XXI Campionati Italiani di Astronomia

Finale Nazionale - 19 aprile 2023

Categoria Master

1. Balzi felini e sciurini

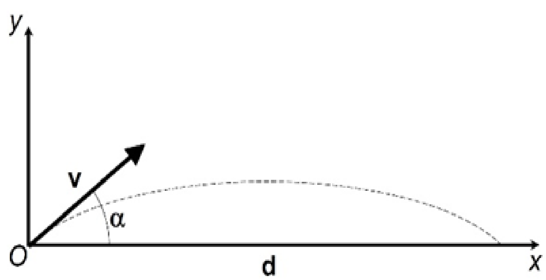
Lo scoiattolo rosso Corty e la gattina Karel giocano a rincorrersi tra i rami dei boschi intorno a Cortina d'Ampezzo. Corty è in grado di saltare lanciandosi con una velocità iniziale con modulo di 4.2 m/s e un angolo di inclinazione rispetto al piano orizzontale di 25°, mentre per Karel questi valori valgono 5.2 m/s e 40°.

1. Considerando che Corty e Karel saltano tra rami posti alla stessa altezza dal suolo, qual è la distanza massima tra i rami su cui può saltare Corty e qual è quella tra i rami su cui può saltare Karel?
2. Quanto valgono queste distanze per i loro amici scoiattoli e gatti che si trovano a Cortina della Tranquillità sulla superficie della Luna, e a Macchiarossa d'Ampezzo, una fantastica stazione turistica su Giove che galleggia nell'atmosfera del pianeta a una distanza dal centro pari al suo raggio?

Considerate tutti i corpi perfettamente sferici, trascurando anche gli effetti dovuti alla rotazione.

Soluzione

1.



Si tratta di un classico problema di moto di un grave lanciato in una direzione obliqua rispetto alla verticale, il cui schema è riassunto nella figura a sinistra.

Le equazioni del moto per le componenti della velocità lungo gli assi **x** e **y** sono:

$$x(t) = x_0 + v_x\, t$$

$$y(t) = y_0 + v_y\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

dove **g** è l'accelerazione di gravità. Detto **v** il modulo della velocità iniziale, dalla figura si verifica facilmente l'espressione delle due componenti della velocità:

$$\mathrm{v_x} = \mathrm{v} \cdot \cos\alpha \qquad \mathrm{v_y} = \mathrm{v} \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

e, ponendo il punto di lancio nell'origine del sistema di riferimento, le equazioni del moto diventano:

$$x(t) = v \cdot \cos\alpha \cdot t \qquad y(t) = v \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \tfrac{1}{2} g\, t^2$$

Il tempo **τ** trascorso dal lancio al ritorno alla quota iniziale (y=0) si ricava risolvendo l'equazione

$$y(t) = v \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \tau - \frac{1}{2} g\, \tau^2 = 0$$

che fornisce (a parte la soluzione banale $\tau = 0$) il "tempo di volo":

$$\tau = \frac{2v \cdot \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

Noto τ, la distanza orizzontale percorsa **d** vale:

$$\mathrm{d} = \mathrm{x}(\tau) = \mathrm{v} \cdot \cos\alpha \cdot \tau = \frac{2\,\mathrm{v}^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}{\mathrm{g}}$$

Come vediamo, essa dipende dal quadrato del modulo della velocità di lancio **v**, dall'angolo di inclinazione iniziale **α** e dall'accelerazione di gravità **g**.

Poiché abbiamo assunto la Terra perfettamente sferica, trascuriamo l'altezza di Cortina sul livello del mare e quindi l'accelerazione di gravità $\mathbf{g_C}$ a Cortina vale:

$$\mathrm{g_C} \simeq 9.807\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Quindi a Cortina d'Ampezzo, la distanza massima tra i rami su cui saltano i due amici è:

$$\text{Corty:} \qquad d \simeq \frac{2 \cdot 17.6\ \frac{m^2}{s^2} \cdot \text{sen}\,25° \cdot \cos 25°}{9.807\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \simeq 1.4\ \text{m}$$

$$\text{Karel:} \qquad d \simeq \frac{2 \cdot 27\ \frac{m^2}{s^2} \cdot \text{sen}\,40° \cdot \cos 40°}{9.807\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \simeq 2.7\ \text{m}$$

2. Detti $\mathbf{R_L}$ e $\mathbf{M_L}$ raggio e massa della Luna, $\mathbf{R_G}$ e $\mathbf{M_G}$ raggio e massa di Giove, i valori dell'accelerazione di gravità $\mathbf{g_{CT}}$ a Cortina della Tranquillità e $\mathbf{g_{MA}}$ a Macchiarossa d'Ampezzo sono:

$$g_{CT} = \frac{G\,\mathbf{M_L}}{{R_L}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 7.342 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{3.021 \cdot 10^{12}\ \text{m}^2} \simeq 1.622\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g_{MA} = \frac{G\,\mathbf{M_G}}{{R_G}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27}\ \text{kg}}{5.111 \cdot 10^{15}\ \text{m}^2} \simeq 24.80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A Cortina della Tranquillità, la distanza tra i rami su cui saltano gli amici di Corty e Karel è:

$$\text{scoiattoli lunari:} \quad d \simeq \frac{2 \cdot 17.6\ \frac{m^2}{s^2} \cdot \text{sen}\,25° \cdot \cos 25°}{1.622\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \simeq 8.5\ \text{m}$$

$$\text{gatti lunari:} \qquad d \simeq \frac{2 \cdot 27\ \frac{m^2}{s^2} \cdot \text{sen}\,40° \cdot \cos 40°}{1.622\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \simeq 16\ \text{m}$$

A Macchiarossa d'Ampezzo, infine, la distanza tra i rami su cui saltano gli amici di Corty e Karel amici è:

$$\text{scoiattoli gioviani:} \qquad d \simeq \frac{2 \cdot 17.6\ \frac{m^2}{s^2} \cdot \text{sen}\,25° \cdot \cos 25°}{24.80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \simeq 0.56\ \text{m}$$

$$\text{gatti gioviani:} \qquad d \simeq \frac{2 \cdot 27\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{sen}\,40° \cdot \cos 40°}{24.80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \simeq 1.1\ \text{m}$$

Nota.
A causa dell'arrotondamento alla seconda cifra decimale, il rapporto tra la distanza percorsa da gatti e scoiattoli è leggermente diverso nei tre casi, mentre dovrebbe essere sempre uguale.

2. Corty osserva il cielo

Lo scoiattolo rosso Corty si trova nella sua casa di Cortina d'Ampezzo (latitudine = +46° 32') e osserva una stella che passa al meridiano allo zenit a UT = 0h 0m 0s. Successivamente, a UT = 6h 30m 31s, Corty osserva una seconda stella passare al meridiano in direzione sud a un'altezza di 20° sull'orizzonte. Corty vuole calcolare la distanza angolare tra le due stelle. Per far questo gli viene in aiuto Karel, che gli ricorda che la distanza angolare Υ_{AB} (in gradi) tra due stelle A e B con declinazione rispettivamente δ_A e δ_B e differenza di ascensione retta $\Delta\alpha$ (in gradi) è data dalla relazione $\Upsilon_{AB} = \arccos\,(\cos \Delta\alpha \cdot \cos \delta_A \cdot \cos \delta_B + \text{sen}\ \delta_A \cdot \text{sen}\ \delta_B)$. Quanto vale la distanza angolare tra le due stelle osservate da Corty?

Soluzione

Indichiamo con $\boldsymbol{\alpha_A}$, $\boldsymbol{\alpha_B}$, $\boldsymbol{\delta_A}$ e $\boldsymbol{\delta_B}$ ascensione retta e declinazione delle due stelle.

Detta $\boldsymbol{\varphi}$ la latitudine di Cortina, poiché la prima stella passa al meridiano allo zenith di Cortina si ha:

$$\delta_A = \varphi = 46°\ 32'$$

Quando la seconda stella passa al meridiano in direzione sud (il che significa che $\varphi > \delta_B$) la sua altezza sull'orizzonte è massima $\mathbf{h_{maxB}}$ ed è legata alla sua declinazione dalla relazione:

$$h_{maxB} = 90° - \varphi + \delta_B$$

da cui si ricava:

$$\delta_B = h_{maxB} - 90° + \varphi = 20° - 90° + 46°\,32' = -23°\,28'$$

La relazione che lega la differenza di ascensione retta $\boldsymbol{\Delta\alpha}$ di due stelle alla differenza $\boldsymbol{\Delta t_S}$ di tempo siderale del loro passaggio al meridiano è:

$$\Delta\alpha = \Delta t_S$$

La relazione che lega la differenza di tempo siderale $\boldsymbol{\Delta t_S}$ alla differenza $\mathbf{\Delta UT}$ di Tempo Universale (o di tempo solare medio) è:

$$\Delta t_S = \frac{\Delta UT}{K}$$

dove il fattore di conversione $\mathbf{K}$ è dovuto al fatto che la sfera celeste effettua una rotazione completa in $23^h\ 56^m\ 4.1^s$ e dunque in un anno solare di n giorni ci sono n+1 giorni siderali:

$$K = \frac{365.25636}{366.25636} \simeq 0.99726967$$

avremo quindi:

$$\Delta\alpha = \Delta t_S = \frac{\Delta UT}{K} \simeq \frac{6^h\ 30^m\ 31^s}{0.99726967} \simeq 6^h.5264 \simeq 6^h\ 31^m\ 35^s$$

Questa differenza di ascensione retta espressa in unità di tempo può essere espressa in gradi $\Delta\alpha(°)$ utilizzando la proporzione:

$$\frac{\Delta\alpha}{24^h} = \frac{\Delta\alpha(°)}{360°}$$

da cui ricaviamo:

$$\Delta\alpha(°) = \frac{360° \cdot \Delta\alpha}{24^h} \simeq \frac{360° \cdot 6^h.5264}{24^h} \simeq 97°.896$$

Utilizzando la formula suggerita da Karel avremo infine:

$$\gamma_{AB} = \arccos\ (\cos\Delta\alpha(°) \cdot \cos\delta_A \cdot \cos\delta_B + \mathrm{sen}\,\delta_A \cdot \mathrm{sen}\,\delta_B)$$

$$\gamma_{AB} \simeq \arccos\ [\cos 97°.896 \cdot \cos 46°.533 \cdot \cos\ (-23°.467) + \mathrm{sen}\,46°.533 \cdot \mathrm{sen}(-23°.467)]$$

$$\gamma_{AB} \simeq \arccos\,[-0.13738 \cdot 0.68794 \cdot 0.91729 + 0.72577 \cdot (-0.39822)]$$

$$\gamma_{AB} \simeq \arccos\,[-0.086692 - 0.28902] \simeq \arccos\ (-0.37571)$$

$$\gamma_{AB} \simeq 112°.07 = 112°\,4'\,6''$$

3. Il cuore nero della Via Lattea

Il centro della nostra galassia, distante da noi 8.3 kpc, ospita un buco nero supermassiccio, parte di una grande struttura che emette onde radio nota come Sagittarius A. Il buco nero (BN) ha una massa di 4.2 milioni di masse solari.

1. Le orbite di quali pianeti del Sistema Solare potrebbero essere interamente contenute all'interno dell'orizzonte degli eventi del buco nero?
2. Quanto vale il diametro angolare (in secondi d'arco) dell'orizzonte degli eventi del buco nero, osservato dalla Terra?
3. Quale apertura minima dovrebbe avere un telescopio per risolvere l'orizzonte degli eventi del buco nero osservando a una lunghezza d'onda di 1.3 mm?
4. Supponendo che per distanze maggiori di 30 volte il raggio dell'orizzonte degli eventi gli effetti della relatività generale dovuti al buco nero siano del tutto trascurabili, quale pianeta del sistema solare percorrerebbe la sua orbita attorno al buco nero in 126 ore?

Soluzione

1. Detta **M** la massa del BN, il suo raggio di Schwarzschild $\mathbf{R_S}$ (detto anche raggio dell'orizzonte degli eventi) vale:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \simeq \frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 4.2 \cdot 10^6 \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ kg}{8.9875 \cdot 10^{16}\ \frac{m^2}{s^2}} \simeq 1.2 \cdot 10^{10}\ m = 1.2 \cdot 10^7\ km$$

un valore che risulta inferiore alla distanza al perielio di Mercurio (che è di circa $4.6 \cdot 10^7$ km); quindi, nessuna orbita dei pianeti del sistema solare può essere contenuta interamente all'interno dell'orizzonte degli eventi del BN.

2. Detta **D** la distanza del BN, il diametro angolare $\boldsymbol{\theta_S}$ dell'orizzonte degli eventi visto dalla Terra vale:

$$\theta_S = \arctan\frac{2\ R_S}{D} \simeq \arctan\frac{2\ \cdot 1.2 \cdot 10^7\ km}{8.3\ \cdot\ 10^3\ pc\ \cdot\ 30857\ \cdot\ 10^9\ \frac{km}{pc}} \simeq 5^\circ.4\ \cdot\ 10^{-9} \simeq\ 19 \cdot 10^{-6}\ arcsec$$

3. Detta **d** l'apertura di un telescopio, il suo potere risolutivo $\boldsymbol{\alpha}$ in secondi d'arco per osservazioni alla lunghezza d'onda $\boldsymbol{\lambda}$ vale:

$$\alpha\ ('') = 1.22\ \frac{\lambda}{d}\ 206265''$$

quindi per risolvere un corpo che sottende un angolo θ_S l'apertura minima $\mathbf{d_{min}}$ di un telescopio deve essere:

$$d_{min} = 1.22\ \frac{\lambda}{\theta_s\ ('')}\ 206265'' \simeq 1.22\ \frac{1.3 \cdot 10^{-3}\ m}{19'' \cdot 10^{-6}}\ 206265'' \simeq 1.7\ \cdot\ 10^7\ m = 1.7\ \cdot\ 10^4\ km$$

che risulta maggiore del diametro della Terra.

4. Una distanza $\mathbf{d_{30}}$ di 30 volte il raggio dell'orizzonte degli eventi è pari a:

$$d_{30} = 30\ \cdot\ R_S \simeq 30\ \cdot\ 1.2 \cdot 10^7\ km \simeq\ 3.6 \cdot 10^8\ km$$

I pianeti che hanno un'orbita con semiasse maggiore più grande di questo valore sono solo Giove, Saturno, Urano e Nettuno.
Potendo trascurare a tali distanze gli effetti della Relatività Generale dovuti al BN, possiamo applicare la III legge di Keplero e quindi il semiasse maggiore **a** di un pianeta che orbita in un tempo **T** attorno al BN è dato dalla relazione:

$$a = \sqrt[3]{\frac{G\ M\ T^2}{4\ \pi^2}}$$

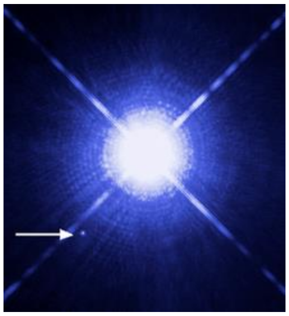
$$a \simeq \sqrt[3]{\frac{6.674\ \cdot 10^{-11}\ \ \frac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot\ 4.2 \cdot 10^6 \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ kg\ \cdot 2.058\ \cdot\ 10^{11}\ s^2}{4\ \pi^2}} \simeq 1.427\ \cdot\ 10^{12}\ m$$

che corrisponde al semiasse maggiore dell'orbita di Saturno.

NOTA

Per osservare il BN sono stati collegati tra loro (con una tecnica detta "interferometria") radiotelescopi sparsi su tutta la superficie della Terra (EHT, Event Horizon Telescope: https://eventhorizontelescope.org/). Si riesce così a ottenere la risoluzione di uno strumento avente un diametro circa pari alla separazione massima dei radiotelescopi, ovvero al diametro della Terra. Inoltre, poiché "l'ombra" del BN è in realtà circa 2.5 volte più grande del diametro di Schwarzschild, una rete di radiotelescopi basati a Terra è in grado di raggiungere la risoluzione richiesta per risolverla.

4. La sorellina di Sirio



Sirio (α CMa) è una stella binaria il cui centro di massa si trova a una distanza di 8.61 anni luce dal Sole. La componente principale, Sirio A, è una stella di sequenza principale, mentre la sua compagna, Sirio B, è una stella piuttosto peculiare. Infatti Sirio B ha una massa pari a 1.02 volte quella del Sole e una temperatura della fotosfera di $25.0 \cdot 10^3$ K, ma la sua magnitudine apparente è solo 5.96.

1. Calcolate la densità media di Sirio B in kg/m^3 e in g/cm^3.
2. Che tipo di stella è Sirio B?

Soluzione

1. Nota la distanza **D** del sistema e la magnitudine apparente $\mathbf{m_B}$ di Sirio B, possiamo calcolare la sua magnitudine assoluta $\mathbf{M_B}$:

$$\mathrm{M_B} = \mathrm{m_B} + 5 - 5\log \mathrm{D}\,(pc) \simeq 5.96 + 5 - 5\log\left(\frac{8.61\ anni\ luce}{3.2616\ \frac{anni\ luce}{parsec}}\right) \simeq 8.85$$

Detti $\mathbf{R_B}$ il suo raggio e $\mathbf{T_B}$ la temperatura della sua fotosfera, la luminosità $\mathbf{L_B}$ di Sirio B si calcola dalla formula di Stefan-Boltzmann:

$$L_B = 4\pi\sigma\, R_B^2\, T_B^4$$

Detti $\mathbf{R_\odot}$, $\mathbf{T_\odot}$ e $\mathbf{L_\odot}$ il raggio, la temperatura della fotosfera e la luminosità del Sole, per la differenza tra la magnitudine assoluta di Sirio B e quella $\mathbf{M_\odot}$ del Sole vale la relazione:

$$M_B - M_\odot = -2.5\log\frac{L_B}{L_\odot} = -2.5\log\frac{4\pi\sigma\, R_B^2\, T_B^4}{4\pi\sigma\, R_\odot^2\, T_\odot^4}$$

da cui si può ricavare il raggio di Sirio B:

$$M_B - M_\odot = -\,5\log\frac{R_B\ T_B^2}{R_\odot\, T_\odot^2} \qquad\qquad 10^{\frac{M_\odot - M_B}{5}} = \frac{R_B\ T_B^2}{R_\odot\, T_\odot^2}$$

$$R_B = R_\odot\left(\frac{T_\odot}{T_B}\right)^2 10^{\frac{M_\odot - M_B}{5}} \simeq 6.955\cdot 10^5\ km\left(\frac{5778\ K}{25.0\cdot 10^3\ K}\right)^2 10^{\frac{4.83-8.85}{5}} \simeq 5.83\cdot 10^3\ km$$

e infine, detta $\mathbf{M_S}$ la massa del Sole, la densità media $\boldsymbol{\rho_B}$ di Sirio B vale:

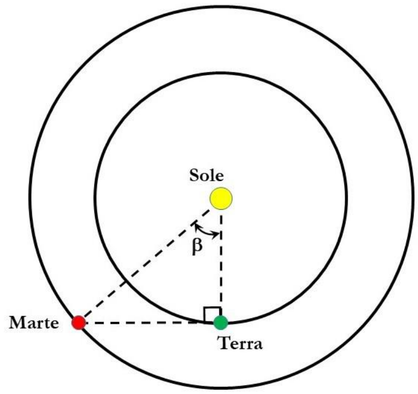
$$\rho_B = \frac{1.02\cdot \mathbf{M_S}}{\frac{4}{3}\,\pi\, R_B^3} \simeq \frac{1.02\cdot 1.989\cdot 10^{30}\ kg}{\frac{4}{3}\,\pi\cdot 1.98\cdot 10^{20}\ m^3} \simeq 2.45\cdot 10^9\ \frac{kg}{m^3} = 2.45\cdot 10^9\ \frac{10^3}{10^6}\ \frac{g}{cm^3}$$
$$= 2.45\cdot 10^6\ \frac{g}{cm^3}$$

2. Abbiamo ricavato che Sirio B è una stella il cui raggio è poco inferiore a quello della Terra, ma la cui massa è simile a quella del Sole. Questo fa sì che la sua densità risulti elevatissima. Inoltre, Sirio B ha una temperatura molto elevata, simile a quella delle stelle dei primi tipi della classe spettrale B. Tutte queste caratteristiche sono tipiche di quelle che vengono chiamate "nane bianche"

5. Marte all'equinozio

Il 21 settembre di un certo anno avete osservato Marte passare al meridiano nell'istante del tramonto del Sole. A che ora è sorto Marte il giorno del successivo equinozio autunnale osservato dallo stesso luogo? Considerate le orbite circolari e trascurate gli effetti dovuti all'equazione del tempo, alla rifrazione dell'atmosfera terrestre e alle dimensioni angolari del Sole.

Soluzione

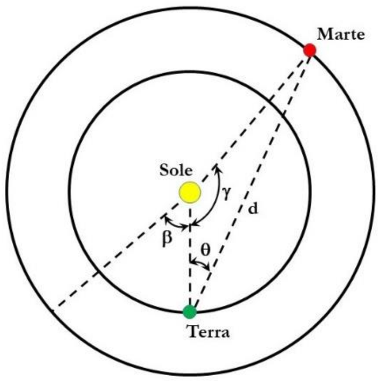


Trascurando l'equazione del tempo, al momento della prima osservazione l'angolo Marte-Terra-Sole è di 90°, ciò in quanto agli equinozi la durata del giorno su tutti i punti della Terra è di 12 ore. Quindi dal triangolo rettangolo Sole-Terra-Marte (vedere figura a sinistra in alto), dette ST e SM le distanze Sole-Terra e Sole-Marte, possiamo calcolare l'angolo **β** Marte-Sole-Terra:

$$\beta = \arccos \frac{ST}{SM} \simeq \arccos \frac{1.496 \cdot 10^8 \text{ km}}{2.279 \cdot 10^8 \text{ km}} \simeq 48°.97$$

In un anno siderale terrestre (trascuriamo la piccola differenza tra anno tropico, ovvero l'intervallo di tempo da due equinozi identici consecutivi, e anno siderale), Marte si sposta intorno al Sole di un angolo **ϕ** pari a:

$$\phi \simeq \frac{365.256\ g}{686.97\ g} \cdot 360° \simeq 191.41°$$



Al momento della prima osservazione Marte si trovava a est del Sole e quindi andava verso l'opposizione. Dopo un anno, come mostrato nella figura in basso a sinistra, l'angolo Marte-Sole-Terra sarà:

$$\gamma = \phi - \beta \simeq 191.41° - 48.97° \simeq 142°.44$$

e quindi nella seconda osservazione Marte si trovava a ovest del Sole.
Indichiamo con $\mathbf{a_T}$ e $\mathbf{a_M}$ i semiassi maggiori delle orbite della Terra e di Marte e calcoliamo al momento della seconda osservazione la distanza Terra-Marte **d** applicando il teorema del coseno:

$$d = \sqrt{a_T^2 + a_M^2 - 2a_T\, a_M \cos\gamma} \simeq \sqrt{1\text{ UA}^2 + 2.321\text{ UA}^2 - 2 \cdot 1\text{ UA} \cdot 1.524\text{ UA} \cdot \cos 142°.44} \simeq 2.395\text{ UA}$$

Dal teorema dei seni ricaviamo infine l'angolo **θ** tra la congiungente Sole-Terra e la congiungente Terra-Marte:

$$\frac{\text{sen}\,\theta}{a_M} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{d}$$

$$\theta = \text{arcsen}\left(a_M \cdot \frac{\text{sen}\,\gamma}{d}\right) \simeq \text{arcsen}\left(1.524\text{ UA} \cdot \frac{\text{sen } 142°.44}{2.295\ UA}\right) \simeq 22°.82$$

La Terra completa una rotazione in un giorno siderale, la cui durata è di $23^h\ 56^m\ 4.1^s$; quindi l'angolo θ corrisponde a un tempo $\Delta \mathbf{t_{rot}}$ pari a:

$$\Delta t_{rot} = \frac{22°.82}{360°} \cdot 23\text{h } 56\text{m } 4.1\text{ s} \simeq \frac{22°.82}{360°} \cdot 23.9345 \simeq 1^h.5171 \simeq 91\text{ min}$$

Poiché il giorno dell'equinozio il Sole, trascurando l'equazione del tempo e le sue dimensioni angolari, sorge alle ore 06:00 di tempo locale, Marte è sorto circa 91 minuti prima del Sole e quindi attorno alle 04:29 di ora locale.