XXI Campionati Italiani di Astronomia

Finale Nazionale - 19 aprile 2023

Categoria Junior 2

1. Karel e Corty in vacanza

La gattina Karel è in vacanza presso l'Osservatorio di Greenwich, mentre lo scoiattolo rosso Corty, suo amico, si trova presso l'Osservatorio di Mauna Kea (latitudine = +19° 49'; longitudine = 155° 29' Ovest). Quando per Karel, il 19 aprile 2023, il tempo universale è di 9h 22m, quanto vale il tempo solare medio per Corty? Indicate data e ora.

Soluzione

La longitudine dell'Osservatorio di Greenwich è $\lambda_G = 0°$. Detta $\boldsymbol{\lambda_t}$ la longitudine in unità di tempo di una data località, la relazione che lega il tempo solare medio $\mathbf{T_{SM}}$ in tale località al tempo universale UT è:

$$\mathrm{T_{SM}} = \mathrm{UT} \pm \lambda_t$$

dove per la longitudine il segno è positivo se la località si trova a est di Greenwich e negativo se si trova a ovest.
Detta $\boldsymbol{\lambda_{MK}}$ la longitudine in gradi di Mauna Kea e $\boldsymbol{\lambda_{MK-T}}$ il suo valore in unità di tempo, quest'ultimo vale:

$$\lambda_{\mathrm{MK-T}} = \frac{\lambda_{\mathrm{MK}}\, 24^h \cdot}{360°} \simeq \frac{155°.48 \cdot 24^h}{360°} \simeq 10^h.37 \simeq 10^h\, 22^m$$

e quindi, poiché Mauna Kea si trova a ovest di Greenwich:

$$\mathrm{T_{SM}} = \mathrm{UT} - \lambda_{\mathrm{MK-T}} \simeq 9^h\, 22^m - 10^h\, 22^m = -1^h = 23^h \text{ del 18 aprile 2023}$$

2. Corty osserva il cielo

Lo scoiattolo rosso Corty si trova nella sua casa di Cortina d'Ampezzo (latitudine = +46° 32') e osserva una stella che passa al meridiano allo zenit a UT = 0h 0m 0s. Successivamente, a UT = 6h 30m 31s, Corty osserva una seconda stella passare al meridiano in direzione sud a un'altezza di 20° sull'orizzonte. Calcolate la differenza di ascensione retta e la differenza di declinazione delle due stelle osservate da Corty.

Soluzione

Indichiamo con $\boldsymbol{\alpha_A}$, $\boldsymbol{\alpha_B}$, $\boldsymbol{\delta_A}$ e $\boldsymbol{\delta_B}$ ascensione retta e declinazione delle due stelle.
Detta φ la latitudine di Cortina, poiché la prima stella passa al meridiano allo zenith di Cortina si ha:

$$\delta_A = \varphi = 46°\, 32'$$

Quando la seconda stella passa al meridiano in direzione sud (il che significa che $\varphi > \delta_B$) la sua altezza sull'orizzonte è massima $\mathbf{h_{maxB}}$ ed è legata alla sua declinazione dalla relazione:

$$h_{maxB} = 90° - \varphi + \delta_B$$

da cui si ricava:

$$\delta_B = h_{maxB} - 90° + \varphi = 20° - 90° + 46°\, 32' = -23°\, 28'$$

Quindi la differenza di declinazione $\boldsymbol{\Delta\delta}$ delle due stelle è:

$$\Delta\delta = \delta_A - \delta_B = 46°\, 32' - (-23°\, 28') = 70°\, 00'$$

La relazione che lega la differenza di ascensione retta $\boldsymbol{\Delta\alpha}$ di due stelle alla differenza $\boldsymbol{\Delta t_S}$ di tempo siderale del loro passaggio al meridiano è:

$$\Delta\alpha = \Delta t_S$$

La relazione che lega la differenza di tempo siderale $\mathbf{\Delta t_S}$ alla differenza $\mathbf{\Delta UT}$ di Tempo Universale (o di tempo solare medio) è:

$$\Delta t_S = \frac{\Delta UT}{K}$$

dove il fattore di conversione **K** è dovuto al fatto che la sfera celeste effettua una rotazione completa in $23^h\ 56^m\ 4.1^s$ e dunque in un anno solare di n giorni ci sono n+1 giorni siderali:

$$K = \frac{365.25636}{366.25636} \simeq 0.99726967$$

avremo quindi:

$$\Delta\alpha = \Delta t_S = \frac{\Delta UT}{K} \simeq \frac{6^h\ 30^m\ 31^s}{0.99726967} \simeq 6^h.5264 \simeq 6^h\ 31^m\ 35^s$$

3. La nuova luna di Marte

La gattina Karel ha osservato da Terra un'ombra, di forma circolare, che si muoveva sulla superficie di Marte. Karel interpreta il fenomeno come dovuto a una nuova luna, con un diametro di 10 km e una densità media pari a quella media di Marte, che si muove su un'orbita circolare a un'altezza di $0.500 \cdot 10^3$ km dalla superficie del pianeta.

1. Quante rivoluzioni attorno a Marte completerebbe questa ipotetica luna in un anno marziano?
2. Quale sarebbe il rapporto fra la massa dell'ipotetica luna e la massa di Marte?

Soluzione

1. Detti **a** e **T** il raggio dell'orbita e il periodo di rivoluzione della nuova luna, $\mathbf{M_M}$ e $\mathbf{M_L}$ le masse di Marte e della nuova luna, dalla III Legge di Keplero sappiamo che:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\,(M_M + M_L)}{4\,\pi^2}$$

Detta **h** l'altezza della luna sulla superficie di Marte e $\mathbf{R_M}$ il raggio del pianeta si ha:

$$a = h + R_M = 0.500 \cdot 10^3 \text{ km} + 3.397 \cdot 10^3 \text{ km} = 3.897 \cdot 10^3 \text{ km} = 3.897 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Viste le sue dimensioni la massa della luna è trascurabile rispetto a quella di Marte e avremo quindi:

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 a^3}{G\,M_M}} \simeq \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot 5.918 \cdot 10^{19}\text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 6.417 \cdot 10^{23}\ kg}} \simeq 7386\text{ s} \simeq 123.1\text{ m} \simeq 2\text{h } 3\text{m}$$

Espresso in secondi un anno marziano $\mathbf{A_M}$ vale:

$$A_M \simeq 686.97\ g \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \simeq 5.9354 \cdot 10^7\ s$$

Il numero **N** di rivoluzioni che la nuova luna completerebbe in un anno marziano attorno a Marte varrebbe:

$$N = \frac{A_M}{T} \simeq \frac{5.9354 \cdot 10^7\text{ s}}{7386\text{ s}} \simeq 8036$$

2. Detti $\mathbf{R_L}$ il raggio della nuova luna e $\boldsymbol{\rho}$ la sua densità, che sappiamo essere pari a quella di Marte, valgono le relazioni:

$$M_L = \frac{4}{3}\,\pi\,\boldsymbol{\rho}\,{R_L}^3$$

$$M_M = \frac{4}{3}\,\pi\,\boldsymbol{\rho}\,{R_M}^3$$

E quindi il rapporto **K** tra le due masse vale:

$$K = \frac{M_L}{M_M} = \left(\frac{R_L}{R_M}\right)^3 \simeq \left(\frac{5.0\ km}{3.397 \cdot 10^3\ km}\right)^3 \simeq 3.2 \cdot 10^{-9}$$

4. La sorellina di Sirio

Sirio (α CMa) è una stella binaria il cui centro di massa si trova a una distanza di 8.61 anni luce dal Sole. La componente principale, Sirio A, è una stella di sequenza principale, mentre la sua compagna, Sirio B, è una stella piuttosto peculiare. Infatti Sirio B ha una massa pari a 1.02 volte quella del Sole e una temperatura della fotosfera di $25.0 \cdot 10^3$ K, ma la sua magnitudine apparente è solo 5.96.

1. Calcolate la densità media di Sirio B in kg/m^3 e in g/cm^3.
2. Che tipo di stella è Sirio B?

Soluzione

1. Nota la distanza $\mathbf{D}$ del sistema e la magnitudine apparente $\mathbf{m_B}$ di Sirio B, possiamo calcolare la sua magnitudine assoluta $\mathbf{M_B}$:

$$M_B = m_B + 5 - 5\log D\,(pc) \simeq 5.96 + 5 - 5\log\left(\frac{8.61\ \textit{anni luce}}{3.2616\ \frac{\textit{anni luce}}{\textit{parsec}}}\right) \simeq 8.85$$

Detti $\mathbf{R_B}$ il suo raggio e $\mathbf{T_B}$ la temperatura della sua fotosfera, la luminosità $\mathbf{L_B}$ di Sirio B si calcola dalla formula di Stefan-Boltzmann:

$$L_B = 4\pi\sigma\, R_B^2\, T_B^4$$

Detti $\mathbf{R_\odot}$, $\mathbf{T_\odot}$ e $\mathbf{L_\odot}$ il raggio, la temperatura della fotosfera e la luminosità del Sole, per la differenza tra la magnitudine assoluta di Sirio B e quella $\mathbf{M_\odot}$ del Sole vale la relazione:

$$M_B - M_\odot = -2.5\log\frac{L_B}{L_\odot} = -2.5\log\frac{4\pi\sigma\, R_B^2\, T_B^4}{4\pi\sigma\, R_\odot^2\, T_\odot^4}$$

da cui si può ricavare il raggio di Sirio B:

$$M_B - M_\odot = -5\log\frac{R_B\ T_B^2}{R_\odot\ T_\odot^2} \qquad\qquad 10^{\frac{M_\odot - M_B}{5}} = \frac{R_B\ T_B^2}{R_\odot\ T_\odot^2}$$

$$R_B = R_\odot\left(\frac{T_\odot}{T_B}\right)^2 10^{\frac{M_\odot - M_B}{5}} \simeq 6.955\ \cdot\ 10^5\ \text{km}\ \left(\frac{5778\ \text{K}}{25.0\ \cdot 10^3\ \text{K}}\right)^2 10^{\frac{4.83-8.85}{5}} \simeq 5.83\ \cdot 10^3\ \text{km}$$

e infine, detta $\mathbf{M_S}$ la massa del Sole, la densità media $\boldsymbol{\rho_B}$ di Sirio B vale:

$$\rho_B = \frac{1.02\ \cdot\ M_S}{\frac{4}{3}\,\pi\, R_B^3} \simeq \frac{1.02\ \cdot 1.989\ \cdot\ 10^{30}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\ \pi\ \cdot 1.98\ \cdot\ 10^{20}\ \text{m}^3} \simeq 2.45\ \cdot\ 10^9\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 2.45\ \cdot\ 10^9\ \frac{10^3}{10^6}\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$= 2.45\ \cdot\ 10^6\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

2. Abbiamo ricavato che Sirio B è una stella il cui raggio è poco inferiore a quello della Terra, ma la cui massa è simile a quella del Sole. Questo fa sì che la sua densità risulti elevatissima. Inoltre, Sirio B ha una temperatura molto elevata, simile a quella delle stelle dei primi tipi della classe spettrale B. Tutte queste caratteristiche sono tipiche di quelle che vengono chiamate "nane bianche"

5. L'eclisse delle due Lune

Supponete che la Terra abbia un secondo satellite naturale, chiamato Luna2 e identico alla Luna, ma posto a una distanza media pari al doppio della distanza media Terra-Luna, e che il suo piano orbitale coincida con il piano orbitale della Luna. Ogni quanto tempo un osservatore posto sulla Terra vedrebbe la Luna2 perfettamente allineata dietro la Luna? A quanto ammonterebbe questo intervallo di tempo se il moto orbitale della Luna2 attorno alla Terra fosse retrogrado? Considerate le orbite della Luna e della Luna2 circolari.

Soluzione

Facendo riferimento alla figura qui in basso, non in scala, indichiamo con $\mathbf{a_L}$ la distanza media della Luna dalla Terra e con $\mathbf{T_L}$ il suo periodo siderale.

Il periodo siderale $\mathbf{T_{L2}}$ di Luna2, che si trova a una distanza $a_{L2} = 2\ a_L$, si ricava applicando la III Legge di Keplero considerando che il centro di gravità del moto è lo stesso, ovvero la Terra:

$$\frac{(a_L)^3}{(T_L)^2} = \frac{(a_{L2})^3}{(T_{L2})^2}$$

da cui si ricava:

$$\frac{(T_{L2})^2}{(T_L)^2} = \frac{(a_{L2})^3}{(a_L)^3} = \frac{(2a_L)^3}{(a_L)^3} = \frac{8(a_L)^3}{(a_L)^3} = 8$$

cioè

$$T_{L2} = T_L \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \cdot T_L \ \simeq 2\sqrt{2} \cdot 27.322\ g \simeq 77.278\ giorni\ \ \simeq 77g\ 6h\ 41m$$

Visto dalla Terra, il passaggio di Luna2 dietro la Luna si verificherà a intervalli di tempo pari al "periodo relativo" di Luna2 rispetto alla Luna, T'_{L2} . Quest'ultimo si ricava dalla stessa espressione del periodo sinodico,

$$\frac{1}{\mathrm{T_{sinodico}}} = \frac{1}{\mathrm{T_{rif}}} - \frac{1}{\mathrm{T_{siderale}}}$$

nella quale però il periodo di riferimento non è quello della Terra intorno al Sole, ma quello della Luna intorno alla Terra.

Nel caso in cui Luna2 si muova nella stessa direzione della Luna (moto progrado), il suo periodo siderale avrà segno positivo rispetto a quello della Luna e quindi avremo:

$$\frac{1}{\mathrm{T'_{L2}}} = \frac{1}{\mathrm{T_L}} - \frac{1}{\mathrm{T_{L2}}} = \frac{1}{\mathrm{T_L}} - \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot \mathrm{T_L}} = \left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\mathrm{T_L}}$$

Prendendo l'inverso, si ricava:

$$\mathrm{T'_{L2}} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1}\right)\mathrm{T_L} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1}\right) \cdot 27.322\ \mathrm{g} = 42.265\ \mathrm{g}\ \simeq\ 42^{\mathrm{g}}\ 06^{\mathrm{h}}\ 22^{\mathrm{m}}$$

Ovviamente si arriva allo stesso risultato scrivendo:

$$\frac{1}{\mathrm{T'_{L2}}} = \frac{1}{\mathrm{T_L}} - \frac{1}{\mathrm{T_{L2}}} = \frac{\mathrm{T_{L2}} - \mathrm{T_L}}{\mathrm{T_L} \cdot \mathrm{T_{L2}}}$$

$$\mathrm{T'_{L2}} = \frac{\mathrm{T_L} \cdot \mathrm{T_{L2}}}{\mathrm{T_{L2}} - \mathrm{T_L}} \simeq \frac{27.322\ \mathrm{g} \cdot 77.278\ \mathrm{g}}{77.278\ \mathrm{g} - 27.322\ \mathrm{g}} \simeq 42.265\ \mathrm{g}\ \simeq 42^{\mathrm{g}}\ 6^{\mathrm{h}}\ 22^{\mathrm{m}}$$

Nel caso in cui invece Luna2 si muova in direzione opposta alla Luna (moto retrogrado), il suo periodo siderale avrà segno negativo rispetto a quello della Luna:

$$\mathrm{T_{L2-retro}} = -\mathrm{T_{L2}} = -2\sqrt{2} \cdot \mathrm{T_L}$$

$$\frac{1}{\mathrm{T'_{L2}}} = \frac{1}{\mathrm{T_L}} - \frac{1}{\mathrm{T_{L2-retro}}} = \frac{1}{\mathrm{T_L}} - \frac{1}{-2\sqrt{2} \cdot \mathrm{T_L}} = \left(\frac{-2\sqrt{2} - 1}{-2\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\mathrm{T_L}} = \left(\frac{2\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\mathrm{T_L}}$$

Prendendo l'inverso, si ricava:

$$\mathrm{T'_{L2}} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 1}\right)\mathrm{T_L} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 1}\right) \cdot 27.322\ \mathrm{g} = 20.185\ \mathrm{g} \simeq\ 20^{\mathrm{g}}\ 04^{\mathrm{h}}\ 27^{\mathrm{m}}$$

Ovviamente si arriva allo stesso risultato scrivendo:

$$\frac{1}{\mathrm{T'}_{\mathrm{L2}}} = \frac{1}{\mathrm{T_L}} - \frac{1}{\mathrm{T_{L2-retro}}} = \frac{1}{\mathrm{T_L}} + \frac{1}{\mathrm{T_{L2}}} = \frac{\mathrm{T_{L2}} + \mathrm{T_L}}{\mathrm{T_L} \cdot \mathrm{T_{L2}}}$$

$$\mathrm{T'}_{\mathrm{L2}} = \frac{\mathrm{T_L} \cdot \mathrm{T_{L2}}}{\mathrm{T_{L2}} + \mathrm{T_L}} \simeq \frac{27.322\ \mathrm{g} \cdot 77.278\ \mathrm{g}}{77.278\ \mathrm{g} + 27.322\ \mathrm{g}} \simeq 20.185\ \mathrm{g} \simeq 20^{\mathrm{g}}\ 04^{\mathrm{h}}\ 27^{\mathrm{m}}$$