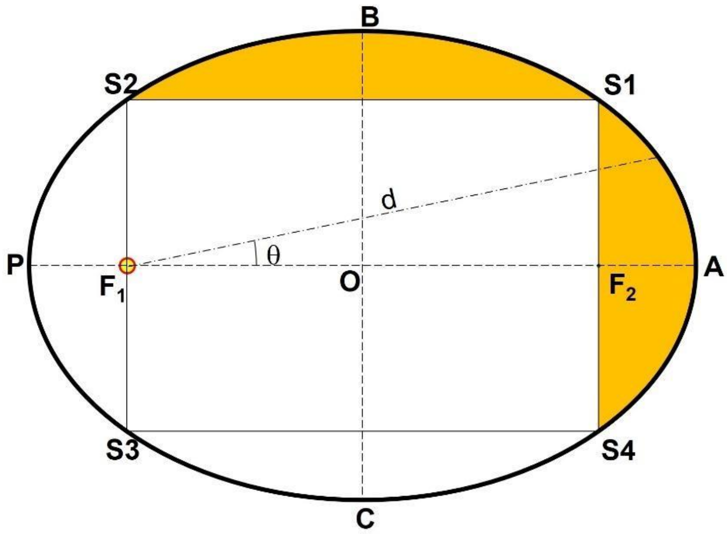
# XXII Campionati Italiani di Astronomia

## Finale Nazionale - 17 aprile 2024

## Prova Pratica - Categoria Master

**1. Osservabilità della cometa Rootsquare-2**

La cometa periodica Rootsquare-2 si muove intorno al Sole su un'orbita ellittica di semiasse maggiore 4.061 UA ed eccentricità $1/\sqrt{2} \simeq 0.7071$ . Per tale valore dell'eccentricità, l'ellisse ha una serie di proprietà "speciali", tra cui spicca, in particolare, l'equivalenza delle aree delle cosiddette "lunette ellittiche" perpendicolari ai due assi, che corrispondono alle zone colorate nella figura qui sotto, dove il Sole si trova nel fuoco $F_1$.




Ipotizzando che all'istante iniziale la cometa si trovi all'afelio, si considerino i punti A, S1, B, S2, P, S3, C, S4 e di nuovo A, che caratterizzano una rivoluzione completa. In corrispondenza a tali punti, completate la tabella sottostante con le distanze d, le longitudini θ, e i tempi t necessari a percorrere i tratti che vanno dall'afelio a ciascuno dei suddetti punti dell'orbita.

| **Cometa Rootsquare-2** | | | |
|---|---|---|---|
| **Posizione** | **d (UA)** | **t (anni)** | **θ (°)** |
| A (inizio) | | 0 | 0 |
| S1 | | | |
| B | | | |
| S2 | | | |
| P | | | |
| S3 | | | |
| C | | | |
| S4 | | | |
| A (fine) | | | |

**Soluzione**

Data la simmetria dell'ellisse rispetto all'asse maggiore, sarà sufficiente calcolare le grandezze richieste solo nel tratto A(inizio)-S1-B-S2-P, risultando in questo modo automaticamente determinate le grandezze anche nei punti A(fine)-S4-C-S3, come riportato **provvisoriamente** nella tabella seguente:

| Cometa Rootsquare-2 | | | |
|---|---|---|---|
| **Posizione** | **d (UA)** | **t (anni)** | **θ (°)** |
| A (inizio) | $d(A_{inizio}) = a(1+e)$ | $t(A_{inizio}) = 0$ | $\theta(A_{inizio}) = 0$ |
| S1 | $d(S_1)$ | $t(S_1)$ | $\theta(S_1)$ |
| B | $d(B) = a$ | $t(B)$ | $\theta(B)$ |
| S2 | $d(S_2)$ | $t(S_2)$ | $\theta(S_2) = 90°$ |
| P | $d(P) = a(1-e)$ | $t(P) = T_{riv}/2$ | $\theta(P) = 180°$ |
| S3 | $d(S_3) = d(S_2)$ | $t(S_3) = T_{riv} - t(S_2)$ | $\theta(S_3) = \theta(S_2)$ |
| C | $d(C) = d(B)$ | $t(C) = T_{riv} - t(B)$ | $\theta(C) = 360° - \theta(B)$ |
| S4 | $d(S_4) = d(S_1)$ | $t(S_4) = T_{riv} - t(S_1)$ | $\theta(S_4) = 360° - \theta(S_1)$ |
| A (fine) | $d(A_{fine}) = d(A_{inizio})$ | $t(A_{fine}) = T_{riv}$ | $\theta(A_{fine}) = 360° - \theta(A_{inizio})$ |

dove $T_{riv}$ è il periodo di rivoluzione della cometa.
Determiniamo ora le grandezze tipiche dell'ellisse, cominciando dalle distanze d e dalle longitudini θ.
Poiché la distanza tra il centro e ciascun fuoco è $a \cdot e$, avremo

$$\underline{OF_1} = \underline{OF_2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

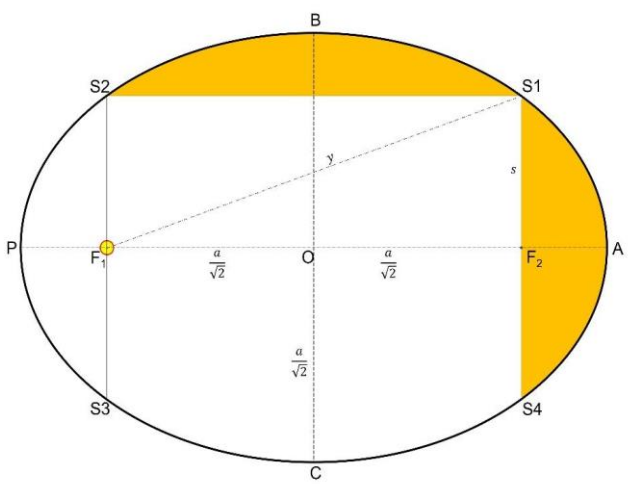
mentre per il semiasse minore b si ha:

$$b = a\sqrt{1-e^2} = a\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = a\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Vediamo che $b = \underline{OF_1} = \underline{OF_2}$ : il triangolo $F_1OB$ è in realtà la metà di un quadrato di lato b, per cui

$$\theta(B) = 45° \qquad \text{e} \qquad \theta(C) = 360° - 45° = 315°\,.$$

Con riferimento alla figura sottostante, infine, possiamo calcolare la lunghezza del cosiddetto semilato retto: $\underline{F_2S_1} = \underline{F_2S_4} = \underline{F_1S_2} = \underline{F_1S_3}$ .



Utilizzando infatti:

1) il Teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo $F_1F_2S_1$, in cui s è il semilato $\underline{F_2S_1}$ , y è l'ipotenusa $\underline{F_1S_1}$ e il terzo cateto è $\underline{F_2F_2} = 2 \cdot a/\sqrt{2} = a\sqrt{2}$,
2) la proprietà fondamentale dell'ellisse, per cui in particolare in questo triangolo la somma delle distanze di S1 da F1 (y) e da F2 (s) è costante e pari alla lunghezza dell'asse maggiore 2a,

possiamo scrivere il seguente sistema:

$$y + s = 2a$$
$$y^2 - s^2 = \left(2\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2a^2 .$$

Sostituendo nella seconda equazione l'espressione $y = 2a - s$ , otteniamo

$$(2a - s)^2 - s^2 = 2\,a^2 , \qquad 4a^2 - 4as = 2a^2 \ ,$$

$$2s = a , \quad s = \frac{a}{2} , \qquad y = \frac{3}{2}a .$$

Completiamo quindi la lista delle distanze:

$$d(A_{inizio}) = d(A_{fine}) = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 4.061\ \text{UA} \cdot 1.707 \simeq 6.932\ \text{UA} ,$$
$$d(S_1) = d(S_4) = y = \frac{3}{2}a = 4.061\ \text{UA} \cdot 1.5 \simeq 6.091\ \text{UA} ,$$
$$d(B) = d(C) = a = 4.061\ \text{UA} ,$$
$$d(S_2) = d(S_3) = s = \frac{a}{2} = 2.030\ \text{UA} \ ,$$
$$d(P) = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 4.061\ \text{UA} \cdot 0.2929 \simeq 1.189\ \text{UA} .$$

e completiamo anche il calcolo delle longitudini determinando il valore di $\theta(S_1)$:

$$\theta(S_1) = \arcsin\left(\frac{s}{y}\right) = \arcsin\left(\frac{a/2}{3a/2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \cong 19.47°.$$

Ancora in modo provvisorio, la tabella da compilare risulta adesso essere la seguente:

| **Cometa Rootsquare-2** | | | |
|---|---|---|---|
| **Posizione** | **d (UA)** | **t (anni)** | **θ (°)** |
| A (inizio) | **6.932** | $t(A_{inizio}) = 0$ | **0** |
| S1 | **6.091** | $t(S_1)$ | **19.47** |
| B | **4.061** | $t(B)$ | **45** |
| S2 | **2.030** | $t(S_2)$ | **90** |
| P | **1.189** | $t(P) = T_{riv}/2$ | **180** |
| S3 | **2.030** | $t(S_3) = T_{riv} - t(S_2)$ | **90** |
| C | **4.061** | $t(C) = T_{riv} - t(B)$ | **315** |
| S4 | **6.091** | $t(S_4) = T_{riv} - t(S_1)$ | **340.53** |
| A (fine) | **6.932** | $t(A_{fine}) = T_{riv}$ | **360** |

Per completare la tabella con i tempi di attraversamento, dobbiamo innanzitutto calcolare il periodo di rivoluzione, utilizzando la III Legge di Keplero in cui i semiassi sono misurati in UA e i periodi di rivoluzione in anni:

$$T_{riv} = \sqrt{a^3} = 8.184 \ \text{anni}$$

e quindi t(P)=4.092 anni.

Per calcolare il tempo di attraversamento del generico punto X dell'orbita ellittica, che chiamiamo t(X), utilizziamo quindi la II legge di Keplero, calcolando l'area spazzata dalla congiungente Sole-Cometa tra il punto A e il punto X e ricorrendo alla proporzione:

$$\frac{A(X)}{t(X) - t(A_{iniziale})} = \frac{A_{ellisse}}{T_{riv} - t(A_{iniziale})}$$

da cui, poiché $t(A_{iniziale})=0$, si ricava

$$t(X) = \frac{A(X)}{A_{ellisse}} T_{riv}\,.$$

Dobbiamo quindi calcolare le varie aree spazzate: diventa essenziale calcolare l'area di ciascuna delle quattro lunette ellittiche.
Sappiamo per definizione che per questa ellisse esse sono tutte equivalenti (hanno cioè la stessa area), e vediamo facilmente che la somma delle loro aree è pari alla differenza tra l'area dell'ellisse $A_{ellisse}$ e l'area del rettangolo $S_1S_2$ $S_3S_4$ , quindi l'area della singola lunettaA' (per esempio $S_1S_4A$) sarà pari a ¼ di questa differenza:

$$A_{ellisse} = \pi\, a\, b = \frac{\pi\, a^2}{\sqrt{2}}\,,$$

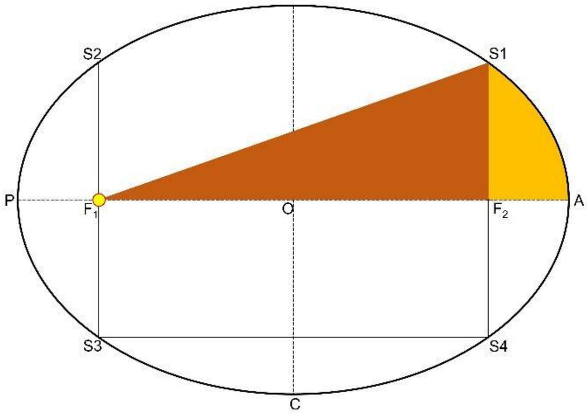
$$A_{S1S2S3S4} = \left(2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{a}{2}\right) = a^2\sqrt{2}\,,$$

$$A' = \frac{\frac{\pi\, a^2}{\sqrt{2}} - a^2\sqrt{2}}{4} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}}.$$

Converrà anche, per il calcolo dei tempi di attraversamento, considerar l'area A" della semi-lunetta (per esempio $S_1F_2A$), che per motivi di simmetria sarà semplicemente metà di A':

$$A'' = \frac{A'}{2} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}}.$$

Siamo ora pronti per calcolare i tempi di attraversamento dei punti S1, B e S2, che corrispondono agli intervalli di tempo necessari alla congiungente Sole-Cometa per spazzare le aree dei segmenti ellittici, rispettivamente, $OF_1S_1$, $OF_1B$ e $OF_1S_2$ .
Facendo riferimento alle figure corrispondenti, calcoliamo queste tre aree.




<u>Tempo di attraversamento di $S_1$ .</u>
La regione spazzata è costituita dalla semi-lunetta $S_1F_2A$ e dal triangolo rettangolo $S_1F_1F_2$ , quest'ultima pari a

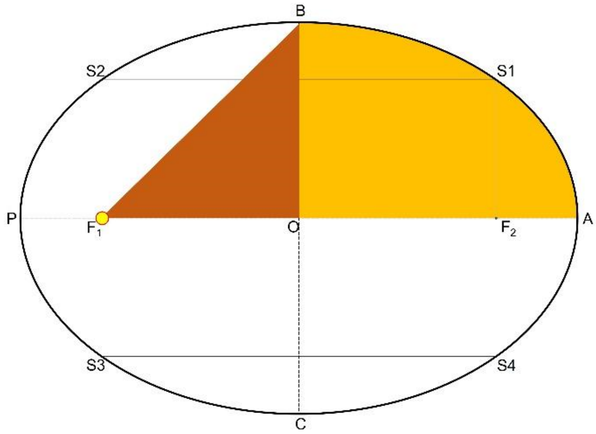
$$A_{F1F2S1} = \frac{1}{2} 2 \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}.$$

L'area è pari alla somma di queste due aree:

$$A(S_1) = A'' + A_{F1F2S1} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}} + \frac{a^2}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}},$$

Il tempo di attraversamento di $S_1$ è dunque

$$t(S_1) = \frac{A(S_1)}{A_{ellisse}} T_{riv} = \frac{\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}} T_{riv} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4\pi}\right) T_{riv} = 1.674 \text{ anni} .$$




Tempo di attraversamento di B .

La regione spazzata è costituita dal quarto di ellisse AOB e dal triangolo rettangolo $F_1OB$ , quest'ultima pari a

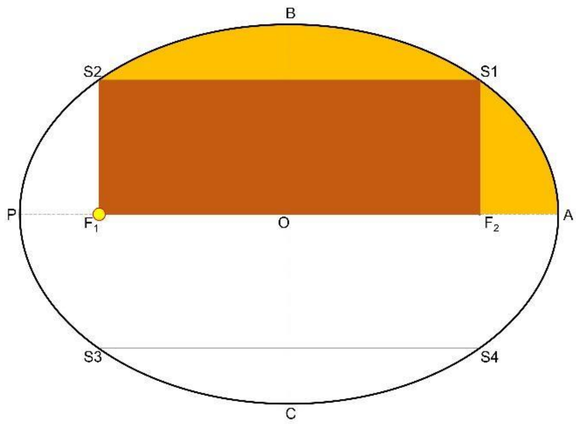
$$A_{F1OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4} .$$

L'area è pari alla somma di queste due aree:

$$A(B) = \frac{A_{ellisse}}{4} + \frac{a^2}{4} ,$$

il tempo di attraversamento di B è dunque

$$t(B) = \frac{A(B)}{A_{ellisse}} T_{riv} = \frac{A_{ellisse} + a^2}{4A_{ellisse}} T_{riv} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi}\right) T_{riv} = 2.967 \text{ anni.}$$




Tempo di attraversamento di $S_2$ .

La regione spazzata è costituita dalla semi-lunetta $S_1F_2A$, dalla lunetta $S_1S_2B$ e dal rettangolo $F_1F_2S_1S_2$, aventi rispettivamente area:

$$A_{S1F2A} = A'' = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}} ,$$

$$A_{S1S2B} = A' = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}} ,$$

$$A_{F1F2S1S2} = 2\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{\sqrt{2}} .$$

L'area è pari alla somma di queste tre aree:

$$A(S_2) = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}} + \frac{a^2}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + 1\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}} = \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}} .$$

Il tempo di attraversamento di $S_2$ è dunque

$$t(S_2) = \frac{A(S_2)}{A_{ellisse}} T_{riv} = \frac{\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)\frac{a^2}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}} T_{riv} = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4\pi}\right) T_{riv} = 3.720 \text{ anni.}$$

Dati questi tempi, possiamo calcolare infine i tempi di attraversamento in $S_3$, C ed $S_4$ :

$$t(S_3) = T_{riv} - t(S_2) = (8.184 - 3.720) \text{ anni} = 4.464 \text{ anni} ,$$

$$t(C) = T_{riv} - t(B) = (8.184 - 2.967) \text{ anni} = 5.217 \text{ anni} ,$$

$$t(S_4) = T_{riv} - t(S_1) = (8.184 - 1.674) \text{ anni} = 6.510 \text{ anni} .$$

La tabella definitiva, compilata con tutti i dati, è quindi la seguente:

| **Cometa Rootsquare-2** | | | |
|---|---|---|---|
| **Posizione** | **d (UA)** | **t (anni)** | **θ (°)** |
| A (inizio) | 6.932 | 0 | 0 |
| S1 | 6.091 | 1.674 | 19.47 |
| B | 4.061 | 2.967 | 45 |
| S2 | 2.030 | 3.720 | 90 |
| P | 1.189 | 4.092 | 180 |
| S3 | 2.030 | 4.464 | 270 |
| C | 4.061 | 5.217 | 315 |
| S4 | 6.091 | 6.510 | 340.53 |
| A (fine) | 6.932 | 8.184 | 360 |

**2. Come ti stimo la massa oscura**

Negli ultimi anni sono state pubblicate delle osservazioni che dimostrano come il numero di ammassi globulari presenti in una galassia sia legato alla massa totale della galassia stessa (massa visibile + massa oscura) determinata con altre tipologie di osservazioni. In particolare esiste un evidente legame lineare tra il logaritmo della massa totale della galassia e il logaritmo del numero di ammassi globulari in essa presenti. Nella tabella sono riportati, per galassie di differente massa, il logaritmo della massa totale stimata per la galassia in masse solari **$\log M_{TOT}\,[M_\odot]$** e il numero medio **$N_{GC}$** di ammassi globulari presenti nelle galassie con tale massa.

| **$\log M_{TOT}\,[M_\odot]$** | **$N_{GC}$** |
|---|---|
| 10.50 | 6.9 |
| 11.08 | 33.5 |
| 11.91 | 135.3 |
| 12.43 | 509.4 |
| 12.88 | 1874 |
| 13.76 | 11233 |
| 14.59 | 65793 |
| 15.32 | 403701 |

1) Disegnate il grafico che mostri l'andamento lineare.
2) Scrivete l'equazione in forma esplicita dell'andamento lineare.
3) Qual è la massa limite minima di una galassia, calcolata in masse solari, perché abbia almeno un ammasso globulare?
4) Calcolate la massa totale della Via Lattea in masse solari, sapendo che essa contiene 158 ammassi globulari.
5) Sapendo che la nostra galassia ha una massa visibile equivalente a circa 60 miliardi di masse solari, stimate la percentuale della massa visibile rispetto alla massa totale.
6) Disegnate un grafico a torta, che illustri come si distribuisce la massa totale della Via Lattea tra massa visibile e massa oscura.

**Soluzione**

1. La scala delle ordinate ha un'estensione estremamente maggiore di quella delle ascisse; inoltre la relazione tra le due grandezze non è lineare. Per fare il grafico in modo opportuno, bisogna necessariamente considerare anche sull'asse delle ordinate il logaritmo del numero degli ammassi globulari. Così facendo si ottiene un andamento lineare.

2. L'equazione della retta è riportata in rosso all'interno del grafico stesso.


3. Per stimare la massa limite minima della galassia che abbia almeno un ammasso globulare, bisogna guardare all'intercetta della retta sull'asse delle ascisse (ovvero il termine noto dell'equazione della retta). Se ne deduce che le galassie hanno ammassi globulari se hanno una massa totale maggiore di $\log M_{TOT}\left[M_\odot\right] > 9.4$

4. Nella Via Lattea viene stimata la presenza di circa 158 ammassi globulari. Per poter confrontare questo valore sul nostro grafico bisogna calcolare il suo logaritmo:
$$\log(158) = 2.20$$
di conseguenza dal grafico si ottiene:
$$\log M_{TOT}\left[M_\odot\right] \simeq 11.87$$
e quindi:
$$M_{\text{Via Lattea}} \simeq 7.41 \cdot 10^{11}\, M_\odot\,.$$

5. Se nella nostra galassia sono stimate un numero di stelle con massa pari a circa 60 miliardi di soli, la massa visibile in stelle $M_{\text{Visibile}}$ è di circa:
$$M_{\text{Visibile}} \simeq 60 \cdot 10^{9}\, M_\odot \simeq 1.2 \cdot 10^{41}\ \text{kg}\,.$$
Confrontando questo valore con la massa totale stimata nl punto 4 si ottiene:
$$\frac{M_{\text{Visibile}}}{M_{\text{Via Lattea}}} \simeq \frac{60 \cdot 10^{9}\, M_\odot}{7.41 \cdot 10^{11}\, M_\odot} \simeq 0.08\,.$$
Quindi solo l'8% della massa totale della Via Lattea è costituita da massa visibile.

6. Se la massa visibile è l'8%, avremo di conseguenza che il 92% della massa della Via Lattea è costituita da massa oscura, così rappresentabile in un grafico a torta (massa visibile colore blu, massa oscura colore arancione):