XXII Campionati Italiani di Astronomia

Finale Nazionale - 17 aprile 2024

Prova Teorica - Categoria Junior 1

1. La Terra sincrona

A quale distanza dalla fotosfera del Sole dovrebbe trovarsi la Terra per avere un periodo di rivoluzione esattamente uguale all'attuale giorno solare medio?

Soluzione

Applichiamo la III Legge di Keplero all'orbita terrestre nella situazione ipotetica descritta dal problema. Esprimendo il semiasse maggiore **a** in unità astronomiche e il periodo di rivoluzione **T** in anni, abbiamo:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1\,,$$

con T il giorno solare espresso in anni:

$$T = \frac{1 \text{ giorno}}{365.256 \text{ giorni}} = 2.73781 \cdot 10^{-3} \text{ anni}\,,$$

da cui otteniamo

$$a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{(2.73781 \cdot 10^{-3})^2} \simeq 1.9571 \cdot 10^{-2} \text{ UA} \simeq 2.928 \cdot 10^9 \text{ m} = 2.928 \cdot 10^6 \text{ km}\,.$$

Quindi, sottraendo il raggio solare $\mathbf{R_S}$, la Terra dovrebbe trovarsi a una distanza $\mathbf{d_S}$ dalla fotosfera solare:

$$d_S = a - R_S \simeq 2.233 \cdot 10^6 \text{ km}\,.$$

2. Ladri poco puntuali

Due ladri vogliono rubare un prezioso orologio a pendolo a tempo siderale, perfettamente funzionante, esposto in un museo. Esattamente a mezzanotte, il primo ladro deve mettere fuori uso il sistema d'allarme, mentre il secondo, già nascosto nella sala, deve raggiungere l'orologio a pendolo e portarlo via. Il primo ha sincronizzato il suo orologio da polso con il pendolo la mattina del giorno del furto, quando quest'ultimo segnava le ore 09:00.
Quella notte, quando il secondo vede che il pendolo segna la mezzanotte esce dal suo nascondiglio ma, inaspettatamente, il sistema di allarme inizia a suonare e i due vengono arrestati. Quale errore hanno commesso? Giustificate la risposta con gli opportuni calcoli.

Soluzione

I due ladri hanno commesso l'errore di sincronizzare l'orologio da polso del primo ladro con il pendolo e di considerare che da quel momento i tempi segnati dai due orologi avrebbero coinciso sempre. Invece, mentre gli orologi da polso che usiamo quotidianamente sono basati sul tempo solare medio, il pendolo in questione è invece basato sul tempo siderale, che va leggermente più veloce di quello solare medio.
Per convertire un intervallo ΔT di tempo siderale in un intervallo Δt di tempo solare medio si utilizza la seguente formula:

$$t = K\,T = \frac{365.256}{366.256}\,T = 0.997269\,T\,.$$

Poiché, secondo il pendolo, il tempo trascorso dal momento della sincronizzazione degli orologi alla mezzanotte è pari a 15 ore di tempo siderale, ricaviamo che il tempo trascorso secondo l'orologio da polso del primo ladro è invece pari a:

$$t = 0.997269 \cdot 15\text{h siderali} \simeq 14.9590\text{h solari} \simeq 14\text{h } 57\text{m } 33\text{s solari.}$$

Pertanto quando il pendolo segna esattamente la mezzanotte e il secondo ladro esce dal nascondiglio, l'orologio da polso del primo ladro segna solo le 23:57 e 33 secondi: il ladro esce dunque troppo presto, in anticipo di 2 minuti e 27 secondi rispetto all'orologio da polso del suo complice che non ha ancora disinserito il sistema d'allarme.

3. Se telefonando…

Giulia e Sabrina chiacchierano al telefono, quando la prima d'un tratto si accorge che la Luna al primo quarto sta transitando al meridiano. "Prima che succeda qui dove mi trovo io devono passare ancora 7 ore", risponde l'altra. Sia Giulia che Sabrina si trovano sui meridiani centrali dei rispettivi fusi orari.
a) Se Giulia si trova in Italia, Sabrina si trova in America o in Asia?
b) Che ore sono, all'incirca, nel luogo in cui si trova Sabrina?
c) Qual è la differenza di longitudine tra Giulia e Sabrina?
Trascurate lo spostamento della Luna nel cielo nell'arco di 7 ore e assumete che in nessuno dei due paesi sia in vigore l'ora legale.

Soluzione

a) Dato che dove si trova Giulia la Luna sta passando al meridiano mentre da Sabrina ciò deve ancora accadere, significa che Sabrina si trova a ovest rispetto a Giulia; inoltre sappiamo che si trova in una località dove l'orologio segna 7 ore in meno rispetto all'Italia. Poiché in nessuno dei due paesi è in vigore l'ora legale, allora semplicemente ci spostiamo di 7 fusi orari a ovest rispetto all'Italia. Questo equivale a spostarsi in America, che è quindi il luogo in cui si trova Sabrina.

b) Ricordando il fenomeno delle fasi lunari, dovuto al movimento mensile della Luna intorno alla Terra, sappiamo che la Luna viene vista nella fase di primo quarto da una qualsiasi località circa alle ore 18, che sarà dunque l'orario attuale nel luogo in cui è Giulia; di conseguenza, da Sabrina saranno circa le 11 del mattino.

c) Poiché le due amiche si trovano entrambe sui meridiani centrali dei rispettivi fusi orari, e dato che l'intervallo di tempo Δt perché la Luna (trascurando il suo spostamento in cielo) venga vista in meridiano prima da Giulia e poi da Sabrina è pari a 7 ore, ciò significa che la differenza di longitudine $\Delta\lambda$ tra le due è data da:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta t \cdot 360°}{24h} = \frac{7h \cdot 360°}{24h} = 105° .$$

4. Nuove lune nel Sistema Solare

Sono state recentemente scoperte tre nuove lune nel Sistema Solare: la luna di Urano S/2023 U1 e le due lune di Nettuno S/2021 N1 e S/2002 N5.
Considerate le orbite di queste tre lune circolari.

a) S/2023 U1 dista dal centro di Urano $7.97 \cdot 10^6$ km. Calcolate in quanto tempo completa un'orbita intorno al pianeta.
b) S/2021 N1 e S/2002 N5 hanno un periodo orbitale intorno a Nettuno rispettivamente di 9855 e 3285 giorni terrestri. Calcolate le loro distanze dal centro del pianeta.

Soluzione

a) Applichiamo la III Legge di Keplero. Indicato con $\mathbf{a_{U1}}$ il semiasse maggiore (che in questo caso coincide con il raggio) dell'orbita di S/2023 U1, e con $\mathbf{M_U}$ la massa di Urano, il periodo orbitale di S/2023 U1 vale:

$$T_{U1} = 2\,\pi \cdot \sqrt{\frac{a_{U1}^3}{G\,M_U}} = 2\,\pi \cdot \sqrt{\frac{(7.97 \cdot 10^9\ m)^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg^1 \cdot s^2} \cdot 8.682 \cdot 10^{25}\ kg}} \simeq$$

$$\simeq 2\,\pi \cdot \sqrt{\frac{5.06 \cdot 10^{29}\ m^3}{5.794 \cdot 10^{15}\ \frac{m^3}{s^2}}} = 5.87 \cdot 10^7\ s = 680\ \text{giorni} .$$

b) Applichiamo anche a S/2002 N5 la III Legge di Keplero, ma stavolta ricavando il semiasse maggiore della sua orbita (anche in questo caso coincidente con il raggio), che indichiamo con $\mathbf{a_{N5}}$, mentre indichiamo con $\mathbf{T_{N5}}$ il suo periodo orbitale e con $\mathbf{M_N}$ la massa di Nettuno:

$$a_{N5} = \sqrt[3]{\frac{G\ M_N T_{N5}^2}{4\,\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg^1 \cdot s^2} \cdot\ 1.024 \cdot 10^{26}\ kg\ \cdot\ (2.84\ \cdot\ 10^8\ s)^2}{4\,\pi^2}} \simeq$$

$$\simeq \sqrt[3]{\frac{5.51\ \cdot\ 10^{32}\ m^3}{39.48}} \simeq\ 2.41 \cdot 10^{10}\ m =\ \ 2.41 \cdot 10^7\ km.$$

Per quanto riguarda S/2021 N1, indicando con $\mathbf{T_{N1}}$ il suo periodo orbitale e dato che quest'ultimo e S/2002 N5 sono due lune orbitanti attorno allo stesso pianeta, possiamo scrivere la III legge di Keplero nella sua formulazione più semplice:

$$\frac{a_{N1}^3}{T_{N1}^2} = \frac{a_{N5}^3}{T_{N5}^2}$$

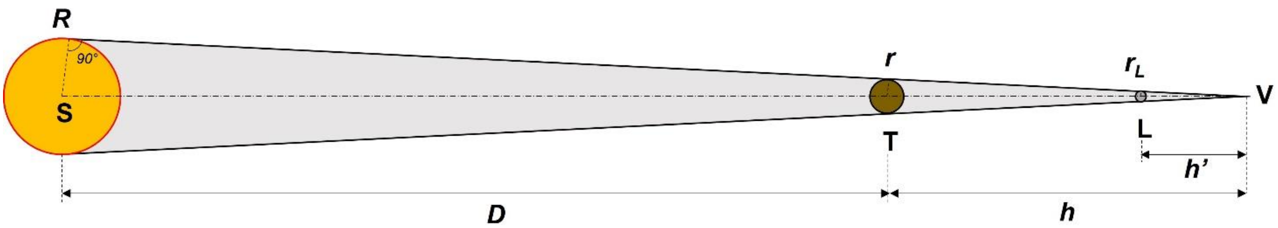
$$a_{N1} = a_{N5} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_{N1}}{T_{N5}}\right)^2} = a_{N5} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{9855\ \text{giorni}}{3285\ \text{giorni}}\right)^2} = a_{N5} \cdot \sqrt[3]{9} \simeq a_{N5} \cdot 2.08 \simeq\ 5.01 \cdot 10^7\ km\,.$$

Nota: le due lune hanno periodi che sono esattamente uno il triplo dell'altro: in astronomia si dice che i le due lune sono in *risonanza* 3:1.

5. L'eclissi più lunga

a) Qual è la distanza massima della Luna dalla Terra affinché si possano verificare eclissi totali di Luna?
A tale distanza:
b) Quale sarebbe il periodo orbitale della Luna?
c) Quale sarebbe il periodo sinodico della Luna?

Soluzione
Facciamo riferimento alla figura sottostante, dove indichiamo con S, T, L i centri del Sole, della Terra e della Luna rispettivamente, e con V il vertice del cono d'ombra generato dalla Terra. Quest'ultimo dà luogo a un'eclissi di Luna quando questa lo attraversa (in tutto o in parte).



Nella figura indichiamo le seguenti quantità:

h = VT = distanza tra il vertice del cono d'ombra e il centro della Terra
D= ST = distanza tra i centri di Terra e Sole
r = raggio della Terra
R = raggio del Sole
h' = VL = distanza tra il vertice del cono d'ombra e il centro della Luna
r_L = raggio della Luna

Dalla similitudine tra i triangoli rettangoli VSR e VTr abbiamo la proporzione:

$$h : r = (h + D) : R$$

ovvero, risolvendo la proporzione:

$$h\,R = (h + D)\,r$$

$$h\,(R - r) = D\,r$$

ricaviamo la distanza del vertice del cono d'ombra dal centro della Terra:

$$h = \frac{D\,r}{R - r} \simeq \frac{149.6 \cdot 10^6\ \text{km} \cdot 6.378 \cdot 10^3\ \text{km}}{6.955 \cdot 10^5\ \text{km} - 6.378 \cdot 10^3\ \text{km}} \simeq 1.384 \cdot 10^6\ \ \text{km}\,.$$

La massima distanza a cui può trovarsi la Luna affinché possano verificarsi eclissi totali di Luna non è h, ma è la distanza h-h' in corrispondenza della quale il disco lunare è esattamente contenuto nel cono d'ombra.
Per ricavare h' Utilizzando di nuovo la similitudine, stavolta dei triangoli VLr_L e VTr:

$$h'{:}\,r_L = h{:}\,r$$

ovvero

$$h'\,r = h\,r_L$$

cioè

$$h' = \frac{h\,r_L}{r} = \frac{1.385 \cdot 10^6\ \text{km} \cdot 1.738 \cdot 10^3\text{km}}{6.378 \cdot 10^3\ \text{km}} \simeq 3.771\ \cdot\ 10^5\ \ \text{km.}$$

Dunque la massima distanza della Luna dalla Terra alla quale può ancora verificarsi un'eclissi lunare totale è

$$h - h' \simeq 1.007\ \cdot 10^6\ \ \text{km.}$$

A questa distanza, il periodo di rivoluzione **T** della Luna è ovviamente diverso e possiamo calcolarlo per confronto con la distanza media e con il periodo attuale, utilizzando la III Legge di Keplero:

$$T = 27.322\ \text{giorni} \cdot \sqrt{\left(\frac{1.007 \cdot 10^6\ \text{km}}{3.844\ \cdot 10^5\ \text{km}}\right)^3} \simeq 115.8\ \ \text{giorni}\,.$$

In tali condizioni, detto **E** il periodo di rivoluzione terrestre, il periodo sinodico **S** della Luna varrà:

$$S = \frac{E\,T}{E\ -\ T} = 170.0\ \ \text{giorni}\,.$$

Nota: la situazione mostrata è puramente teorica, in quanto il sistema Terra-Luna andrà in blocco mareale a circa 1.5 volte la distanza attuale, quindi molto prima di raggiungere tale distanza.