



XXII Campionati Italiani di Astronomia

Finale Nazionale - 17 aprile 2024

Prova Teorica - Categoria Junior 2

1. Ladri poco puntuali

Due ladri vogliono rubare un prezioso orologio a pendolo a tempo siderale, perfettamente funzionante, esposto in un museo. Esattamente a mezzanotte, il primo ladro deve mettere fuori uso il sistema d'allarme, mentre il secondo, già nascosto nella sala, deve raggiungere l'orologio a pendolo e portarlo via. Il primo ha sincronizzato il suo orologio da polso con il pendolo la mattina del giorno del furto, quando quest'ultimo segnava le ore 09:00.



Quella notte, quando il secondo vede che il pendolo segna la mezzanotte esce dal suo nascondiglio ma, inaspettatamente, il sistema di allarme inizia a suonare e i due vengono arrestati. Quale errore hanno commesso? Giustificate la risposta con gli opportuni calcoli.

Soluzione

I due ladri hanno commesso l'errore di sincronizzare l'orologio da polso del primo ladro con il pendolo e di considerare che da quel momento i tempi segnati dai due orologi avrebbero coinciso sempre. Invece, mentre gli orologi da polso che usiamo quotidianamente sono basati sul tempo solare medio, il pendolo in questione è invece basato sul tempo siderale, che va leggermente più veloce di quello solare medio.

Per convertire un intervallo ΔT di tempo siderale in un intervallo Δt di tempo solare medio si utilizza la seguente formula:

$$t = K T = \frac{365.256}{366.256} T = 0.997269 T.$$

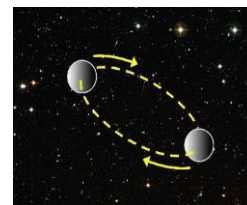
Poiché, secondo il pendolo, il tempo trascorso dal momento della sincronizzazione degli orologi alla mezzanotte è pari a 15 ore di tempo siderale, ricaviamo che il tempo trascorso secondo l'orologio da polso del primo ladro è invece pari a:

$$t = 0.997269 \cdot 15h \text{ siderali} \approx 14.9590h \text{ solari} \approx 14h 57m 33s \text{ solari}.$$

Pertanto quando il pendolo segna esattamente la mezzanotte e il secondo ladro esce dal nascondiglio, l'orologio da polso del primo ladro segna solo le 23:57 e 33 secondi: il ladro esce dunque troppo presto, in anticipo di 2 minuti e 27 secondi rispetto all'orologio da polso del suo complice che non ha ancora disinserito il sistema d'allarme.

2. Neutroni orbitanti

Due neutroni di massa $1.675 \cdot 10^{-27}$ kg ciascuno, sono posti in orbita circolare a una distanza di 10 picometri ($1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$) l'uno dall'altro. I neutroni sono privi di carica elettrica e a tale distanza sono trascurabili le forze nucleari, quindi tra di essi si esercita solo la reciproca attrazione gravitazionale. Quanto impiega ciascun neutrone a effettuare una rivoluzione completa intorno al centro di massa del sistema? Trascurate l'attrazione gravitazionale dovuta a qualsiasi altra massa.



Soluzione

I due neutroni sono identici e si muovono su orbite circolari, quindi applichiamo la III Legge di Keplero generalizzata considerando uno dei due neutroni fisso e il moto del secondo attorno a esso. In tali condizioni la loro separazione equivale al semiasse maggiore ($a = 10 \text{ pm} = 10^{-11} \text{ m}$) e raggio dell'orbita.

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G (m_N + m_N)}{4 \pi^2},$$

da cui ricaviamo

$$T^2 = \frac{2 \pi^2 a^3}{G m_N}$$

ovvero

$$T = \sqrt{\frac{2 \pi^2 a^3}{G m_N}} = \sqrt{\frac{2 \pi^2 \cdot 10^{-33} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} \approx 420 \text{ s} = 7 \text{ minuti}.$$

Nota: I due neutroni impiegano circa 7 minuti a completare un'orbita l'uno intorno all'altro: questo presuppone che i due neutroni rimangano stabili e non decadano in altre particelle. Un neutrone isolato, infatti, è stabile tipicamente per circa 15 minuti (per la precisione, la sua vita media è 887 s), dopo di che decade in un protone, un elettrone e un antineutrino.

3. La Terra sincrona

Se la Terra avesse un periodo di rivoluzione esattamente uguale a un giorno solare medio:

- A quale distanza si troverebbe dalla fotosfera del Sole?
- Visto dalla Terra, quale sarebbe la magnitudine apparente del Sole?

Soluzione

Applichiamo la III Legge di Keplero all'orbita terrestre nella situazione ipotetica descritta dal problema. Esprimendo il semiasse maggiore a in unità astronomiche e il periodo di rivoluzione T in anni, abbiamo:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1,$$

con T il giorno solare espresso in anni:

$$T = \frac{1 \text{ giorno}}{365.256 \text{ giorni}} = 2.73781 \cdot 10^{-3} \text{ anni},$$

da cui otteniamo

$$a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{(2.73781 \cdot 10^{-3})^2} = 1.9571 \cdot 10^{-2} \text{ UA} = 2.928 \cdot 10^9 \text{ m} = 2.928 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Quindi, sottraendo il raggio solare R_s , la Terra dovrebbe trovarsi a una distanza d_s dalla fotosfera solare:

$$d_s = a - R_s = 2.233 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

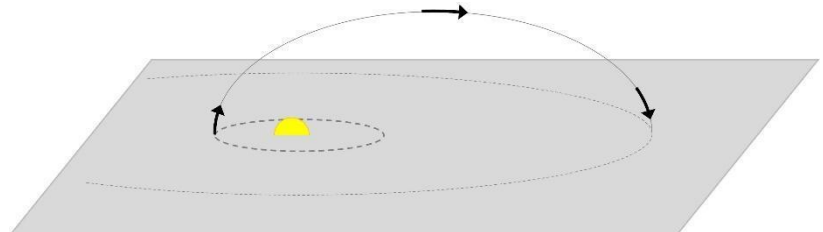
Per calcolare infine la magnitudine apparente del Sole m_{d_s} , usiamo la formula di Pogson, sapendo la magnitudine assoluta del Sole M_\odot e dopo avere convertito a in parsec:

$$a = 1.9571 \cdot 10^{-2} \text{ UA} \approx 9.489 \cdot 10^8 \text{ pc}$$

$$m_{d_s} = M_\odot + 5 \log a - 5 \approx 4.83 + 5 \log(9.488 \cdot 10^{-8} \text{ pc}) - 5 \approx -35.28.$$

4. L'orbita verticale di Hohmann

L'orbita di Hohmann, utilizzata per lanciare sonde verso i pianeti esterni del Sistema Solare, è un'orbita ellittica attorno al Sole con il perielio nel punto di lancio e l'afelio in quello di arrivo. Una sonda viene lanciata dalla Terra verso Urano su un'orbita di Hohmann perpendicolare al piano dell'eclittica.



Alla partenza della sonda, la Terra si trova al perielio, mentre all'arrivo Urano si trova all'afelio. Calcolate:

- la durata del volo dalla Terra a Urano;
- la massima altezza raggiunta dalla sonda sul piano dell'eclittica.

Soluzione

Calcoliamo le distanze della Terra al perielio e di Urano all'afelio:

$$d_{p,Terra} = a_{Terra} (1 - e_{Terra}) \approx 0.9833 \text{ UA} ,$$

$$d_{A,Urano} = a_{Urano} (1 + e_{Urano}) \approx 20.09 \text{ UA} .$$

La distanza della sonda al perielio coincide con $d_{p,Terra}$ mentre la sua distanza all'afelio coincide con $d_{A,Urano}$. Il semiasse a_H e l'eccentricità e_H dell'orbita di Hohmann sono:

$$a_H = \frac{d_{p,Terra} + d_{A,Urano}}{2} = \frac{0.9833 + 20.09}{2} \approx 10.54 \text{ UA} ,$$

$$e_H = \frac{d_{A,Urano} - d_{p,Terra}}{d_{A,Urano} + d_{p,Terra}} = \frac{20.09 - 0.9833}{20.09 + 0.9833} \approx 0.9067 .$$

a) Dalla III Legge di Keplero ricaviamo il periodo di rivoluzione della sonda:

$$T \text{ (anni)} = \sqrt{(a_H \text{ (UA)})^3} \approx 34.22 \text{ anni} ,$$

e quindi il tempo necessario per raggiungere Urano, pari al semiperiodo orbitale, è

$$\Delta t = \frac{T}{2} = 17.11 \text{ anni} .$$

b) La massima altezza sul piano dell'eclittica sarà raggiunta quando la sonda interseca il semiasse minore dell'orbita, quindi essa è pari a

$$b_H = a_H \sqrt{1 - e_H^2} \approx 4.4437 \text{ UA} .$$

5. L'eclissi più lunga

a) Qual è la distanza massima della Luna dalla Terra affinché si possano osservare eclissi totali di Luna?

A tale distanza:

b) Quale sarebbe il periodo orbitale della Luna?

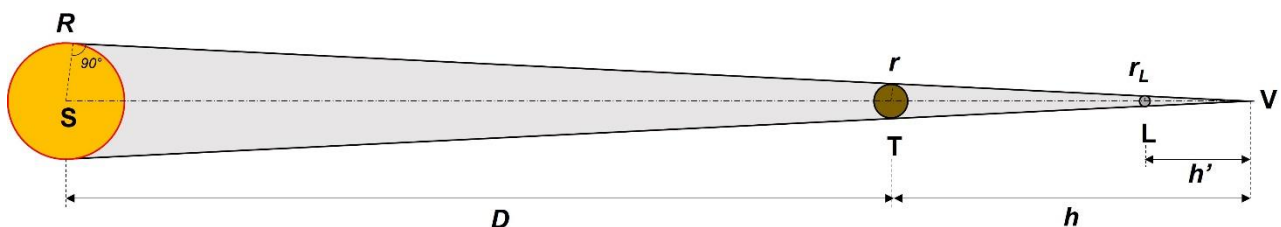
c) Quale sarebbe il suo diametro angolare, visto dalla Terra?

d) Quanto durerebbe l'eclissi lunare di ombra, ovvero quella che va dall'ingresso della Luna nella fase d'ombra fino alla sua uscita?



Soluzione

Facciamo riferimento alla figura sottostante, dove indichiamo con S, T, L i centri del Sole, della Terra e della Luna rispettivamente, e con V il vertice del cono d'ombra generato dalla Terra. Quest'ultimo dà luogo a un'eclissi di Luna quando questa lo attraversa (in tutto o in parte).



Nella figura indichiamo le seguenti quantità:

$h = VT$ = distanza tra il vertice del cono d'ombra e il centro della Terra

$D = ST$ = distanza tra i centri di Terra e Sole

r = raggio della Terra

R = raggio del Sole

$h' = VL =$ distanza tra il vertice del cono d'ombra e il centro della Luna

$r_L =$ raggio della Luna

Dalla similitudine tra i triangoli rettangoli VSR e VTr abbiamo la proporzione:

$$h: r = (h + D): R$$

ovvero, risolvendo la proporzione:

$$h R = (h + D) r$$

$$h (R - r) = D r$$

ricaviamo la distanza del vertice del cono d'ombra dal centro della Terra:

$$h = \frac{D r}{R - r} \approx \frac{149.6 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot 6.378 \cdot 10^3 \text{ km}}{6.955 \cdot 10^5 \text{ km} - 6.378 \cdot 10^3 \text{ km}} \approx 1.384 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

La massima distanza a cui può trovarsi la Luna affinché possano verificarsi eclissi totali di Luna non è h , ma è la distanza $h-h'$ in corrispondenza della quale il disco lunare è esattamente contenuto nel cono d'ombra.

Per ricavare h' Utilizzando di nuovo la similitudine, stavolta dei triangoli VLr_L e VTr :

$$h': r_L = h: r$$

ovvero

$$h'r = h r_L$$

cioè

$$h' = \frac{h r_L}{r} = \frac{1.385 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot 1.738 \cdot 10^3 \text{ km}}{6.378 \cdot 10^3 \text{ km}} \approx 3.771 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Dunque la massima distanza della Luna dalla Terra alla quale può ancora verificarsi un'eclissi lunare totale è

$$h - h' \approx 1.007 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

A questa distanza, il periodo di rivoluzione T della Luna è ovviamente diverso e possiamo calcolarlo per confronto con la distanza media e con il periodo attuale, utilizzando la III Legge di Keplero:

$$T = 27.322 \text{ giorni} \cdot \sqrt{\left(\frac{1.007 \cdot 10^6 \text{ km}}{3.844 \cdot 10^5 \text{ km}}\right)^3} \approx 115.8 \text{ giorni}.$$

Inoltre, alla nuova distanza, trascurando il raggio della Terra, il diametro angolare della Luna visto dalla Terra è pari a

$$\theta_L \approx 2 \arcsen \frac{r_L}{h - h'} \approx 0.1978^\circ \approx 11.87' = 712.0''.$$

Questo angolo viene percorso dalla Luna in un tempo Δt dato dalla proporzione

$$\theta_L : \Delta t = 360^\circ : T_h$$

da cui

$$\Delta t = T_h \frac{\theta_L}{360^\circ} \approx 6.363 \cdot 10^{-2} \text{ giorni} \approx 1 \text{ h } 31 \text{ m } 37 \text{ s}.$$

Analizziamo infine il fenomeno dell'eclissi totale in tutta la sua durata: all'inizio, la Luna entra nel cono d'ombra e inizia una fase parziale, che termina quando la Luna si è spostata di una quantità pari al proprio diametro, in modo tale che il cono d'ombra copra tutto il disco lunare. La fase di totalità ha, a questa distanza, una durata nulla, perché la sezione del cono d'ombra ha esattamente le stesse dimensioni del disco lunare. La Luna, quindi, proseguendo nel suo moto, comincia a uscire dal cono d'ombra e ne è completamente fuori quando si è spostata di un'altra quantità pari al proprio diametro. La durata totale dell'eclissi corrisponde quindi al tempo necessario alla Luna per spostarsi di una quantità pari al doppio del proprio diametro, ovvero:

$$T_{\text{eclissi,max}} = 2 \Delta t \approx 0.1273 \text{ giorni} \approx 3 \text{ h } 3 \text{ m } 15 \text{ s}.$$

Nota: la situazione mostrata è puramente teorica, in quanto il sistema Terra-Luna andrà in blocco mareale a circa 1.5 volte la distanza attuale, quindi molto prima di raggiungere tale distanza.