XXI Campionati Italiani di Astronomia

Finale Nazionale - 19 aprile 2023

Categoria Junior 1

1. L'orbita di Titano

Titano, il più grande satellite naturale di Saturno, completa un'orbita attorno al pianeta in 15 giorni, 22 ore e 41 minuti. Assumete l'orbita circolare e calcolate il valore della velocità orbitale di Titano.

Soluzione

Dette $\mathbf{M_S}$ e $\mathbf{M_T}$ le masse di Saturno e Titano, la relazione che lega il periodo di rivoluzione $\mathbf{T}$ di Titano al semiasse maggiore $\mathbf{a}$ dell'orbita intorno a Saturno è la III Legge di Keplero:

$$\frac{a^3}{T^2} = G\,\frac{M_S + M_T}{4\,\pi^2}$$

Il periodo di rivoluzione di Titano espresso in secondi vale:

$$\mathrm{T} = 15 \cdot 24 \cdot 3600 + 22 \cdot 3600 + 41 \cdot 60 \simeq 1.3776 \cdot 10^6 \mathrm{~s}$$

e poiché la massa di Titano è trascurabile rispetto a quella di Saturno si ha:

$$\mathrm{a} \simeq \sqrt[3]{\mathrm{G}\frac{\mathrm{M_S}\,\mathrm{T}^2}{4\pi^2}} \simeq \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26}\,kg \cdot 1.8978 \cdot 10^{12}\,s^2}{4\,\pi^2}} \simeq$$

$$\simeq 1.222 \cdot 10^9\,m = 1.222 \cdot 10^6\,km$$

Assumendo l'orbita circolare, la velocità orbitale $\mathbf{v_T}$ è costante **e** si può ricavare dividendo la lunghezza dell'orbita per il tempo impiegato a percorrerla, ovvero dalla relazione:

$$\mathrm{v_T} = \frac{2\,\pi\,\mathrm{a}}{\mathrm{T}} \simeq \frac{2\,\pi \cdot 1.222 \cdot 10^6\,km}{1.378 \cdot 10^6\,\mathrm{s}} \simeq 5.572\,\frac{km}{s}$$

2. Corty osserva il cielo

Lo scoiattolo rosso Corty si trova nella sua casa a Cortina d'Ampezzo (latitudine = +46° 32') e osserva una stella che passa al meridiano allo zenit. Successivamente, Corty osserva una seconda stella passare al meridiano in direzione sud a un'altezza di 20° sull'orizzonte. Calcolate la differenza di declinazione tra le due stelle osservate da Corty.

Soluzione

Indichiamo con $\boldsymbol{\delta_A}$ e $\boldsymbol{\delta_B}$ la declinazione delle due stelle.

Detta $\boldsymbol{\varphi}$ la latitudine di Cortina, poiché la prima stella passa al meridiano allo zenith di Cortina si ha:

$$\delta_A = \varphi = 46°\,32'$$

Quando la seconda stella passa al meridiano in direzione sud (il che significa che $\varphi > \delta_B$), la sua altezza sull'orizzonte è massima $\mathbf{h_{maxB}}$ ed è legata alla sua declinazione dalla relazione:

$$\mathrm{h_{maxB}} = 90° - \varphi + \delta_\mathrm{B}$$

da cui si ricava:

$$\delta_\mathrm{B} = \mathrm{h_{maxB}} - 90° + \varphi = 20° - 90° + 46°\,32' = -23°\,28'$$

Quindi la differenza di declinazione $\boldsymbol{\Delta\delta}$ delle due stelle è:

$$\Delta\delta = \delta_A - \delta_B = 46°\,32' - (-23°\,28') = 70°\,00'$$

3. La nuova luna di Marte

La gattina Karel ha osservato da Terra un'ombra, di forma circolare, che si muoveva sulla superficie di Marte. Karel interpreta il fenomeno come dovuto a una nuova luna, con un diametro di 10 km e una densità media pari a quella media di Marte, che si muove su un'orbita circolare a un'altezza di $0.500 \cdot 10^3$ km dalla superficie del pianeta.

1. Quante rivoluzioni attorno a Marte completerebbe questa ipotetica luna in un anno marziano?
2. Quale sarebbe il rapporto fra la massa dell'ipotetica luna e la massa di Marte?

Soluzione

1. Detti **a** e **T** il raggio dell'orbita e il periodo di rivoluzione della nuova luna, $\mathbf{M_M}$ e $\mathbf{M_L}$ le masse di Marte e della nuova luna, dalla III Legge di Keplero sappiamo che:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\,(M_M + M_L)}{4\,\pi^2}$$

Detta **h** l'altezza della luna sulla superficie di Marte e $\mathbf{R_M}$ il raggio del pianeta si ha:

$$a = h + R_M = 0.500 \cdot 10^3 \text{ km} + 3.397 \cdot 10^3 \text{ km} = 3.897 \cdot 10^3 \text{ km} = 3.897 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Viste le sue dimensioni la massa della luna è trascurabile rispetto a quella di Marte e avremo quindi:

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 a^3}{G\,M_M}} \simeq \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot 5.918 \cdot 10^{19}\text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 6.417 \cdot 10^{23}\,kg}} \simeq 7386 \text{ s} \simeq 123.1 \text{ m} \simeq 2\text{h } 3\text{m}$$

Espresso in secondi un anno marziano $\mathbf{A_M}$ vale:

$$A_M \simeq 686.97\,g \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \simeq 5.9354 \cdot 10^7\,s$$

Il numero **N** di rivoluzioni che la nuova luna completerebbe in un anno marziano attorno a Marte varrebbe:

$$N = \frac{A_M}{T} \simeq \frac{5.9354 \cdot 10^7 \text{ s}}{7386 \text{ s}} \simeq 8036$$

2. Detti $\mathbf{R_L}$ il raggio della nuova luna e $\boldsymbol{\rho}$ la sua densità, che sappiamo essere pari a quella di Marte, valgono le relazioni:

$$M_L = \frac{4}{3}\,\pi\,\boldsymbol{\rho}\,{R_L}^3$$

$$M_M = \frac{4}{3}\,\pi\,\boldsymbol{\rho}\,{R_M}^3$$

E quindi il rapporto **K** tra le due masse vale:

$$K = \frac{M_L}{M_M} = \left(\frac{R_L}{R_M}\right)^3 \simeq \left(\frac{5.0\,km}{3.397 \cdot 10^3\,km}\right)^3 \simeq 3.2 \cdot 10^{-9}$$

4. Il satellite mercurio-stazionario

Il raggio dell'orbita di un satellite mercurio-stazionario (ovvero che osservato dalla superficie di Mercurio appare fermo in cielo) viene ridotto a 1/100 del suo valore. Calcolate a quale altezza dalla superficie di Mercurio si troverà il satellite e il suo nuovo periodo di rivoluzione.

Soluzione

Il raggio $\mathbf{R_S}$ dell'orbita di un satellite Mercurio-stazionario si ottiene imponendo che il suo periodo orbitale $\mathbf{T_S}$ sia uguale al periodo di rotazione $\mathbf{T_M}$ di Mercurio. Assumendo la massa del satellite trascurabile rispetto a quella $\mathbf{M_M}$ di Mercurio, dalla III legge di Keplero si ha:

$$R_S = \sqrt[3]{\frac{G\,M_M\,T_M^2}{4\pi^2}}$$

$$\mathrm{R_S} \simeq \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 3.301 \cdot 10^{23} kg \cdot \ 2.5675 \ \cdot \ 10^{13}\ s^2}{4\pi^2}} \simeq 2.429 \cdot 10^5 km$$

Riducendo il raggio dell'orbita a 1/100 di questo valore, il nuovo valore $\mathbf{R_{1/100}}$ varrebbe:

$$\mathrm{R_{1/100}} = \frac{\mathrm{R_S}}{100} \ \simeq \ 2.429 \cdot 10^3 km$$

che però risulta minore del raggio di Mercurio, per cui a seguito della manovra di riduzione del raggio dell'orbita il satellite finirebbe in realtà per schiantarsi sulla superficie del pianeta.

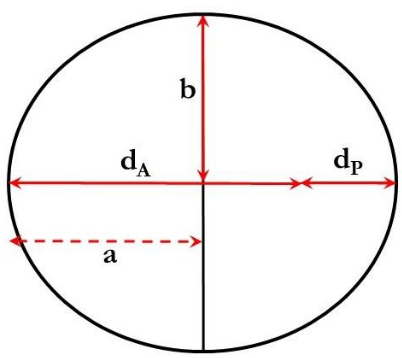
5. Curiosità orbitali

È stato recentemente scoperto un piccolo asteroide la cui distanza dal Sole al perielio è esattamente uguale a metà del semiasse maggiore della sua orbita.

1. Quanto vale l'eccentricità dell'orbita dell'asteroide?
2. Se il semiasse maggiore dell'orbita è pari a 3.0 UA, quanto vale il semiasse minore dell'orbita dell'asteroide? Esprimete il risultato in UA e in km.
3. Quanto tempo, in minuti, impiega la luce del Sole a raggiungere l'asteroide quando si trova all'afelio?
4. Nel caso in cui l'asteroide, osservato dalla Terra, si trovi contemporaneamente all'afelio e in opposizione, quanti minuti impiega la luce riflessa dall'asteroide a raggiungere la Terra? Assumete l'orbita della Terra circolare e l'orbita dell'asteroide sul piano dell'eclittica.

Nel calcolo dei tempi trascurate lo spostamento dell'asteroide e della Terra lungo le rispettive orbite.

Soluzione



Indichiamo con $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ed $\mathbf{e}$ la lunghezza dei semiassi maggiore e minore e l'eccentricità dell'orbita dell'asteroide, con $\mathbf{d_P}$ e $\mathbf{d_A}$ le distanze dal Sole dell'asteroide al perielio e all'afelio e con $\mathbf{d_T}$ la distanza della Terra dal Sole.

1. La relazione che lega la distanza al perielio con il semiasse maggiore e l'eccentricità è:

$$\mathrm{d_P = a\,(1 - e)}$$

e poiché si ha anche:

$$\mathrm{d_P} = \frac{\mathrm{a}}{2}$$

si ottiene:

$$\frac{\mathrm{a}}{2} = \mathrm{a\,(1-e)} \qquad \frac{1}{2} = 1 - \mathrm{e} \qquad 1 = 2 - 2\mathrm{e}$$

$$2\mathrm{e} = 1 \qquad \mathrm{e} = \frac{1}{2} = 0.5$$

2. Dalla relazione che lega la lunghezza del semiasse minore con il semiasse maggiore e l'eccentricità otteniamo:

$$\mathrm{b = a\sqrt{1 - e^2} = 3.0\ UA \ \cdot\ 0.866 \ \simeq 2.6\ UA \ \simeq 3.9 \ \cdot\ 10^8\ km}$$

3. La distanza dell'asteroide all'afelio vale:

$$d_A = a\,(1+e) \simeq 3.0\ UA \ \cdot 149.6 \ \cdot 10^6\ km \ \ \cdot 1.5 \ \simeq \ 6.7 \ \cdot \ 10^8\ \mathrm{km}$$

Per percorrere questa distanza la luce impiega un tempo $\mathbf{T}$ pari a:

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{d_A}}{\mathrm{c}} \simeq \frac{6.7 \ \cdot\ 10^8\ \mathrm{km}}{299792\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} \simeq 2.2 \ \cdot \ 10^3\ s \ \simeq 37\ m$$

4. Quando l'asteroide di trova contemporaneamente all'afelio e in opposizione, la sua distanza $\mathbf{d_{AT}}$ dalla Terra vale:

$$d_{AT} = d_A - d_T \simeq 6.7 \cdot 10^8 \text{ km} - 149.6 \cdot 10^6\, km \simeq 5.2 \cdot 10^8 \text{ km}$$

Per percorrere questa distanza la luce impiega un tempo $\mathbf{T_1}$ pari a:

$$T_1 = \frac{d_{AT}}{c} \simeq \frac{5.2 \cdot 10^8 \text{ km}}{299792 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \simeq 1.7 \cdot 10^3\, s \simeq 29\, m$$

NOTA

Dalle distanze Sole-asteroide e Terra-asteroide, e dai diametri del Sole e della Terra, si può verificare che, per un osservatore posto sull'asteroide, il Sole avrebbe un diametro angolare di 7.1 arcmin, mentre la Terra avrebbe un diametro angolare di appena 4.9 arcsec (quasi 100 volte inferiore al precedente). Quindi l'asteroide non è "oscurato" dalla Terra ed è in grado di ricevere luce direttamente dal Sole: quindi il calcolo effettuato assumendo le distanze tra i centri del Sole, dell'asteroide e della Terra è corretto.