

Campionati Italiani di Astronomia
Corso di preparazione alla Finale Nazionale
Categorie Senior/Master - Lezione 2



1. Vista dalla Terra una stella ha magnitudine apparente 4.32. Sappiamo, da osservazioni spettroscopiche, che la temperatura della sua fotosfera è di 5000 K. Quanto dovrebbe valere la temperatura della fotosfera per osservare dalla Terra una magnitudine di 2.32?

Soluzione

Indicando con R , T e d il raggio, la temperatura e la distanza, con m_1 e m_2 le magnitudini apparenti di due stelle e con F_1 e F_2 i loro flussi, vale la relazione:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \left(\frac{F_1}{F_2} \right) = -2.5 \log \left(\frac{R_1^2 \cdot T_1^4}{d_1^2} \right) \left(\frac{d_2^2}{R_2^2 \cdot T_2^4} \right)$$

Considerando le due stelle come se fossero la stessa stella ma a temperature diverse, si ha che la distanza e il raggio sono uguali e otteniamo quindi la relazione:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4$$

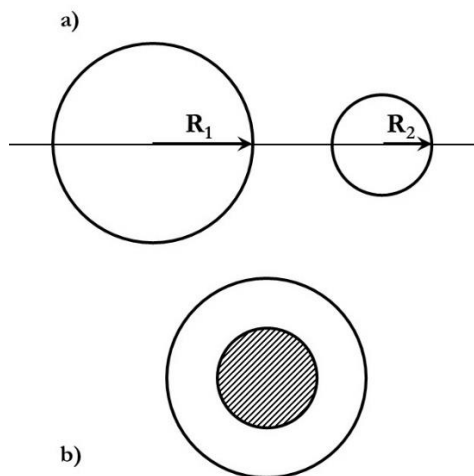
Detta T_1 la temperatura della fotosfera per cui si ha $m_1 = 4.32$, possiamo ricavare la temperatura T_2 per cui si ha $m_2 = 2.32$:

$$m_1 - m_2 = -10 \log \left(\frac{T_1}{T_2} \right) \quad \frac{m_2 - m_1}{10} = \log \left(\frac{T_1}{T_2} \right)$$

$$T_2 = \frac{T_1}{10^{\frac{m_2 - m_1}{10}}} = \frac{5000 \text{ K}}{10^{\frac{2.32 - 4.32}{10}}} \approx 7.92 \cdot 10^3 \text{ K} \approx 7920 \text{ K}$$

2. Un sistema binario a eclisse è formato da due stelle con la stessa temperatura della fotosfera. Il raggio della prima stella è pari a quello del Sole, il raggio della seconda stella è pari a metà di quello del Sole. Il piano orbitale del sistema è parallelo alla direzione di osservazione dalla Terra. Di quanto varia, al massimo, la magnitudine della binaria a eclisse quando la seconda stella transita davanti alla prima?

Soluzione



Detta T la temperatura della fotosfera delle due stelle e R_1 e R_2 i rispettivi raggi (con $R_1 = 2 R_2$), le luminosità L_1 e L_2 valgono:

$$L_1 = 4 \pi R_1^2 \sigma T^4 \quad L_2 = 4 \pi R_2^2 \sigma T^4$$

La luminosità L_{TOT} del sistema fuori eclisse (configurazione **a** nella figura a sinistra) è massima e vale:

$$L_{TOT} = L_1 + L_2 = 4 \pi (R_1^2 + R_2^2) \sigma T^4$$

Per tutto il tempo dell'eclisse totale, in cui la seconda stella transitando risulta prospetticamente interamente "all'interno" della prima (configurazione **b** nella figura a sinistra), si avrà il minimo di luminosità del sistema $L_{Eclisse}$ che vale:

$$L_{Eclisse} = 4 \pi R_1^2 \sigma T^4$$

Dette m_{TOT} la magnitudine del sistema nella configurazione **a** e $m_{Eclisse}$ la magnitudine del sistema nella configurazione **b**, e ricordando che $R_1 = 2 R_2$, la variazione di magnitudine Δm durante l'eclisse totale è data da:

$$\Delta m = m_{Eclisse} - m_{TOT} = -2.5 \log \frac{L_{Eclisse}}{L_{TOT}} = -2.5 \log \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} = -2.5 \log \frac{4}{5} \approx 0.24$$

Nota: poiché la temperatura della fotosfera delle due stelle è uguale, la stessa variazione di magnitudine si osserverà quando la seconda stella transita dietro la prima.

3. Con una magnitudine apparente di 1.25, Deneb (= α Cyg) è la 19.ma stella più luminosa del cielo. La sua distanza non è ben nota, ma si stima essere di circa $2.60 \cdot 10^3$ anni luce; la temperatura della sua fotosfera è di 8500 K. Calcolate:
1. la magnitudine assoluta di Deneb;
 2. la sua magnitudine apparente se si trovasse a 4.36 anni luce (cioè alla distanza di α Cen);
 3. il suo diametro apparente se si trovasse a 4.36 anni luce;
 4. il conseguente aspetto nel cielo notturno per osservazioni a occhio nudo.

Soluzione

1. In parsec la distanza D di Deneb vale:

$$D = \frac{2.60 \cdot 10^3 \text{ anni luce}}{3.2616 \text{ anni luce/parsec}} \approx 797 \text{ parsec}$$

Dette M_D e m_D le magnitudini assoluta e apparente di Deneb si ha:

$$M_D = m_D + 5 - 5 \log D \approx 1.25 + 5 - 5 \log 797 \approx -8.26$$

2. se per la distanza d di Deneb consideriamo un valore:

$$d = \frac{4.36 \text{ anni luce}}{3.2616 \text{ anni luce/parsec}} \approx 1.34 \text{ parsec}$$

per la sua magnitudine apparente otteniamo:

$$m_D = M_D - 5 + 5 \log d \approx -8.26 - 5 + 5 \log 1.34 \approx -12.62$$

un valore paragonabile alla magnitudine media della Luna piena.

3. Detti R_\odot , T_\odot , R_D e T_D i raggi e le temperature del Sole e di Deneb e M_\odot la magnitudine assoluta del Sole vale la relazione:

$$M_D - M_\odot = -2.5 \log \left[\left(\frac{R_D}{R_\odot} \right)^2 \left(\frac{T_D}{T_\odot} \right)^4 \right] = -5 \log \left[\frac{R_D}{R_\odot} \left(\frac{T_D}{T_\odot} \right)^2 \right]$$

da cui possiamo ricavare il raggio di Deneb:

$$\log \frac{R_D}{R_\odot} = \frac{M_\odot - M_D}{5} - 2 \log \frac{T_D}{T_\odot}$$

$$R_D = R_\odot \cdot 10^{\left(\frac{M_\odot - M_D}{5} - 2 \log \frac{T_D}{T_\odot} \right)} \approx R_\odot \cdot 10^{\left(\frac{13.09}{5} - 2 \log 1.471 \right)} \approx 192 R_\odot \approx 134 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Quindi il raggio di Deneb è quasi il 90% della distanza Terra-Sole e posta alla distanza di α Cen il suo diametro apparente D_{Deneb} varrebbe:

$$D_{Deneb} = 2 \arcsen \left(\frac{R_D}{d} \right) \approx 2 \arcsen \left(\frac{134 \cdot 10^6 \text{ km}}{4.36 \text{ anni luce}} \right) \approx 2 \arcsen \left(\frac{134 \cdot 10^6 \text{ km}}{4.12 \cdot 10^{13} \text{ km}} \right) \approx 1''.3$$

4. Di notte, a occhio nudo, osserveremmo quindi un oggetto con luminosità pari a quella della Luna piena, ma di aspetto puntiforme.

4. Una stella dista dal Sole 326.2 anni luce, ha magnitudine apparente 3.25 e temperatura della fotosfera di 3500 K. Calcolate:
1. la magnitudine assoluta della stella;
 2. la sua luminosità in unità di luminosità solari;
 3. il suo raggio in unità di raggi solari e in km, fornendo infine una stima del suo tipo spettrale.

Soluzione

1. Detta d la distanza in anni luce, la distanza D della stella in parsec vale:

$$D \approx \frac{d}{3.2616 \frac{\text{anni luce}}{\text{parsec}}} \approx \frac{326.2 \text{ anni luce}}{3.2616 \frac{\text{anni luce}}{\text{parsec}}} \approx 100.0 \text{ pc}$$

Detta m_s la magnitudine apparente, la magnitudine assoluta M_s della stella vale:

$$M_s = m_s + 5 - 5 \log D \approx 3.25 + 5 - 5 \log 100.0 \approx -1.75$$

2. Dette L_s la luminosità della stella e L_\odot e M_\odot la luminosità e la magnitudine assoluta del Sole vale la relazione:

$$M_\odot - M_s = -2.5 \log \left(\frac{L_\odot}{L_s} \right)$$

da cui ricaviamo:

$$\log \left(\frac{L_\odot}{L_s} \right) \approx \frac{M_\odot - M_s}{-2.5} \approx \frac{4.83 + 1.75}{-2.5} \approx -2.63$$

$$\frac{L_\odot}{L_s} \approx 10^{-2.63} \quad L_s \approx \frac{L_\odot}{10^{-2.63}} \approx 427 L_\odot$$

3. Detti R_s e T_s e R_\odot e T_\odot i raggi e le temperature della stella e del Sole, dalla legge di Stefan-Boltzmann si ha:

$$4 \pi R_s^2 \sigma T_s^4 = 427 \cdot 4 \pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4$$

e quindi:

$$R_s = R_\odot \sqrt[4]{427 \left(\frac{T_\odot}{T_s} \right)^4} \approx R_\odot \sqrt[4]{427 \left(\frac{5778}{3500} \right)^4} \approx 56.3 R_\odot \approx 39.2 \cdot 10^6 \text{ km}$$

La stella è una “gigante rossa” di tipo spettrale K avanzato; il suo raggio è circa 0.68 volte il semiasse maggiore dell’orbita di Mercurio.

5. Una colonia di gatti neri, tutti perfettamente uguali, si è stabilita su un asteroide nero in orbita attorno al Sole. La colonia è visibile grazie alla luce solare riflessa dagli occhi di tutti i gatti. In un certo istante i gatti hanno tutti gli occhi aperti e la colonia è vista dalla Terra come una stella di magnitudine 28.32. Non appena uno dei gatti chiude gli occhi, la magnitudine osservata diventa 28.52. Calcolate da quanti gatti (si arrotondi il risultato all’intero più prossimo) è formata la colonia. L’emissione del corpo dei gatti e quella riflessa dall’asteroide sono trascurabili.

Soluzione.

Detto f il flusso riflesso dagli occhi di un gatto e N il numero dei gatti, le magnitudini apparenti quando tutti i gatti hanno gli occhi aperti m_1 e quando uno li ha chiusi m_2 sono date dalle relazioni:

$$m_1 = -2.5 \log N \cdot f + C$$

$$m_2 = -2.5 \log (N - 1) \cdot f + C$$

e quindi:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{N}{N-1}$$

da cui:

$$10^{\frac{m_2 - m_1}{2.5}} = \frac{N}{N - 1}$$

posto: $10^{\frac{m_2 - m_1}{2.5}} = K \approx 1.202$ ricaviamo infine:

$$N \approx \frac{K}{K - 1} \approx \frac{1.202}{1.202 - 1} \approx 6$$

6. Stimare la magnitudine apparente media della Luna Piena. Trascurate gli effetti dell'atmosfera della Terra.

Soluzione.

La luminosità della Luna è dovuta alla riflessione della luce che riceve dal Sole. Detti R_{\odot} e T_{\odot} il raggio e la temperatura della fotosfera del Sole, la quantità totale di energia L_{\odot} emessa dal Sole ogni secondo è:

$$L_{\odot} = 4 \pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4$$

$$L_{\odot} \approx 4 \pi \cdot 4.837 \cdot 10^{17} m^2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \cdot 1.115 \cdot 10^{15} K^4 \approx 3.843 \cdot 10^{26} W$$

Dette D_T la distanza media Terra-Sole, D_{TL} la distanza media Terra-Luna e $D_{L\odot}$ ($=D_T + D_{TL}$) la distanza media Luna-Sole, il flusso solare, ovvero la quantità di energia al secondo che arriva per unità di superficie sulla Terra $F_{\odot T}$ (costante solare) e sulla Luna $F_{\odot L}$ è:

$$F_{\odot T} = \frac{L_{\odot}}{4 \pi D_T^2} \approx \frac{3.843 \cdot 10^{26} W}{4 \pi \cdot 2.238 \cdot 10^{22} m^2} \approx 1366 \frac{W}{m^2}$$

$$F_{\odot L} = \frac{L_{\odot}}{4 \pi D_{L\odot}^2} \approx \frac{3.843 \cdot 10^{26} W}{4 \pi \cdot 2.250 \cdot 10^{22} m^2} \approx 1359 \frac{W}{m^2}$$

Detto R_L il raggio della Luna, la superficie proiettata S_L della Luna che riceve la radiazione solare vale:

$$S_L = \pi R_L^2 \approx 9.490 \cdot 10^{12} m^2$$

Detto A_L il valore medio dell'albedo lunare, la quantità E_L di energia riflessa ogni secondo dalla Luna vale:

$$E_L = F_{\odot L} S_L A_L \approx 1359 \frac{W}{m^2} \cdot 9.490 \cdot 10^{12} m^2 \cdot 0.136 \approx 1.754 \cdot 10^{15} W$$

La quantità di energia F_{Moon} ricevuta sulla Terra dalla Luna al secondo per unità di superficie è:

$$F_{Moon} = \frac{E_L}{2 \pi D_{TL}^2} \approx \frac{1.754 \cdot 10^{15} W}{2 \pi \cdot 1.478 \cdot 10^{17} m^2} \approx 1.889 \cdot 10^{-3} \frac{W}{m^2}$$

Considerando la differenza tra la magnitudine apparente del Sole m_{\odot} e quella della Luna m_L si ha infine:

$$m_L = m_{\odot} + 2.5 \log \frac{F_{\odot T}}{F_{Moon}} \approx -26.74 + 2.5 \log \frac{1366 \frac{W}{m^2}}{1.889 \cdot 10^{-3} \frac{W}{m^2}} \approx -12.09$$

Nota.

Il valore ottenuto con le semplici approssimazioni usate per la quantità di energia riflessa dalla Luna, è in ragionevole accordo con quello normalmente indicato come magnitudine media della Luna piena: $m_L = -12.74$.

7. Una galassia a spirale ha una magnitudine assoluta integrata -20.17 e un raggio di $2.0 \cdot 10^4$ anni luce. Stimare, in prima approssimazione, la velocità di fuga per un oggetto posto sul piano galattico alla distanza di $2.0 \cdot 10^5$ anni luce dal centro della galassia. Si assuma che la massa delle stelle sia circa la metà della massa “ordinaria” della galassia.

Soluzione.

In prima approssimazione, possiamo stimare il numero di stelle n che compongono la galassia, ipotizzando che siano tutte uguali al Sole, dal valore della sua magnitudine assoluta. Dette M_T e F_T la magnitudine assoluta e il flusso della galassia e $M_{A\odot}$ e F_{\odot} la magnitudine assoluta e il flusso del Sole, avremo quindi:

$$M_T - M_{A\odot} = -2.5 \log \frac{F_T}{F_{\odot}} = -2.5 \log \frac{n F_{\odot}}{F_{\odot}} = -2.5 \log n$$

$$n = 10^{\left(\frac{M_{A\odot} - M_T}{2.5}\right)} \approx 10^{\left(\frac{4.83 + 20.17}{2.5}\right)} \approx 10^{10}$$

Detta M_S la massa totale delle stelle e M_{\odot} la massa del Sole, la massa totale “ordinaria” M_O della galassia vale:

$$M_O = 2 M_S \approx 2 \cdot 10^{10} \cdot M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{10} \cdot 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 4 \cdot 10^{40} \text{ kg}$$

Dagli studi sulla dinamica delle galassie a spirale, sappiamo che esiste della materia non visibile, la cosiddetta “materia oscura”. La materia oscura contribuisce per circa l’84% della massa gravitazionale totale delle galassie. Quindi M_O costituisce circa il restante 16% della massa M_G della galassia per gli effetti gravitazionali: $M_O \approx 0.16 M_G$, e di conseguenza si avrà:

$$M_G \approx 6.25 M_O \approx 2.5 \cdot 10^{41} \text{ kg}$$

La distanza R a cui vogliamo calcolare la velocità di fuga è 10 volte il raggio della galassia. Facciamo quindi l’ipotesi che tutta la massa della galassia, inclusa quella oscura, sia all’interno di tale distanza. Con questa assunzione, ai fini degli effetti gravitazionali possiamo considerare tutta la massa come concentrata al centro della galassia, e la velocità di fuga v_f vale quindi:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 G M_G}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 2.5 \cdot 10^{41} \text{ kg}}{1.9 \cdot 10^{21} \text{ m}}} \approx 13 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 130 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

8. Le Supernovae (SN) di Tipo Ia raggiungono, al massimo di luminosità, la magnitudine assoluta -21.0 . Una SN di Tipo Ia è esplosa nella galassia M90 dell’Ammasso della Vergine a $60.0 \cdot 10^6$ anni luce dal Sole. Nel cielo M90 appare come un’ellisse con dimensioni angolari $9'.50 \cdot 4'.50$ e la sua magnitudine apparente superficiale media è di $22.0 \text{ mag/arcsec}^2$. Si calcoli:

1. il modulo di distanza di M90;
2. se la SN, al massimo di luminosità, è più brillante dell’intera galassia che la ospita;
3. la magnitudine apparente complessiva del sistema galassia + SN al massimo di luminosità.

Soluzione

1. La distanza d di M90 in parsec vale:

$$d = \frac{60.0 \cdot 10^6 \text{ anni luce}}{3.2616 \frac{\text{anni luce}}{\text{parsec}}} \approx 18.4 \cdot 10^6 \text{ pc}$$

Quindi la magnitudine apparente m_{SN} della SN al massimo di luminosità è:

$$m_{SN} = M_{SN} - 5 + 5 \log d (\text{pc}) \approx -21.0 - 5 + 5 \log (18.4 \cdot 10^6) \approx 10.3$$

e il modulo di distanza della galassia, definito come la differenza tra la magnitudine apparente e quella assoluta, che ovviamente coincide con quello della SN vale:

$$m_{SN} - M_{SN} \approx 31.3$$

2. L'area **A** della galassia, in arcsec^2 vale:

$$A = \pi a b = \pi \frac{9'.50 \cdot 60}{2} \cdot \frac{4'.50 \cdot 60}{2} \simeq 121 \cdot 10^3 \text{ arcsec}^2$$

Detta m_{sup} la magnitudine media superficiale di M90, la sua magnitudine apparente integrata m_{GAL} è:

$$m_{\text{GAL}} = m_{\text{sup}} - 2.5 \log A \simeq 22.0 - 2.5 \log (121 \cdot 10^3) \simeq 9.3$$

Quindi poiché

$$m_{\text{GAL}} < m_{\text{SN}}$$

la supernova non diventa, neppure al massimo di luminosità, più brillante dell'intera galassia.

3. La magnitudine complessiva m_{TOT} galassia + supernova al massimo si può ottenere con la relazione:

$$m_{\text{TOT}} = -2.5 \log(10^{-0.4 m_{\text{SN}}} + 10^{-0.4 m_{\text{GAL}}}) \simeq 8.9$$

9. La Luna si allontana dalla Terra a una velocità di circa 3.8 cm/anno. Tra quanto tempo non sarà più possibile osservare dalla Terra eclissi totali di Sole?

Soluzione

Le eclissi totali di Sole non avranno più luogo quando da un qualsiasi punto sulla superficie della Terra il diametro apparente della Luna al perigeo sarà minore del diametro apparente del Sole all'afelio $D_{\odot A}$. Detta d_{TA} la distanza della Terra dal Sole all'afelio e R_{\odot} il raggio del Sole, il diametro angolare del Sole all'afelio vale:

$$D_{\odot A} = 2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{R_{\odot}}{d_{TA}} \right) \simeq 2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{6.955 \cdot 10^5 \text{ km}}{152.1 \cdot 10^6 \text{ km}} \right) \simeq 0^\circ.5240 \simeq 31'.44$$

Detto R_L il raggio della Luna, la distanza di fine eclissi d_{FE} è quella dalla quale il disco lunare sottende un angolo pari a $D_{\odot A}$ ed è data da:

$$d_{FE} = \frac{2 R_{\text{Luna}}}{\sin D_{\odot A}} \simeq \frac{3476 \text{ km}}{\sin 0^\circ.5240} \simeq 380.1 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Detti a_L ed e_L il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita lunare, la distanza attuale del centro della Luna al perigeo d_{LP} dal centro della Terra vale:

$$d_{LP} = a_L (1 - e_L) \simeq 363.3 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Detto R_T il raggio della Terra, la distanza minima di un punto sulla superficie della Terra dal centro della Luna d_{TP} si ha quando la Luna è al perigeo ed è vista allo zenith (circostanza che può verificarsi solo per la fascia di latitudini tra circa $+28^\circ$ e -28°) e attualmente vale:

$$d_{TP} = d_{LP} - R_T \simeq 356.9 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Quindi il tempo **T** necessario affinché la distanza della Luna al perigeo diventi uguale a d_{FE} è dato da:

$$T = \frac{d_{FE} - d_{TP}}{V_a} \simeq \frac{380.1 \cdot 10^8 \text{ cm} - 356.9 \cdot 10^8 \text{ cm}}{3.8 \frac{\text{cm}}{\text{anno}}} \simeq 61 \cdot 10^7 \text{ anni}$$

Nota.

Nella soluzione si assume che la velocità di allontanamento, le eccentricità dell'orbita lunare e dell'orbita della Terra e il raggio del Sole rimangano costanti. Anche considerando le loro variazioni, si stima comunque un tempo di fine eclissi simile a quello calcolato.

10. La stella ϵ Eri si trova a 10.5 anni luce dal Sole e intorno a essa ruota un pianeta, ϵ Eri b, che percorre un'orbita circolare il cui raggio vale 3.39 UA e il cui piano risulta perpendicolare alla direzione di osservazione. Calcolate la parallasse annua di ϵ Eri osservata dalla Terra, la parallasse annua del Sole osservato da ϵ Eri b e a quanto corrisponde un pc misurato da ϵ Eri b.

Soluzione

La parallasse annua, in secondi d'arco, è pari all'inverso della distanza in parsec. Dalla Terra 1 parsec è pari a circa 3.2616 anni luce. Quindi, detta d la distanza dal Sole in anni luce, ϵ Eri si trova a una distanza $D_{\epsilon-Eri}$ in parsec:

$$D_{\epsilon-Eri} = \frac{d}{3.2616} \simeq \frac{10.5 \text{ anni luce}}{3.2616 \text{ anni} \frac{\text{luce}}{\text{parsec}}} \simeq 3.22 \text{ parsec} \simeq 664 \cdot 10^3 \text{ UA}$$

e quindi la sua parallasse $\pi_{\epsilon-Eri}$ vale:

$$\pi_{\epsilon-Eri} = \frac{1}{3.22 \text{ parsec}} \simeq 0''.311$$

Per calcolare la parallasse del Sole visto da ϵ Eri b, dobbiamo considerare che il suo valore dipende dalle dimensioni della "base", ovvero dal semiasse maggiore dell'orbita. Tanto maggiore è la base, tanto maggiore, a parità di distanza di una stella, sarà la sua parallasse. Detto π_{\odot} l'angolo di parallasse del Sole visto da ϵ Eri b e $a_{\epsilon-Eri b}$ il raggio dell'orbita di ϵ Eri b avremo:

$$\pi_{\odot} = \tan^{-1} \left(\frac{a_{\epsilon-Eri b}}{D_{\epsilon-Eri}} \right) \simeq \tan^{-1} \left(\frac{3.39 \text{ UA}}{664 \cdot 10^3 \text{ UA}} \right) \simeq 2^{\circ}.93 \cdot 10^{-4} \simeq 1''.05$$

Si noti che questo valore corrisponde a 3.39 volte la parallasse misurata dalla Terra per ϵ Eri, ovvero al rapporto tra il semiasse maggiore dell'orbita di ϵ Eri b e quello della Terra. La conversione tra parsec definiti con osservazioni dalla Terra e da ϵ Eri b segue la stessa correzione, quindi:

$$1 \text{ parsec di } \epsilon \text{ Eri b} \simeq 3.39 \text{ parsec terrestri}$$

11. Una nebulosa planetaria si espande in modo isotropo (cioè allo stesso modo in tutte le direzioni) con una velocità costante pari a 17.0 km/s. Dal febbraio 1972 al febbraio 2017 le dimensioni angolari α del suo raggio sono aumentate da $\alpha_{1972} = 34''.0$ a $\alpha_{2017} = 40''.0$. Calcolate la distanza, in anni luce e in parsec, della nebulosa e il suo diametro lineare nel febbraio 2017 in km e in UA.

Soluzione

Il tempo t tra la prima e la seconda osservazione vale:

$$t = 45 \text{ anni} \simeq 45 \cdot 365.256 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \simeq 1.42 \cdot 10^9 \text{ s}$$

Poiché l'espansione è isotropa e con velocità v costante, l'aumento ΔR del raggio della nebulosa planetaria è stato di:

$$\Delta R = v \cdot t \simeq 17.0 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 1.42 \cdot 10^9 \text{ s} \simeq 2.41 \cdot 10^{10} \text{ km}$$

Nello stesso tempo l'aumento di dimensioni angolari $\Delta \alpha$ è stato di:

$$\Delta \alpha = \alpha_{2017} - \alpha_{1972} \simeq 40''.0 - 34''.0 \simeq 6''.0 \simeq 1^{\circ}.7 \cdot 10^{-3}$$

La distanza d per cui a una variazione lineare ΔR corrisponde una variazione angolare $\Delta \alpha$ è:



$$d = \frac{\Delta R}{\tan \Delta \alpha} \simeq \frac{2.41 \cdot 10^{10} \text{ km}}{\tan 1^{\circ}.7 \cdot 10^{-3}}$$

$$d \simeq 8.0 \cdot 10^{14} \text{ km} \simeq 85 \text{ a. l.} \simeq 26 \text{ parsec}$$

Poiché le dimensioni angolari del raggio della nebulosa nel 2017 valevano:

$$\alpha_{2017} = 40''.0 \approx 1^\circ.11 \cdot 10^{-2}$$

nota la distanza della nebulosa ne ricaviamo il diametro **D** nel 2017 dalla relazione:

$$D_{2017} = 2 \cdot d \cdot \tan \alpha \approx 2 \cdot 8.0 \cdot 10^{14} \text{ km} \cdot \tan 1^\circ.11 \cdot 10^{-2} \approx 3.1 \cdot 10^{11} \text{ km} \approx 2.1 \cdot 10^3 \text{ UA}$$

12. La stazione spaziale Internazionale (ISS) orbita intorno alla Terra su un'orbita circolare con una velocità di 7.66 km/s. La ISS diventa ben visibile a occhio nudo anche nei centri abitati (magnitudine ≤ 0) quando la sua altezza sull'orizzonte è maggiore di 10° . Considerando un osservatore posto al livello del mare che vede passare la ISS allo zenith, quanto vale la distanza tra la ISS e l'osservatore nel momento in cui la ISS si trova 10° sopra l'orizzonte? Quanto dura la visibilità della ISS per un'altezza sull'orizzonte maggiore di 10° ? Si trascuri la rotazione della Terra.

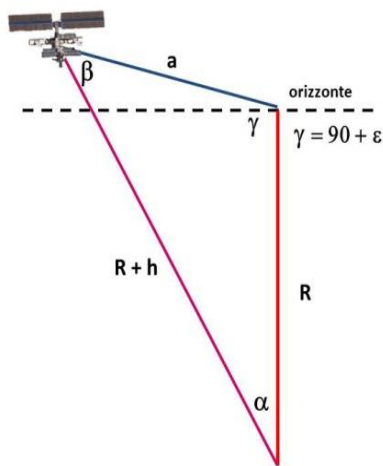
Soluzione

Poiché la ISS è in orbita circolare stabile, la sua velocità è pari alla prima velocità cosmica. Detti V_{ISS} il modulo della velocità orbitale, h l'altezza sulla superficie, M e R la massa e il raggio della Terra, si ha:

$$V_{ISS} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R+h}}$$

da cui ricaviamo:

$$h = \frac{G \cdot M}{V_{ISS}^2} - R \approx \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{5.87 \cdot 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} - 6378 \text{ km} \approx 415 \text{ km}$$



La configurazione descritta nel problema è schematizzata nella figura a sinistra, dove a è la distanza della ISS dall'osservatore quando la sua altezza sull'orizzonte è di 10° . Poiché a 10° sull'orizzonte la rifrazione è di circa $5'$, detta ϵ l'altezza sull'orizzonte della ISS, si osserverà la ISS ad un valore di 10° quando:

$$\epsilon = 10^\circ - 5' \approx 9^\circ 55' = 9^\circ.92$$

da cui:

$$\gamma = 90^\circ + \epsilon = 99^\circ.92$$

Dal teorema dei seni sappiamo che:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{R+h}{\sin \gamma} = \frac{R}{\sin \beta}$$

Considerando il secondo e il terzo termine si ha:

$$\beta = \arcsin \frac{R \cdot \sin 99^\circ.92}{R+h} \approx \arcsin \frac{6283}{6793} \approx 67^\circ.65$$

e quindi:

$$\alpha = 180^\circ - 67^\circ.65 - 99^\circ.92 \approx 12^\circ.43$$

Possiamo ricavare il valore della distanza a :

$$a = \frac{R \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} \approx 1480 \text{ km}$$

Il periodo di rivoluzione T della ISS è dato dalla relazione:

$$T = \frac{2 \pi (R+h)}{V_{ISS}} \approx \frac{2 \pi \cdot 6793 \cdot 10^3 \text{ m}}{7.66 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 5570 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 32.8 \text{ m}$$

Detto T_{10} il tempo per cui la ISS rimane visibile 10° sopra l'orizzonte, per un passaggio zenitale vale la proporzione:

$$T : 360^\circ = T_{10} : 2\alpha$$

da cui si ricava:

$$T_{10} = \frac{2\alpha \cdot T}{360^\circ} \simeq \frac{24^\circ \cdot 86 \cdot 5570 \text{ s}}{360^\circ} \simeq 385 \text{ s} \simeq 6 \text{ m } 25 \text{ s}$$

13. Volete costruire un telescopio, dotato di un sistema di ottica adattiva per osservazioni a 5500 \AA , per fotografare sulla superficie della Luna i resti dei moduli di allunaggio (LEM) utilizzati dagli astronauti delle missioni Apollo. La parte inferiore dei LEM aveva un diametro di circa 4.5 m . Che diametro dovrà avere il vostro telescopio? Sapete suggerire una soluzione più "economica" per realizzare queste foto?

Soluzione

L'ottica adattiva permette di annullare quasi completamente gli effetti della turbolenza dell'atmosfera terrestre, permettendo quindi di sfruttare il potere risolutivo teorico di un telescopio. Nel nostro caso, detto d il diametro dei LEM e a_L il semiasse maggiore dell'orbita della Luna, il potere risolutivo α dovrà essere almeno pari a:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{d}{a_L}\right) = \arctan\left(\frac{4.5 \text{ m}}{384.4 \cdot 10^6 \text{ m}}\right) \simeq 6^\circ \cdot 7 \cdot 10^{-7} \simeq 2'' \cdot 4 \cdot 10^{-3}$$

La relazione che fornisce il potere risolutivo α in secondi d'arco di un telescopio con apertura D che osserva alla lunghezza d'onda λ è:

$$\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D} 206265''$$

E quindi ponendo $\alpha = 2'' \cdot 4 \cdot 10^{-3}$ ricaviamo l'apertura minima del telescopio:

$$D = 1.22 \frac{\lambda}{\alpha} 206265'' \simeq \frac{1.22 \cdot 5500 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot 206265''}{2'' \cdot 4 \cdot 10^{-3}} \simeq 58 \text{ m}$$

Si tratterebbe del più grande telescopio mai realizzato, assai più grande del telescopio ELT dell'ESO attualmente in fase di costruzione (<https://elt.eso.org/>) e il cui costo finale si stima dell'ordine di 1.3 miliardi di euro. Per fotografare i resti delle missioni Apollo è molto più economico inviare dei satelliti in orbita bassa attorno alla Luna, come il Lunar Reconnaissance Orbiter della NASA, il cui costo è stato circa un terzo rispetto a quello di ELT, che ha fotografato con grande dettaglio i siti degli allunaggi (con tanti saluti ai teorici del complotto...).

14. ζ Boötis è una binaria visuale, situata alla distanza di 180 anni luce dal Sistema Solare, composta da 2 stelle identiche. La magnitudine apparente totale della binaria è 3.79 , la separazione angolare tra le due componenti viste dalla Terra è $1.2''$. Questo sistema è osservato alla lunghezza d'onda $\lambda = 5500 \text{ \AA}$.

1. Che diametro minimo deve avere un telescopio per riuscire a risolvere il sistema binario?
2. Se la lunghezza focale del telescopio è 1 m e il potere risolutivo dell'occhio umano è $2'$, calcolare il valore massimo e minimo della lunghezza focale degli oculari che permettono di distinguere le due componenti;
3. Quanto vale la magnitudine assoluta di ciascuna delle due stelle del sistema binario?

Soluzione.

1. Poiché la separazione angolare tra le due stelle è maggiore del valore medio del seeing (circa $1''$) che si registra in buona parte delle località sulla superficie della Terra, possiamo affermare che le due stelle possono essere "risolte". La risoluzione θ in secondi d'arco di un telescopio di apertura D per osservazioni alla lunghezza d'onda λ vale:

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \cdot 206265''$$

Il telescopio dovrà avere quindi un diametro minimo D_{Min} pari a:

$$D_{Min} = 1.22 \frac{\lambda}{\theta} 206265'' = \frac{1.22 \cdot 5500 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot 206265''}{1.2''} \approx 0.12 \text{ m} = 12 \text{ cm}$$

2. Il rapporto tra la focale F del telescopio e quella f dell'oculare utilizzato, fornisce l'ingrandimento I :

$$I = \frac{F}{f}$$

Il minimo ingrandimento I_{min} dell'immagine del sistema binario che permette al nostro occhio di risolvere le due componenti è dato dalla relazione:

$$I_{min} = \frac{\text{risoluzione occhio}}{\text{separazione angolare}} = \frac{2'}{1.2''} = \frac{120''}{1.2''} = 100$$

Per ottenere tale ingrandimento la focale massima f_{max} dell'oculare da utilizzare deve quindi essere pari a:

$$f_{max} = \frac{F}{I_{min}} = \frac{1000 \text{ mm}}{100} = 10 \text{ mm}$$

Con oculari di focale minore otteniamo ingrandimenti maggiori, ma occorre ricordare che nella pratica delle osservazioni visuali non è mai conveniente utilizzare un ingrandimento maggiore di un valore all'incirca pari all'apertura del telescopio espressa in mm, che nel caso in esame vale quindi circa 120. Detto quindi I_{max} il massimo ingrandimento utilizzabile, otteniamo il valore minimo f_{min} per la focale dell'oculare:

$$f_{min} \approx \frac{F}{I_{max}} \approx \frac{1000 \text{ mm}}{120} \approx 8.3 \text{ mm}$$

3. Poiché le due componenti di ζ Boötis hanno magnitudini apparenti m identiche, dalla relazione che fornisce la magnitudine totale di un sistema, detta m_{tot} la magnitudine della binaria otteniamo:

$$m_{tot} = -2.5 \cdot \log (10^{-0.4m} + 10^{-0.4m}) = -2.5 \cdot \log (2 \cdot 10^{-0.4m}) =$$

$$= -2.5 \cdot \log 2 - 2.5 \cdot \log (10^{-0.4m})$$

$$m_{tot} + 2.5 \cdot \log 2 = m$$

$$m \approx m_{tot} + 0.75 \approx 3.79 + 0.75 \approx 4.54$$

Data la magnitudine apparente di ciascuna delle due componenti, calcoliamo la loro magnitudine assoluta M , esprimendo la distanza d in parsec, dalla relazione:

$$M = m + 5 - 5 \log d \approx 4.54 + 5 - 5 \log \left(\frac{180 \text{ anni luce}}{3.2616 \frac{\text{anni luce}}{\text{parsec}}} \right) \approx 0.83$$

15. Osservate Marte in “Grande Opposizione” con un telescopio riflettore f/8 con apertura 40.0 cm. Quanto valgono il diametro angolare apparente di Marte e le sue dimensioni lineari sul piano focale del telescopio?

Soluzione.

La caratteristica f/n di un telescopio indica che la focale F del telescopio è n volte maggiore dell'apertura D , quindi per il telescopio utilizzato sarà:

$$F = D \cdot n = 40.0 \text{ cm} \cdot 8 = 320 \text{ cm} = 3.20 \text{ m}$$

Una “Grande Opposizione” è un'opposizione in cui la Terra si trova in prossimità dell'afelio e contemporaneamente Marte si trova in prossimità del perielio. Dette D_{TA} e D_{MP} le distanze dal Sole della

Terra all'afelio e di Marte al perielio e \mathbf{a}_T , \mathbf{e}_T , \mathbf{a}_M ed \mathbf{e}_M i semiassi maggiori e le eccentricità delle orbite della Terra e di Marte, per la distanza D_{TM-GO} Terra-Marte in una Grande Opposizione otteniamo:

$$D_{TM-GO} = D_{MP} - D_{TA} = a_M (1 - e_M) - a_T (1 + e_T)$$

$$D_{TM-GO} \approx 227.9 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot (1 - 0.09337) - 149.6 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot (1 + 0.01673) \approx 5.452 \cdot 10^7 \text{ km}$$

A questa distanza, detto R_M il suo raggio, il diametro apparente di Marte α sarà dato dalla relazione:

$$\alpha = 2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{R_{Marte}}{D_{TM-GO}} \right) \approx 2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{3397 \text{ km}}{5.452 \cdot 10^7} \right) \approx 7^\circ.140 \cdot 10^{-3} \approx 25''.70$$

Le sue dimensioni lineari \mathbf{d} sul piano focale del telescopio saranno:

$$\mathbf{d} = F \cdot \tan \alpha \approx 320 \text{ cm} \cdot \tan (7^\circ.140 \cdot 10^{-3}) \approx 0.40 \text{ mm}$$

Nota: la circostanza descritta nella soluzione richiede l'allineamento tra le linee degli apsid dei due pianeti. Attualmente le linee degli apsid di Marte e della Terra formano un angolo di circa 24° e quindi non si può avere una opposizione di Marte con la Terra all'afelio e Marte contemporaneamente al perielio. Tuttavia, poiché le linee degli apsid precedono con periodi diversi, la situazione descritta nel problema potrà verificarsi in futuro.

16. Il Telescopio Spaziale Hubble ha uno specchio con diametro di 2.4 m e orbita attorno alla Terra a un'altezza sulla superficie di 539 km. Stimate le dimensioni minime di un corpo che HST è capace di distinguere sulla superficie della Terra osservando alla lunghezza d'onda di 5500 Å.

Soluzione

Detto D_{HST} il diametro del suo specchio, il potere risolutivo teorico α_{HST} di HST in secondi d'arco alla lunghezza d'onda λ è dato dalla relazione:

$$\alpha_{HST} = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D_{HST}} \cdot 206265'' \approx 1.22 \cdot \frac{5500 \cdot 10^{-10} \text{ m}}{2.4 \text{ m}} \cdot 206265'' \approx 0''.058 \approx 1^\circ.6 \cdot 10^{-5}$$

Questo potere risolutivo consentirebbe a HST, che orbita all'altezza $h_{HST} = 539 \text{ km}$, di distinguere sulla superficie della Terra oggetti con dimensioni minime \mathbf{d}_t :

$$\mathbf{d}_t = h_{HST} \cdot \tan \alpha_{HST} = 539 \text{ km} \cdot \tan (1^\circ.6 \cdot 10^{-5}) \approx 15 \text{ cm}$$

Tuttavia, se puntato verso la superficie della Terra HST subirà gli effetti dell'atmosfera, proprio come se osservasse verso lo spazio dalla superficie. Quindi il suo potere risolutivo effettivo α_{eff} sarà limitato dagli effetti dell'atmosfera terrestre e sarà dell'ordine di $1''$, consentendogli quindi di distinguere oggetti con dimensioni minime \mathbf{d}_{eff} :

$$\mathbf{d}_{\text{eff}} = h_{HST} \cdot \tan \alpha_{\text{eff}} = 539 \text{ km} \cdot \tan (2^\circ.8 \cdot 10^{-4}) \approx 2.6 \text{ m}$$

17. È stato osservato il transito di un pianeta extrasolare in orbita attorno a una stella di tipo solare. La variazione massima di magnitudine è stata di 0.010. Sapendo che la massa del pianeta è di $1.80 \cdot 10^{27} \text{ kg}$, stimate il raggio del pianeta, la sua densità e deducete se è di tipo gassoso o roccioso. Considerando che le migliori misure fotometriche da Terra hanno una precisione dell'ordine di 0.002 magnitudini, stimate le dimensioni del più piccolo pianeta extrasolare osservabile dalla Terra attorno a una stella di tipo solare.

Soluzione

Detto R_p il raggio di un pianeta che transita davanti a una stella di raggio R_s , L_s la luminosità della stella e L_{tr} la luminosità del sistema stella-pianeta durante il transito, per la variazione massima di magnitudine Δm vale la relazione:

$$\Delta m = -2.5 \log \frac{L_{tr}}{L_s} = -2.5 \log \frac{R_s^2 - R_p^2}{R_s^2} = -2.5 \log \left(1 - \frac{R_p^2}{R_s^2} \right)$$

$$\frac{R_p^2}{R_s^2} = 1 - 10^{-\frac{\Delta m}{2.5}} \quad R_p = R_s \cdot \sqrt{1 - 10^{-\frac{\Delta m}{2.5}}}$$

Quindi nel caso in esame, poiché il raggio della stella è pari a quello R_\odot del Sole, avremo:

$$R_p \approx R_\odot \cdot \sqrt{1 - 10^{-\frac{0.010}{2.5}}} \approx 6.955 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \sqrt{0.0092} \approx 6.7 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Si tratta quindi di un pianeta con dimensioni paragonabili a quelle di Giove.

Detti M la massa e V il volume del pianeta, la sua densità ρ è pari a:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R_p^3} \approx \frac{3 \cdot 1.80 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{4\pi \cdot 3.0 \cdot 10^{23} \text{ m}^3} \approx 1.4 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 1.4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Poiché massa, raggio e densità sono molto simili a quelle di Giove ($\rho_{\text{Giove}} \approx 1.33 \text{ g/cm}^3$) possiamo dedurre che si tratta di un pianeta gassoso.

Il raggio del più piccolo pianeta osservabile dalla superficie della Terra con il metodo dei transiti R_{\min} si può ricavare dalla relazione trovata per R_p , assumendo $\Delta m = \Delta m_{\min} \approx 0.002$.

Il valore dipende dal raggio della stella e per una stella con raggio pari a quello del Sole si ha:

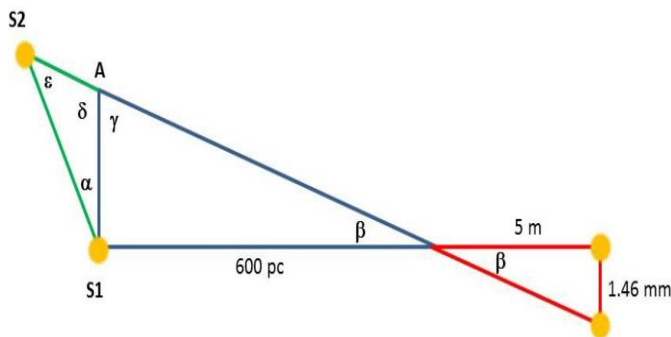
$$R_{\min} = R_\odot \cdot \sqrt{1 - 10^{-\frac{\Delta m_{\min}}{2.5}}} \approx R_\odot \cdot \sqrt{0.002} \cdot 6.955 \cdot 10^5 \text{ km} \approx 3 \cdot 10^4 \text{ km}$$

ovvero un pianeta poco più grande di Urano.

Nota: per valori di $\Delta m < 0.010$ l'espressione esatta per il calcolo del raggio del raggio utilizzata in questo problema viene spesso sostituita con la più semplice relazione approssimata: $R_p = R_s \cdot \sqrt{\Delta m}$.

18. Sul piano focale di un telescopio con focale di 500 cm, le due componenti di una binaria visuale distano tra di loro 1.46 mm. Sappiamo che una delle due stelle dista dal Sole 600 pc e che il piano orbitale della binaria forma un angolo di 30° (con la seconda stella a distanza maggiore della prima) con la perpendicolare alla direzione di osservazione. Calcolare la distanza tra le due stelle della binaria.

Soluzione



La configurazione descritta nel problema è rappresentata nella figura (non in scala) qui a sinistra, dove le due stelle sono indicate con $S1$ e $S2$. Detta F la focale del telescopio e d la distanza delle due stelle sul piano focale, la distanza angolare β osservata è data dalla relazione:

$$\beta = \arctg \frac{d}{F} \approx \arctg \frac{1.46 \text{ mm}}{5000 \text{ mm}} \approx \approx 1^\circ.67 \cdot 10^{-2} \approx 60''.2$$

Detta D la distanza della stella $S1$, la distanza $S1-A$ vale:

$$S1 - A = D \cdot \tan \beta \approx \approx 600 \text{ pc} \cdot \tan(1^\circ.67 \cdot 10^{-2}) \approx 600 \text{ pc} \cdot 2.92 \cdot 10^{-4} \approx 0.175 \text{ pc} \approx 5.41 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

Per ricavare la distanza $S1-S2$, il triangolo $S1-S2-A$ si può risolvere con il teorema dei seni, ma essendo:

$$\delta = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 180^\circ + 90^\circ + \beta \approx 90^\circ 1'$$

possiamo approssimarlo a un triangolo rettangolo (il disegno non è in scala) per cui:

$$S1 - S2 = \frac{S1 - A}{\cos \alpha} \approx \frac{5.41 \cdot 10^{12} \text{ km}}{\cos 30^\circ} \approx 6.25 \cdot 10^{12} \text{ km} \approx 4.17 \cdot 10^4 \text{ UA}$$

19. Il VLT dell'ESO è formato da quattro telescopi, ognuno con uno specchio con diametro di 8.2m, che possono inviare la luce raccolta a un fuoco comune. Supponete che il VLT fotografi una stella di magnitudine 23.0. Quanti fotoni provenienti da questa stella vengono raccolti in totale dai quattro telescopi del VLT ogni secondo? Assumete per i fotoni un'energia media $E = 4.8 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ($\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = \text{W} \cdot \text{s}$).

Soluzione

Consideriamo la differenza tra la magnitudine apparente della stella m_s e quella del Sole m_\odot e ricaviamo il flusso proveniente dalla stella F_s in unità di quello proveniente dal Sole F_\odot :

$$m_s - m_\odot = -2.5 \log \frac{F_s}{F_\odot}$$

da cui si ha:

$$F_s = 10^{\left(\frac{m_\odot - m_s}{2.5}\right)} \cdot F_\odot = 10^{\left(\frac{-26.74 - 23.0}{2.5}\right)} \cdot F_\odot \approx 1.27 \cdot 10^{-20} \cdot F_\odot$$

Detti D la distanza media Terra-Sole, R_\odot e T_\odot il raggio e la temperatura della fotosfera solare, la quantità media di energia F_\odot proveniente dal Sole che arriva ogni secondo su un metro quadrato alla sommità dell'atmosfera della Terra (costante solare) è data dalla relazione:

$$F_\odot = \frac{4 \pi \cdot R_\odot^2 \cdot \sigma \cdot T_\odot^4}{4 \pi \cdot D^2} \approx \frac{4.837 \cdot 10^{17} \text{ m}^2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot 1.115 \cdot 10^{15} \text{ K}^4}{2.238 \cdot 10^{22} \text{ m}^2} \approx 1366 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

e quindi otteniamo:

$$F_s \approx 1.27 \cdot 10^{-20} \cdot F_\odot \approx 1.73 \cdot 10^{-17} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Poiché l'energia media dei fotoni della stella è $E = 4.8 \cdot 10^{-19} \text{ W} \cdot \text{s}$, otteniamo che il numero n di fotoni in arrivo ogni secondo su una superficie di un metro quadrato è:

$$n = \frac{F_s}{E} \approx \frac{1.73 \cdot 10^{-17} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{4.8 \cdot 10^{-19} \text{ W} \cdot \text{s}} \approx 36 \frac{\text{fotoni}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

L'area complessiva A di raccolta del VLT è data dalla somma delle aree dei quattro specchi con diametro d pari a 8.2 m (ed è equivalente a quella di un singolo specchio con diametro di 16.4 m):

$$A = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \approx 211 \text{ m}^2$$

Il numero totale N dei fotoni raccolti dal VLT sarà quindi:

$$N = n \cdot A \approx 36 \frac{\text{fotoni}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \cdot 211 \text{ m}^2 \approx 7600 \frac{\text{fotoni}}{\text{s}}$$

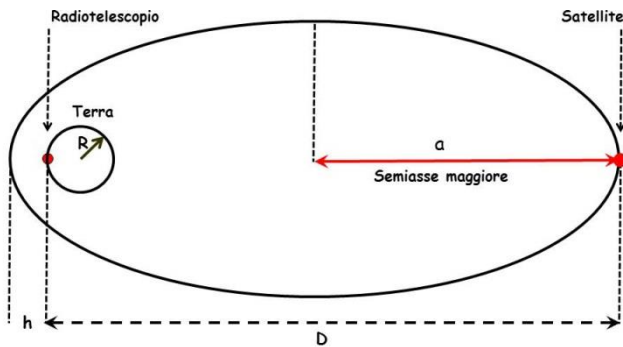
20. Un satellite con a bordo un radiotelescopio da 10.0 m di diametro è stato inserito su un'orbita ellittica intorno alla Terra con periodo di 8.302 giorni e altezza sulla superficie al perigeo di 600 km. Insieme con alcuni radiotelescopi sulla Terra, lavora come un interferometro alla lunghezza d'onda di 1.19 cm. Stimare quale configurazione "satellite + radiotelescopio sulla Terra" permette di ottenere il massimo potere risolutivo e calcolarne il valore. Stimare inoltre il massimo potere risolutivo ottenibile se un oggetto viene osservato nella direzione della linea degli apsi dell'orbita del satellite.

Soluzione

Per osservazioni interferometriche alla lunghezza d'onda λ il potere risolutivo in secondi d'arco α (") è dato dalla relazione:

$$\alpha (") \approx \frac{\lambda}{D} \cdot 206265''$$

dove D è la componente della distanza tra i due telescopi più lontani perpendicolare alla direzione di osservazione.



La configurazione che permette la risoluzione massima si ha osservando oggetti in direzione perpendicolare al piano orbitale del satellite, quando il satellite si trova all'apogeo e si ha un radiotelescopio a Terra dalla parte opposta al satellite lungo la linea degli apsi (vedere il disegno, non in scala, a sinistra). In questo caso la distanza D tra i due strumenti coincide con la componente perpendicolare alla direzione di osservazione ed è data da: $D = 2a - h$, dove a è il semiasse maggiore dell'orbita e h è l'altezza del satellite sulla superficie terrestre al perigeo.

Detta M_T la massa della Terra e P il periodo di rivoluzione del satellite, il semiasse maggiore a dell'orbita del satellite si ricava dalla relazione:

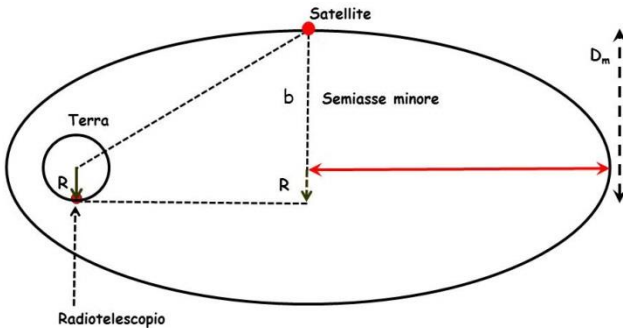
$$a = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot P^2}{4 \pi^2}} \approx \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} kg \cdot 5.145 \cdot 10^{11} s^2}{39.48}} \approx 173.2 \cdot 10^3 km$$

quindi:

$$D = 2a - h \approx 346.6 \cdot 10^3 km - 600 km \approx 345.8 \cdot 10^3 km \approx 345.8 \cdot 10^6 m$$

e il potere risolutivo vale:

$$\alpha \approx \frac{1.19 \cdot 10^{-2}}{345.8 \cdot 10^6 m} \cdot 206265'' \approx 7'' \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 7.10 \mu arcsec$$



Osservando lungo la linea degli apsi, la configurazione che permette la risoluzione massima (vedere il disegno, non in scala, a sinistra) si ha quando il satellite si trova nel punto di intersezione tra il semiasse minore e l'orbita e si ha un radiotelescopio nel punto individuato dalla retta perpendicolare al semiasse maggiore passante per il centro della Terra, dalla parte opposta al satellite. In questo caso le componenti del semiasse minore dell'orbita e del raggio della Terra perpendicolarmente alla linea di osservazione sono entrambe massime.

Detta D_m la distanza tra i due strumenti, si ha: $D_m = b + R$

La distanza d_p del satellite al perigeo vale: $d_p = h + R \approx 600 km + 6378 km \approx 6978 km$

Dalle proprietà dell'ellisse sappiamo che la distanza tra il fuoco e il punto di intersezione tra il semiasse maggiore e l'orbita è pari al semiasse maggiore (ricordiamo che il disegno mostrato non è in scala) e quindi:

$$b = \sqrt{a^2 - (a - d_p)^2} = \sqrt{2 a d_p - d_p^2} \approx 4.867 \cdot 10^4 km \approx 48670 km$$

e il potere risolutivo α_1 in questa configurazione vale:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{D_m} 206265'' \approx \frac{1.19 \cdot 10^{-2}}{55.05 \cdot 10^6 m} 206265'' \approx 4'' \cdot 46 \cdot 10^{-5} = 44.6 \mu arcsec$$