,M_\odot\,m_T}{R_0}\,.$$

Poiché l'orbita è circolare, la velocità della Terra coincide con la prima velocità cosmica:

$$v_T = \sqrt{\frac{G\,M_\odot}{R_0}}$$

e, sostituendo nell'espressione dell'energia:

$$E_0 = \frac{1}{2}\,m_T\left(\frac{G\,M_\odot}{R_0}\right) - \frac{G\,M_\odot\,m_T}{R_0} = -\frac{G\,M_\odot\,m_T}{2R_0}\,.$$

Detta $\mathbf{P_{att}}$ la perdita di energia al secondo, dopo un tempo **t** l'energia diviene $\mathbf{E_t}$, che corrisponde all'energia orbitale alla nuova distanza $\mathbf{R_t}$ dal Sole:

$$E_t = -\frac{G\,M_\odot\,m_T}{2\,R_t}\,.$$

Questo valore è pari a quello iniziale, diminuito per la quantità dispersa per attrito:

$$E_t = -\frac{G\ M_\odot\,m_T}{2\,R_0} - P_{att}\,t\,.$$

Uguagliando i secondi membri delle ultime due relazioni e ricavando $\mathbf{R_t}$ si ottiene

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_0} + \frac{2\, P_{att}\, t}{G\, M_\odot\, m_T},$$

$$R_t = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{149.6 \cdot 10^9\ m} + \dfrac{2 \cdot 3.20 \cdot 10^{20}\ \frac{J}{s} \cdot 10^5 \cdot 365.25 \cdot 86400\ s}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{s^2 \cdot kg} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ kg \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}\right)} \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{\left(\dfrac{1}{149.6 \cdot 10^9\ m} + \dfrac{2.02 \cdot 10^{33}\ J}{7.93 \cdot 10^{44}\ J \cdot m}\right)} \simeq 1.08 \cdot 10^{11}\ m \simeq 0.723\ UA,$$

il che significa che la nuova orbita della Terra avrebbe un raggio circa uguale a quello che ha attualmente l'orbita di Venere.

5. Contemplando il tramonto del Sole sulla Luna

Un astronauta si trova sulla Luna, in una regione del Mare della Tranquillità caratterizzata dall'avere un'ampia porzione di orizzonte perfettamente rettilineo e libero da alture o altri ostacoli. In questa posizione, l'astronauta vede il Sole al tramonto, già con metà del disco al di sotto dell'orizzonte. L'astronauta deve tornare alla Base Karel distante 15 km, utilizzando il suo Corty-Rover che si muove a una velocità di 35 km/h. Il Corty-Rover è alimentato a pannelli solari, che richiedono una quantità di luce non inferiore a quella di una sorgente di magnitudine apparente m = –10.

a) Qual è la magnitudine del Sole nella condizione iniziale di questo problema?
b) Qual è la magnitudine del Sole quando il centro del suo disco è al di sotto dell'orizzonte di un angolo uguale ai 3/4 del proprio raggio angolare?
c) Qual è la magnitudine del Sole quando il centro del suo disco è al di sotto dell'orizzonte di un angolo uguale ai 9/10 del proprio raggio angolare?
d) L'astronauta riesce a raggiungere la Base Karel prima del tramonto totale del Sole?

Considerate il disco solare circolare, di diametro 0.53° e di luminosità uniforme, assumete che il Sole tramonti in direzione perpendicolare all'orizzonte e approssimate la distanza Luna-Sole alla distanza media Terra-Sole.

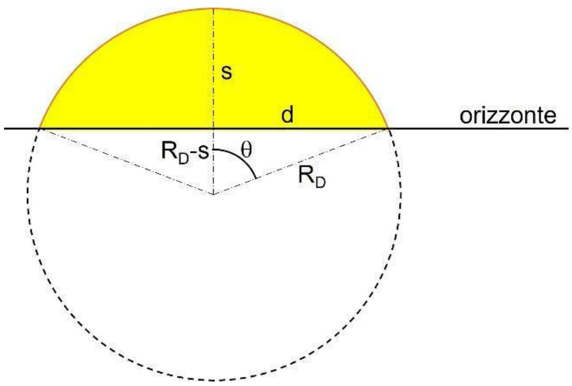
Soluzione

Si tratta prima di tutto di calcolare la magnitudine $\mathbf{m_S}$ della parte del disco solare avente area $\mathbf{A_S}$, situata sopra l'orizzonte quando un segmento **s** del diametro è visibile, utilizzando la formula di Pogson applicata al caso di sorgenti estese:

$$m_s = m_{sup} - 2.5 \log A_s\ ,$$

dove $\mathbf{m_{sup}}$ è la magnitudine superficiale del Sole. Allo stesso modo, detto $\mathbf{R_D}$ il raggio angolare del disco solare visto dalla Luna, possiamo scrivere la magnitudine di tutto il disco solare $\mathbf{m_\odot}$:

$$m_\odot = m_{sup} - 2.5 \cdot \log(\pi\, R_D^2)$$



sottraendo membro a membro le ultime due equazioni ricaviamo:

$$m_s = m_\odot - 2.5 \log \frac{A_s}{\pi\, R_D^2}$$

Consideriamo la figura a lato, in cui il centro del disco solare è sotto dell'orizzonte di $R_{D\text{-}S}$ e solo il segmento circolare, di area A_S, altezza S, e base 2d risulta visibile.

Utilizzando il teorema di Pitagora, possiamo ricavare d in funzione di S e R:

$$d^2 = {R_D}^2 - (R_D - S)^2 = {R_D}^2 - {R_D}^2 + 2R_{D-S} - S^2 = 2R_{D-S} - S^2$$

$$d = \sqrt{2R_{D-S} - S}\,.$$

Sempre dalla figura ricaviamo l'angolo θ:

$$\theta = \arccos\left(\frac{R_D - S}{R_D}\right).$$

L'area A_S del segmento circolare al di sopra dell'orizzonte è pari alla differenza tra l'area del settore circolare avente raggio R_D e ampiezza angolare 2θ e l'area del triangolo avente base 2d e altezza $R_{D\text{-}S}$:

$$A = \frac{2\,\theta}{2\,\pi}\,\pi\,{R_D}^2 - \frac{1}{2}\,2\,d\,(R_D - S) = \theta\,{R_D}^2 - d\,(R_D - S)\,.$$

La magnitudine della frazione di Sole situato sopra l'orizzonte è:

$$m_s = m_\odot - 2.5\cdot\log\left[\frac{\theta\,{R_D}^2 - d\,(R_D - S)}{\pi\,R_D^2}\right] = m_\odot - 2.5\,\log\left[\frac{\theta}{\pi} - \frac{d\,(R_D - S)}{\pi\,R_D^2}\right].$$

a) Nella condizione iniziale del problema, il disco solare si trova per metà sotto l'orizzonte, quindi $S = R_D$ e (vedi figura) $\theta = \pi/2$:

$$m_{\frac{1}{2}} = m_\odot - 2.5\,\log\frac{1}{2} = -26.74 - 2.5\,\log\frac{1}{2} = -25.99\,.$$

b) Nella condizione in cui il centro del disco si trova sotto l'orizzonte di ¾ del raggio, solo ¼ del raggio è sopra l'orizzonte, allora $S = R_D/4$, per θ e d si ottiene:

$$d_{3/4} = \sqrt{\frac{2\,{R_D}^2}{4} - \frac{{R_D}^2}{16}} = R_D\,\frac{\sqrt{7}}{4}\,,$$

$$\theta_{3/4} = \arccos\left(\frac{R_D - \frac{R_D}{4}}{R_D}\right) = \arccos\frac{3}{4} = 41.41°\,,$$

da cui ricaviamo

$$m_{3/4} = m_\odot - 2.5\,\log\left[\frac{41.41}{180} - \frac{R_D\,\frac{\sqrt{7}}{4}\left(R_D - \frac{1}{4}R_D\right)}{\pi\,R_D^2}\right] = -26.74 - 2.5\,\log\left(0.230 - \frac{3\sqrt{7}}{16\,\pi}\right) = -23.88\,.$$

Infine, nella condizione in cui il disco solare si trova di 9/10 sotto l'orizzonte, ovvero per $S = R_D/10$, per θ e d si ottiene:

$$d_{9/10} = \sqrt{\frac{2\,{R_D}^2}{10} - \frac{{R_D}^2}{100}} = R_D\,\frac{\sqrt{19}}{10}\,,$$

$$\theta_{9/10} = \arccos\left(\frac{R_D - \frac{R_D}{10}}{R_D}\right) = \arccos\frac{9}{10} = 25.84°\,,$$

da cui ricaviamo

$$m_{\frac{9}{10}} = m_{\odot} - 2.5 \cdot \log\left[\frac{25.84}{180} - \frac{R_D \, \frac{\sqrt{19}}{10} \left(R_D - \frac{1}{10}\, R_D\right)}{\pi R \cdot_D^2}\right] =$$

$$= -26.74 - 2.5 \log\left(0.1436 - \frac{9\sqrt{19}}{100\,\pi}\right) = = -22.42\,.$$

d) Dobbiamo considerare la velocità apparente con cui il Sole si muove in cielo, visto dalla Luna. Poiché la Luna ruota su sé stessa con periodo pari al proprio periodo di rivoluzione (P = 27.322 giorni), ma la Terra a sua volta ruota intorno al Sole con periodo T = 365.256 giorni, il periodo del moto di rivoluzione solare apparente intorno alla Luna sarà il periodo sinodico della Luna:

$$S = \frac{T\,P}{T - P} = 29.53 \text{ giorni} = 2.5515 \cdot 10^{6} \text{ s}\,.$$

Con una semplice proporzione, possiamo quindi calcolare in quanto tempo Δt il disco solare si sposta in cielo di un angolo pari al proprio diametro angolare:

$$T : 360° = \Delta t : 0.53°$$

da cui

$$\Delta t = \frac{0.53°}{360°} \cdot 2.5515 \cdot 10^{6} \text{ s} \simeq 3756 \text{ s} \simeq 63 \text{ min.}$$

Quindi il Sole tramonterà completamente dopo metà di questo tempo, cioè 31.5 minuti. Tuttavia, dopo 9/10 di tale intervallo di tempo, cioè circa 28 minuti, il disco del Sole sarà immerso per 9/10 del raggio e la sua luminosità residua sarà ancora quasi 12.5 magnitudini più brillante del minimo necessario per i pannelli solari del Corty-Rover. In 28 minuti, alla velocità di 35 km/h, il Corty-Rover percorre uno spazio

$$\Delta s = 35 \, \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 28 \text{ min} = 35 \, \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0.467 \text{ h} = 16.33 \text{ km}\,,$$

quindi l'astronauta riesce sicuramente a raggiungere la Base Karel prima del tramonto totale del Sole.

Nota: in realtà, il tempo esatto perché il Sole tramonti completamente dipende anche dallo spostamento del rover. Tale movimento non è del tutto trascurabile, ma considerarlo nel calcolo richiede una certa complicazione e dipende anche dalla direzione del rover rispetto alla direzione del Sole, quindi si è scelto di non richiedere questo dettaglio nella soluzione.