

Campionati Italiani di Astronomia  
 Corso di preparazione alla Finale Nazionale



Categorie Senior/Master - Lezione 1

1. Calcolate il più breve periodo di rotazione che un pianeta con densità media pari a quella della Terra può avere affinché un corpo all'equatore non sia espulso a causa della forza centrifuga.

**Soluzione**

Il valore massimo del modulo della velocità di rotazione  $v_r$  per il quale l'attrazione gravitazionale è ancora in grado di trattenere i corpi all'equatore di un pianeta è pari alla prima velocità cosmica. Detto  $R$  il raggio del pianeta,  $M$  la sua massa e  $\rho$  la sua densità si ha:

$$v_r = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{4\pi\rho GR^2}{3}}$$

Poiché la densità  $\rho$  del pianeta è pari a quella della Terra, detti  $M_T$  e  $R_T$  massa e raggio della Terra avremo:

$$\rho = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3}$$

Detto  $T$  il periodo di rotazione, si ha:

$$T = \frac{2\pi R}{v_r} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot M_T}}$$

$$\approx \sqrt{\frac{39.48 \cdot 2.595 \cdot 10^{20} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} \approx 5070 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 24 \text{ m } 30 \text{ s}$$

2. Calcolate il periodo di rivoluzione e il modulo della velocità tangenziale di un corpo che si muove su un'orbita circolare a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi di un buco nero con massa pari a 2.51 masse solari.

**Soluzione**

Dette  $M_{\text{BN}}$  e  $M_{\odot}$  le masse del buco nero e del Sole, il "Raggio di Schwarzschild"  $R_s$  del buco nero vale:

$$R_s = \frac{2GM_{\text{BN}}}{c^2} = \frac{2G \cdot 2.51 \cdot M_{\odot}}{c^2} \approx$$

$$\approx \frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 4.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{8.988 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 7410 \text{ m} = 7.41 \text{ km}$$

Detto  $a$  ( $= R_s + 10 \text{ km}$ ) il raggio dell'orbita, dalla III Legge di Keplero il periodo di rivoluzione  $T$  vale:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G \cdot 2.51 \cdot M_{\odot}}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 5.277 \cdot 10^{12} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 4.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}} \approx 7.91 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Con tale periodo il modulo  $v$  della velocità tangenziale vale:

$$v = \frac{2 \pi a}{T} = \frac{109.4 \text{ km}}{7.91 \cdot 10^{-4} \text{ s}} \approx 138 \cdot 10^3 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 0.461 c$$

**Nota.**

Nella soluzione stiamo assumendo che le leggi di Keplero siano valide a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi del buco nero. La soluzione rigorosa del problema richiede l'uso di relazioni derivate dalla teoria della Relatività Generale.

3. Intorno a una stella a 10 anni luce dal Sole è stato scoperto un pianeta di massa  $6.5 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , che percorre intorno a essa, in 20 anni, un'orbita circolare il cui piano è perpendicolare alla direzione di osservazione e il cui raggio sottende un angolo di  $4''.89$ . Si calcoli la massa della stella in unità di masse solari e quanto varrebbe il periodo di rivoluzione del pianeta se orbitasse intorno al Sole.

**Soluzione**

Poiché il piano dell'orbita è perpendicolare alla direzione di osservazione, detta  $D$  la distanza della stella dal Sole, il valore del raggio dell'orbita  $a$  si ricava dalla relazione:

$$a = D \cdot \tan \alpha \approx 9460.7 \cdot 10^{10} \text{ km} \cdot \tan \left( \frac{4''.89}{3600} \right) \approx 224 \cdot 10^7 \text{ km}$$

Detti  $M_S$  e  $M_P$  le masse della stella e del pianeta e  $T$  il periodo orbitale del pianeta, dalla III Legge di Keplero ricaviamo:

$$M_S + M_P = \frac{4 \pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} = \frac{39.48 \cdot 1.12 \cdot 10^{37} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 3.98 \cdot 10^{17} \text{ s}} \approx 1.66 \cdot 10^{31} \text{ kg}$$

Poiché la massa del pianeta è trascurabile rispetto a tale valore, il risultato corrisponde alla massa della stella e in masse solari si ha:

$$M_S \approx 1.66 \cdot 10^{31} \text{ kg} \approx 8.35 M_\odot$$

Il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta in unità astronomiche vale:

$$a \approx 224 \cdot 10^7 \text{ km} \approx 15.0 \text{ UA}$$

Quindi il periodo di rivoluzione  $T_S$  del pianeta attorno al Sole in anni varrebbe:

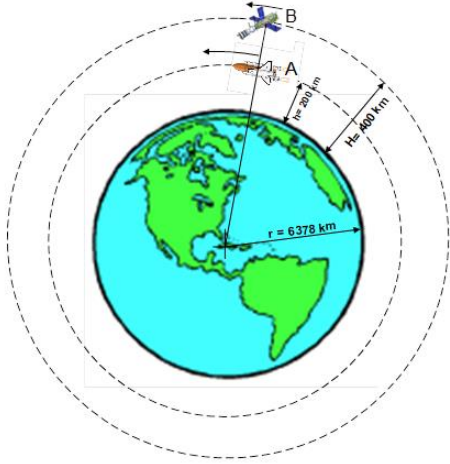
$$T_S = \sqrt{a^3} \approx 58 \text{ anni}$$

**Nota.**

Dallo studio della struttura ed evoluzione stellare sappiamo che la massa minima di una stella che “brucia” idrogeno nel nucleo è:  $M_{S\text{-minima}} \approx 0.08 \cdot M_\odot \approx 1.59 \cdot 10^{29} \text{ kg} \approx 24 \cdot 10^3 M_P$ . Esistono anche degli oggetti molto particolari, le “Brown Dwarf”, una sorta di “stelle mancate” che bruciano deuterio nel loro nucleo, la cui massa minima è di circa:  $M_{BD} \approx 0.012 \cdot M_\odot \approx 2.4 \cdot 10^{28} \text{ kg} \approx 3.7 \cdot 10^3 M_P$ . Quale che sia la natura dell'oggetto attorno a cui è stato scoperto il pianeta, l'approssimazione  $M_S + M_P \approx M_S$  risulta giustificata.

4. Due stazioni spaziali A e B sono in orbita polare circolare attorno alla Terra. La prima stazione orbita a un'altezza di 200 km sulla superficie, la seconda a 400 km di altezza. Le due orbite giacciono sullo stesso piano e sono percorse nello stesso verso. Calcolate l'intervallo di tempo tra due allineamenti consecutivi “Centro della Terra - stazione A - stazione B”.

## Soluzione



Dette  $h$  e  $H$  le altezze delle due stazioni dalla superficie,  $M_T$  e  $r$  la massa e il raggio della Terra, i periodi orbitali delle due stazioni  $P_A$  e  $P_B$  valgono

$$P_A = \sqrt{\frac{4 \pi^2 \cdot (r + h)^3}{G \cdot M_T}} \approx \sqrt{\frac{39.48 \cdot 2.85 \cdot 10^{20} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} \approx \sqrt{28.2 \cdot 10^6 \text{ s}^2} \approx 5.31 \cdot 10^3 \text{ s} = 5310 \text{ s} \approx 88.5 \text{ minuti} \approx 1 \text{ h } 28.5 \text{ m}$$

$$P_B = \sqrt{\frac{4 \pi^2 \cdot (r + H)^3}{G \cdot M_T}} \approx \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.11 \cdot 10^{20} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} \approx \sqrt{30.8 \cdot 10^6 \text{ s}^2} \approx 5.55 \cdot 10^3 \text{ s} = 5550 \text{ s} \approx 92.5 \text{ minuti} \approx 1 \text{ h } 32.5 \text{ m}$$

Il tempo  $S$  tra due allineamenti consecutivi delle stazioni rispetto al centro della Terra è semplicemente il periodo sinodico della seconda stazione osservata dalla prima.

Detti  $E$  ( $= P_A$ ) e  $P$  ( $= P_B$ ) i periodi orbitali delle due stazioni, vale quindi la relazione:

$$S = \frac{E \cdot P}{|E - P|} \approx \frac{5310 \text{ s} \cdot 5550 \text{ s}}{5550 \text{ s} - 5310 \text{ s}} \approx 1.23 \cdot 10^5 \text{ s} \approx 2.05 \cdot 10^3 \text{ m} \approx 34 \text{ h } 6.56 \text{ m}$$

5. La stella Castore ( $= \alpha$  Gem) ha una parallasse di  $0''.0761$  ed è un sistema binario visuale con periodo di rivoluzione di 306 anni. Il semiasse maggiore dell'orbita delle componenti forma un angolo di  $90^\circ$  rispetto alla direzione di osservazione e le sue dimensioni angolari sono di  $6''.0$ . Determinare la somma delle masse delle due componenti in unità della massa del Sole.

## Soluzione

Detta  $D$  la distanza di Castore dal Sole e  $\pi$  la sua parallasse si ha:

$$D = \frac{1}{\pi} \approx \frac{1}{0''.0761} \approx 13.1 \text{ pc} \approx 4.05 \cdot 10^{14} \text{ km}$$

Possiamo calcolare le dimensioni lineari  $a$  del semiasse maggiore dell'orbita a partire dalle sue dimensioni apparenti  $\beta$ . Poiché il piano dell'orbita è perpendicolare alla direzione di osservazione sarà:

$$a = D \cdot \tan \beta \approx 4.05 \cdot 10^{14} \text{ km} \cdot \tan\left(\frac{6''.0}{3600}\right) \approx 1.2 \cdot 10^{10} \text{ km}$$

Dette  $M$  e  $m$  le masse delle due componenti e  $T$  il periodo di rivoluzione, vale la relazione:

$$M + m = \frac{4 \pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} \approx \frac{39.48 \cdot 1.7 \cdot 10^{39} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 9.33 \cdot 10^{19} \text{ s}^2} \approx 1.1 \cdot 10^{31} \text{ kg} \approx 5.5 M_\odot$$

6. È stato recentemente scoperto un sistema planetario formato da una stella con densità media pari alla densità media del Sole e raggio pari al doppio di quello del Sole, attorno alla quale orbitano due pianeti. Le orbite dei due pianeti sono circolari e giacciono sullo stesso piano, le loro masse sono trascurabili rispetto a quella della stella. Il pianeta più interno, chiamato Vulcano, ha una velocità orbitale di 60.0 km/s. Visto da Vulcano, il pianeta più esterno, chiamato Gaia, ha un periodo sinodico di 883 giorni terrestri. Calcolate:

1. la distanza dalla stella e il periodo orbitale di Vulcano;
2. la distanza dalla stella e il periodo orbitale di Gaia;
3. l'angolo di elongazione massima di Vulcano rispetto alla stella se osservato da Gaia.

### Soluzione

1. Detti  $M_s$  la massa della stella,  $R_s$  il suo raggio,  $V_s$  il suo volume e  $\rho$  la sua densità media, avremo:  $M_s = \rho V_s = \rho \frac{4}{3} \pi R_s^3$ . Consideriamo il rapporto tra la massa della stella e quella del Sole  $M_\odot$ : poiché le densità dei due corpi sono uguali, detto  $R_\odot$  il raggio del Sole avremo:

$$M_s = M_\odot \left( \frac{R_s}{R_\odot} \right)^3 = M_\odot \left( \frac{2 R_\odot}{R_\odot} \right)^3 = 8 M_\odot \approx 8 \cdot 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 1.591 \cdot 10^{31} \text{ kg}$$

Per un'orbita circolare percorsa con velocità  $v$  vale la relazione:  $v = \sqrt{\frac{G M_s}{a}}$ , con  $a$  raggio dell'orbita, da cui otteniamo:

$$a_{\text{Vulcano}} = \frac{G \cdot M_s}{v_{\text{Vulcano}}^2} \approx \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 1.591 \cdot 10^{31} \text{ kg}}{36.0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 2.95 \cdot 10^{11} \text{ m} \approx 2.95 \cdot 10^8 \text{ km}$$

Il periodo di rivoluzione di Vulcano si può ricavare dalla III Legge di Keplero, o a partire dalla sua velocità orbitale:

$$T_{\text{Vulcano}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot a_{\text{Vulcano}}^3}{G \cdot M_s}} \approx \sqrt{\frac{39.48 \cdot 2.57 \cdot 10^{34} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 1.591 \cdot 10^{31} \text{ kg}}} \approx \sqrt{9.55 \cdot 10^{14} \text{ s}^2} \approx 30.9 \cdot 10^6 \text{ s} \\ \approx 8580 \text{ h} \approx 358 \text{ g}$$

$$T_{\text{Vulcano}} = \frac{2\pi \cdot a_{\text{Vulcano}}}{v_{\text{Vulcano}}} \approx \frac{2\pi \cdot 2.95 \cdot 10^{11} \text{ m}}{60.0 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 30.9 \cdot 10^6 \text{ s} \approx 8580 \text{ h} \approx 358 \text{ g}$$

2. Il periodo di rivoluzione di Gaia,  $T_{\text{Gaia}}$ , si può ricavare a partire dal periodo orbitale di Vulcano  $T_{\text{Vulcano}}$  e dal periodo sinodico di Gaia,  $S_{\text{GV}}$ , osservato da Vulcano. Le tre quantità sono legate dalla relazione:

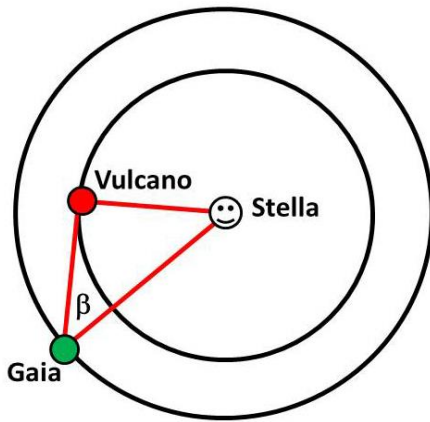
$$\frac{1}{S_{\text{GV}}} = \frac{1}{T_{\text{Vulcano}}} - \frac{1}{T_{\text{Gaia}}} \quad \text{da cui si ricava} \quad \frac{1}{T_{\text{Gaia}}} = \frac{1}{T_{\text{Vulcano}}} - \frac{1}{S_{\text{GV}}}$$

$$\frac{1}{T_{\text{Gaia}}} = \frac{1}{358 \text{ g}} - \frac{1}{883 \text{ g}} \approx 1.66 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{g}} \quad \text{da cui} \quad T_{\text{Gaia}} \approx 602 \text{ g}$$

Noto il periodo di rivoluzione di Gaia possiamo ricavare il raggio della sua orbita dalla III legge di Keplero:

$$a_{\text{Gaia}} = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_s \cdot T_{\text{Gaia}}^2}{4\pi^2}} \approx \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 1.591 \cdot 10^{31} \text{ kg} \cdot 2.71 \cdot 10^{15} \text{ s}^2}{39.48}} \approx 4.18 \cdot 10^{11} \text{ m} \\ = 4.18 \cdot 10^8 \text{ km}$$

3.



Poiché alla massima elongazione la stella e i due pianeti si trovano ai vertici di un triangolo rettangolo (come mostrato nella figura a sinistra), l'angolo Stella-Gaia-Vulcano  $\beta$  sarà dato dalla relazione:

$$\beta = \sin^{-1} \frac{a_{\text{Vulcano}}}{a_{\text{Gaia}}} \simeq \sin^{-1} \frac{2.95 \cdot 10^8 \text{ km}}{4.18 \cdot 10^8 \text{ km}} \simeq 44^\circ 53'$$

7. Il limite inferiore dell'anello D e il limite superiore dell'anello A di Saturno ruotano intorno al pianeta con velocità tangenziali:  $v_D \simeq 23.80 \text{ km/s}$  e  $v_A \simeq 16.65 \text{ km/s}$ . Sapendo che gli anelli sono composti in massima parte da acqua allo stato ghiacciato (per la densità del ghiaccio si assuma  $\rho_g \simeq 920 \text{ kg/m}^3$ ), verificate se gli anelli si trovano all'interno del limite di Roche di Saturno. Considerate accettabile una tolleranza del 10% sui risultati ottenuti.

#### Soluzione

Indicando con  $M_S$  la massa di Saturno, dalla formula della prima velocità cosmica, si ottiene che il limite inferiore dell'anello D e il limite superiore dell'anello A si trovano a distanze  $d_D$  e  $d_A$  dal centro di Saturno rispettivamente pari a:

$$d_D = \frac{G M_S}{v_D^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26} \text{ kg}}{566.4 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \simeq 67.00 \cdot 10^6 \text{ m} = 67.00 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$d_A = \frac{G M_S}{v_A^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26} \text{ kg}}{277.2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \simeq 136.9 \cdot 10^6 \text{ m} = 136.9 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Per gli anelli una buona approssimazione del limite di Roche di Saturno è data dalla relazione:

$$d \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{M_S}{\rho_g}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{5.685 \cdot 10^{26} \text{ kg}}{920 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 129 \cdot 10^6 \text{ m} = 129 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Quindi, considerando le approssimazioni usate e una tolleranza del 10% (pari a circa  $12.9 \cdot 10^3 \text{ km}$ ), possiamo affermare che fino al bordo superiore dell'anello A l'intera struttura degli anelli si trova all'interno del limite di Roche di Saturno.

8. Un orso può correre a una velocità massima di  $9 \text{ m/s}$ . Calcolare le dimensioni minime di un corpo di forma sferica e densità uniforme della fascia di Kuiper dal quale un orso non potrebbe sfuggire.

#### Soluzione

La velocità minima  $V_1$  che consente all'orso di staccarsi dalla superficie di un corpo sferico di raggio  $r_1$  senza ricadere è la prima velocità cosmica, che lo porta in un'orbita circolare e che vale:

$$V_1 = \sqrt{\frac{G M}{r_1}}$$

Detta  $\rho$  la densità di un corpo, la sua massa  $M$  è data da  $\frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ . Quindi il raggio  $r_1$  dell'asteroide vale:

$$r_1 = V_1 \sqrt{\frac{3}{4 \pi G \rho}}$$

La densità dell'asteroide non è data, tuttavia è noto che i corpi della fascia di Kuiper sono composti per la quasi totalità di ghiaccio, e quindi possiamo assumere:  $\rho \approx 920 \text{ kg/m}^3$ , da cui:

$$r_1 = V_1 \sqrt{\frac{3}{4 \pi G \rho}} \approx 9 \frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{3}{4 \pi \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 920 \frac{kg}{m^3}}} \approx 17.7 \cdot 10^3 m = 17.7 \text{ km}$$

Per allontanarsi indefinitamente dall'asteroide la velocità dell'orso deve essere pari alla seconda velocità cosmica  $V_f$  (o velocità di fuga):

$$V_f = \sqrt{\frac{2 G M}{r_2}}$$

da cui si ricava il corrispondente raggio  $r_2$  dell'asteroide:

$$r_2 = V_f \sqrt{\frac{3}{8 \pi G \rho}} \approx 9 \frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{3}{8 \pi \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 920 \frac{kg}{m^3}}} \approx 12.5 \cdot 10^3 m = 12.5 \text{ km}$$

Quindi detto  $r$  il raggio dell'asteroide si hanno tre casi:

$$\begin{aligned} r < 12.5, \text{ km} & \text{ l'orso potrà sfuggire} \\ 12.5 \text{ km} < r < 17.7 \text{ km} & \text{ l'orso entrerà in orbita intorno all'asteroide} \\ r > 17.7 \text{ km} & \text{ l'orso finirà per ricadere sull'asteroide} \end{aligned}$$

#### Nota.

La soluzione numerica di questo problema dipende dalla densità assunta per l'asteroide. Ogni assunzione diversa da quella indicata, purché motivata, è da considerare corretta. Anche la soluzione in cui il raggio è calcolato lasciando la densità come incognita è da considerare corretta, ad esempio:

$$r = 538 \text{ kg}^{\frac{1}{2}} \cdot m^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho \frac{kg}{m^3}}}$$

9. Calcolate la velocità al perielio di un asteroide che ha periodo orbitale di 517.9 giorni ed eccentricità dell'orbita di 0.2080.

#### Soluzione

Esprimendo il periodo orbitale in anni possiamo ricavare il semiasse maggiore dell'orbita dalla relazione:

$$a = \sqrt[3]{\left(\frac{517.9}{365.256}\right)^2} \approx \sqrt[3]{1.418^2} \approx 1.262 \text{ UA} \approx 188.8 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Detta  $M_{\odot}$  la massa del Sole, la velocità media lungo l'orbita  $v_m$  e la velocità al perielio  $v_p$  dell'asteroide sono date dalle relazioni:

$$v_m = \sqrt{\frac{G M_{\odot}}{a}} \approx \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{188.8 \cdot 10^9 m}} \approx 26.52 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v_p = v_m \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \approx 26.52 \sqrt{\frac{1.2080}{0.7920}} \approx 32.75 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

10. Supponete che, improvvisamente, il 5 luglio 2084 la massa del Sole si dimezzi. Verificate se la Terra resterebbe ancora in orbita attorno al Sole.

### Soluzione

La velocità orbitale della Terra  $v_r$  dipende dalla sua distanza  $r$  dal Sole. Detti  $a$  il semiasse maggiore dell'orbita della Terra e  $M_\odot$  la massa del Sole, la velocità media  $v_m$  con cui la Terra si muove intorno al Sole è data dalla relazione (prima velocità cosmica):

$$v_m = \sqrt{\frac{G M_\odot}{a}}$$

A una distanza dal Sole pari ad  $a$ , la velocità  $v_{\text{par}}$  che porterebbe la Terra su un'orbita parabolica (o seconda velocità cosmica) vale:

$$v_{\text{par}} = \sqrt{\frac{2 G M_\odot}{a}}$$

Nel momento in cui la massa del Sole si dimezza, la nuova velocità parabolica  $v_{\text{par-N}}$  vale:

$$v_{\text{par-N}} = \sqrt{\frac{2 G M_{\text{Sole}}}{2 a}} = v_m$$

e sarebbe quindi uguale alla velocità orbitale media quando la massa del Sole è pari al valore attuale. Il 5 luglio la Terra si trova in prossimità dell'afelio e quindi:

$$r > a$$

e si avrebbe:

$$v_r < v_m \quad v_r < v_{\text{par-N}}$$

Ne deduciamo che la Terra continuerebbe a orbitare attorno al Sole.

### Nota.

Allo stesso risultato si può arrivare calcolando l'energia meccanica totale, che con la Terra all'afelio risulta minore di zero (indicando quindi un'orbita ellittica) anche dimezzando la massa del Sole.

11. Il pianeta nano Eris, scoperto nel 2005, si trova attualmente a una distanza dal Sole di 96.0 UA e si sta muovendo a una velocità di 2.32 km/s intorno al Sole. Eris ha una massa di  $1.66 \cdot 10^{22} \text{ kg}$  e un raggio di  $1.160 \cdot 10^3 \text{ km}$ . Due astronauti, entrambi con una massa di  $1.00 \cdot 10^2 \text{ kg}$ , "saltano" con una velocità di 2.23 km/s rispetto a Eris, il primo nella direzione e nel verso del moto orbitale, il secondo in direzione opposta.

- 1) Dimostrate che nessuno dei due astronauti ricadrà sulla superficie di Eris;
- 2) Calcolate chi dei due entrerà in orbita intorno al Sole e chi abbandonerà il sistema Solare.

### Soluzione

1. Detti  $M_E$  e  $R_E$  la massa e il raggio di Eris, la velocità di fuga  $v_f$  dalla sua superficie vale:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 G M_E}{R_E}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 1.66 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{1.160 \cdot 10^6 \text{ m}}} \approx 1.38 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Poiché per entrambi gli astronauti la velocità relativa rispetto alla superficie di Eris è maggiore della velocità di fuga, entrambi si allontaneranno dal pianeta nano senza più ricadere su di esso.

2. Calcoliamo l'energia meccanica totale  $\mathbf{E}_1$  ed  $\mathbf{E}_2$  dei due astronauti, indicando con  $\mathbf{D}_\odot$  la distanza di Eris dal Sole, con  $\mathbf{M}_\odot$  la massa del Sole, con  $\mathbf{m}_A$  la massa degli astronauti, con  $\mathbf{v}_E$  la velocità di Eris attorno al Sole e con  $\mathbf{v}_A$  con la velocità degli astronauti rispetto a Eris. Nel calcolo dell'energia potenziale gravitazionale occorre tener conto sia di quella rispetto al Sole, sia di quella rispetto a Eris:

$$E_1 = \frac{1}{2} m_A (v_E + v_A)^2 - \frac{G M_\odot m_A}{D_\odot} - \frac{G M_E m_A}{R_E}$$

$$E_1 \approx \frac{1}{2} 1.00 \cdot 10^2 \text{ kg} \left( 4.55 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 1.00 \cdot 10^2 \text{ kg}}{96.0 \cdot 149.6 \cdot 10^9 \text{ m}}$$

$$- \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 1.66 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 1.00 \cdot 10^2 \text{ kg}}{1160 \cdot 10^3 \text{ m}}$$

$$E_1 \approx 10.4 \cdot 10^8 \text{ J} - 9.24 \cdot 10^8 \text{ J} - 0.955 \cdot 10^8 \text{ J} \approx 0.2 \cdot 10^8 \text{ J}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m_A (v_E - v_A)^2 - \frac{G M_\odot m_A}{D_\odot} - \frac{G M_E m_A}{R_E}$$

$$E_2 \approx \frac{1}{2} 1.00 \cdot 10^2 \text{ kg} \left( 0.09 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 1.00 \cdot 10^2 \text{ kg}}{96.0 \cdot 149.6 \cdot 10^9 \text{ m}}$$

$$- \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 1.66 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 1.00 \cdot 10^2 \text{ kg}}{1160 \cdot 10^3 \text{ m}}$$

$$E_2 \approx 0.00405 \cdot 10^8 \text{ J} - 9.24 \cdot 10^8 \text{ J} - 0.955 \cdot 10^8 \text{ J} \approx -10.2 \cdot 10^8 \text{ J}$$

Quindi il primo astronauta abbandonerà il sistema solare (perché  $E_1 > 0$ ), mentre il secondo entrerà in orbita attorno al Sole (perché  $E_2 < 0$ ).

#### Nota.

Il valore della massa dell'astronauta non influisce sul risultato finale, in quanto questo dipende solo dal segno dell'energia meccanica, che non cambia al variare della massa, e non dal suo valore.

12. Una massa  $\mathbf{M}$  viene divisa in due parti di massa  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{M-m}$ , che vengono allontanate a una distanza  $\mathbf{d}$ . Trovare il valore di  $\mathbf{m}$  che rende massima la forza gravitazionale tra le due parti.

#### Soluzione

La forza di gravità tra le due masse è data dalla relazione:

$$F = G \frac{m(M-m)}{d^2} = \frac{G}{d^2} (mM - m^2)$$

dove il termine  $\frac{G}{d^2}$  è costante, mentre il termine  $(mM - m^2)$  è una funzione di  $\mathbf{m}$ .

Per determinare il massimo della funzione possiamo usare un criterio algebrico o uno analitico.



$m =$	$F \propto$
$M/8$	$0.109 M^2$
$M/6$	$0.139 M^2$
$M/4$	$0.188 M^2$
$M/2.1$	$0.249 M^2$
$M/2$	$0.250 M^2$
$M/1.9$	$0.249 M^2$
$M/1.5$	$0.222 M^2$
$M/1.3$	$0.178 M^2$
$M/1.2$	$0.139 M^2$

Criterio algebrico:

calcoliamo la forza ponendo  $m = \frac{M}{n}$  per valori decrescenti di  $n$ :

$$F = \frac{G}{d^2} \frac{(n-1) M^2}{n^2}$$

Dai dati riportati nella tabella a sinistra vediamo che la forza sarà massima quando  $n = 2$ , ovvero quando la massa  $M$  è divisa in due parti uguali.

Criterio analitico:

un massimo della funzione  $(mM - m^2)$  si ottiene uguagliando a zero la sua derivata prima:  $\frac{d}{dm} (mM - m^2) = M - 2m = 0$

da cui otteniamo che la forza sarà massima quando:  $m = \frac{M}{2}$ , ovvero quando la massa  $M$  è divisa in due parti uguali.

13. Un'astronave si trova tra la Terra e il Sole nel punto in cui l'attrazione gravitazionale della Terra è un centesimo di quella del Sole. A che distanza dalla Terra si trova e quanto tempo impiegherà un segnale radio per raggiungere i radiotelescopi terrestri? Trascurate gli effetti dovuti al moto di rivoluzione della Terra, gli effetti gravitazionali della Luna e degli altri pianeti, le dimensioni della Terra e considerate la sua orbita circolare.

#### Soluzione

Detta  $d$  la distanza a cui si trova l'astronave dalla Terra,  $M_T$ ,  $M_S$  e  $m_a$  le masse della Terra, del Sole e dell'astronave e  $D$  la distanza Terra-Sole, poiché l'astronave si trova tra la Terra e il Sole nel punto in cui l'attrazione gravitazionale della Terra è 1/100 di quella del Sole si ha:

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m_a}{d^2} = \frac{1}{100} \cdot \frac{G \cdot M_S \cdot m_a}{(D-d)^2}$$

da cui ricaviamo:

$$\frac{D-d}{d} = \sqrt{\frac{M_S}{100 M_T}} \quad \frac{D}{d} - 1 = \sqrt{\frac{M_S}{100 M_T}}$$

e infine:

$$d = \frac{D}{\sqrt{\frac{M_S}{100 M_T}} + 1} \approx \frac{149.6 \cdot 10^6 \text{ km}}{\sqrt{\frac{1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{5.972 \cdot 10^{26} \text{ kg}} + 1}} \approx 2.548 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Per calcolare il tempo  $t$  che un segnale radio impiega per raggiungere i radiotelescopi terrestri, dobbiamo ricordare che i segnali radio sono onde elettromagnetiche e pertanto viaggiano alla velocità della luce  $c$ :

$$t = \frac{d}{c} \approx \frac{2.548 \cdot 10^6 \text{ km}}{299792 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \approx 8.499 \text{ s}$$

14. La Stazione Spaziale Internazionale (ISS) orbita intorno alla Terra su un'orbita circolare a un'altezza sulla superficie di 412 km. Calcolate il valore dell'accelerazione di gravità della Terra a quell'altezza. Perché vediamo gli astronauti a bordo della IIS "fluttuare" come se l'accelerazione di gravità fosse circa zero?

#### Soluzione

Detta  $M$  la massa della Terra ed  $R$  il suo raggio, il valore  $g_h$  dell'accelerazione di gravità a un'altezza  $h$  dalla superficie è dato dalla relazione:

$$g_h = \frac{G \cdot M}{(R+h)^2}$$

In particolare, per  $h = 412$  km avremo:

$$g_{h=412} \approx \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6378 \cdot 10^3 \text{ m} + 412 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 8.65 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Questo valore è solo del 12% circa minore dell'accelerazione di gravità al suolo. L'apparente assenza di gravità deriva dal fatto che tanto la ISS quanto gli astronauti al suo interno sono in orbita ognuno per conto proprio intorno alla Terra, soggetti alla forza di gravità, ma poiché l'accelerazione di gravità non dipende dalla massa dei corpi, essa li costringe a muoversi tutti con la stessa velocità lungo la stessa orbita circolare, e pertanto le loro posizioni reciproche non cambiano. Inoltre, per mantenere la stazione spaziale in orbita senza dover tenere sempre accesi i motori, bisogna darle una opportuna velocità di rivoluzione, che dal punto di vista della stazione spaziale si traduce nell'equilibrio tra la forza centripeta dovuta alla gravità e quella centrifuga dovuta alla rotazione, e la stessa cosa varrà per gli astronauti all'interno. Allora, sempre dal punto di vista della stazione spaziale, gli astronauti risultano fermi in mezzo all'aria (mentre dal punto di vista della Terra, supposta ferma per semplicità, ruotano appunto insieme alla ISS, e l'unica forza agente su tutti è quella centripeta).

15. L'asteroide Pallas ha un raggio medio di 512 km; l'accelerazione di gravità in superficie vale:  $0.210 \text{ m/s}^2$ . Calcolare la densità dell'asteroide in  $\text{kg/m}^3$  e in  $\text{g/cm}^3$  e la velocità di fuga sulla superficie. Calcolare la velocità di impatto con l'asteroide di un corpo di piccola massa lasciato cadere, da fermo, da una distanza di 800 km dalla superficie.

#### Soluzione

Detto  $R$  il raggio, l'asteroide ha un volume  $V$  pari a:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = 5.62 \cdot 10^8 \text{ km}^3 = 5.62 \cdot 10^8 \cdot (10^3 \text{ m})^3 = 5.62 \cdot 10^{17} \text{ m}^3$$

Nota l'accelerazione di gravità alla sua superficie ricaviamo la massa  $M$  e la densità  $\rho$  di Pallas:

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G} \approx \frac{0.210 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2.62 \cdot 10^{11} \text{ m}^2}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}} \approx 8.24 \cdot 10^{20} \text{ kg}$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{8.25 \cdot 10^{20} \text{ kg}}{5.62 \cdot 10^{17} \text{ m}^3} \approx 1.47 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1.47 \cdot 10^3 \cdot \frac{10^3 \text{ g}}{10^6 \text{ cm}^3} = 1.47 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

La velocità di fuga  $v_f$  dall'asteroide vale:

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20} \text{ kg}}{512 \cdot 10^3 \text{ m}}} \approx 463 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.463 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

La distanza  $h$  da cui cade il corpo è dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni di Pallas. Non possiamo quindi applicare le leggi del moto uniformemente accelerato, ma utilizziamo la legge di conservazione dell'energia meccanica. Posto  $H = h + R$  e dette  $v_i$  e  $v_0$  le velocità di impatto e iniziale si ha:

$$\frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{H}$$

da cui, essendo la velocità iniziale nulla, si ricava:

$$v_i = \sqrt{2GM \left( \frac{H-R}{HR} \right)} = \sqrt{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20} \text{ kg} \left( \frac{800 \cdot 10^3 \text{ m}}{6.72 \cdot 10^{11} \cdot \text{m}^2} \right)} \approx 362 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

16. Determinare il semiasse maggiore dell'orbita di un asteroide che, osservato dalla Terra, ha un periodo sinodico pari al suo periodo siderale. Quanto possono valere, al massimo, l'eccentricità dell'orbita e la distanza dell'asteroide dal Sole all'afelio? Si assuma per l'asteroide una densità di  $1470 \text{ kg/m}^3$ .

**Soluzione**

Le relazioni che legano il periodo sinodico  $S$  di un corpo del Sistema Solare osservato dalla Terra con il suo Periodo Siderale  $P$  e con il Periodo Siderale della Terra  $E$  sono:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P} \quad \text{per un corpo con periodo siderale maggiore di quello della Terra}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{E} \quad \text{per un corpo con periodo siderale minore di quello della Terra}$$

Da cui ricaviamo rispettivamente:

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{P} = \frac{1}{E} \quad \text{e} \quad \frac{1}{S} - \frac{1}{P} = -\frac{1}{E}$$

Se  $S = P$  notiamo che l'asteroide non può avere periodo siderale minore di quello della Terra, varrà allora solo la prima relazione da cui si ricava:

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{P} = \frac{1}{E}$$

e infine:

$$P = 2E = 2 \text{ anni}$$

Il semiasse maggiore  $a$  dell'orbita vale quindi:

$$a = \sqrt[3]{P^2} \approx 1.587 \text{ UA} \approx 237.4 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Per ricavare la massima distanza all'afelio  $D_A$  calcoliamo l'eccentricità massima  $e_m$  dell'orbita, considerando che la distanza al perielio  $D_P$  non può essere ovviamente minore del raggio del Sole  $R_\odot$ .

$$D_P = R_\odot = a(1 - e_m)$$

$$e_m = 1 - \frac{R_\odot}{a} \approx 1 - \frac{6.955 \cdot 10^5 \text{ km}}{237.4 \cdot 10^6 \text{ km}} \approx 0.9971$$

da cui si ottiene:

$$D_A = a(1 + e_m) \approx 474.1 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Ma in realtà un asteroide non può avvicinarsi a una distanza dal Sole pari al raggio, perché verrebbe ben prima disgregato dalle forze mareali del Sole. In prima approssimazione, l'effettiva minima distanza al perielio  $D_{PE}$  per l'asteroide è data dalla relazione del limite di Roche:

$$D_{PE} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{M_\odot}{\rho_m}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{1470 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 1.67 \cdot 10^6 \text{ km} \approx 2.4 R_\odot$$

Quindi le effettive eccentricità massima dell'orbita  $e_{me}$  e distanza all'afelio  $D_{AE}$  valgono:

$$e_{me} = 1 - \frac{D_{PE}}{a} \approx 1 - \frac{1.67 \cdot 10^6 \text{ km}}{237.4 \cdot 10^6 \text{ km}} \approx 0.993$$

$$D_{AE} = a(1 + e_{me}) \approx 473 \cdot 10^6 \text{ km}$$

17. La stazione spaziale Endurance del film Interstellar, che si trova nello spazio a grande distanza dalle stelle più vicine, ruota su sé stessa a velocità costante per creare, nella sua parte più esterna, una gravità pari a un terzo di quella presente sulla superficie della Terra. Sapendo che il raggio dell'Endurance è di 298.0 m, calcolate quanti giri su sé stessa effettua ogni ora e quanto vale l'accelerazione di gravità nella sala motori, posta al centro della stazione spaziale.

**Soluzione.**

Per la Endurance possiamo trascurare gli effetti della gravità dovuta alle stelle. Detta  $g_T$  l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra, l'accelerazione di gravità  $g_E$  nella parte più esterna dell'Endurance vale:

$$g_E = \frac{g_T}{3} \approx \frac{9.807 \frac{m}{s^2}}{3} \approx 3.269 \frac{m}{s^2}$$

Detti  $\omega$  la velocità angolare,  $V_T$  la velocità tangenziale e  $r$  il raggio della stazione spaziale, il modulo dell'accelerazione centrifuga  $a_c$  dovuta alla rotazione vale:

$$a_c = g_E = \omega^2 \cdot r = \frac{V_T^2}{r}$$

da cui ricaviamo:

$$V_T = \sqrt{g_E \cdot r} \approx \sqrt{3.269 \frac{m}{s^2} \cdot 298.0 \text{ m}} \approx 31.21 \frac{m}{s}$$

Il periodo di rotazione  $T$  vale:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{V_T} \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot 298.0 \text{ m}}{31.21 \frac{m}{s}} \approx 60 \text{ s} \approx 1 \text{ m}$$

Quindi in un'ora l'Endurance effettua un numero di giri  $N$  su sé stessa pari a:

$$N = \frac{3600 \text{ s}}{60 \text{ s}} = \frac{60 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 60 \text{ giri}$$

Poiché a parità di velocità angolare l'accelerazione centrifuga diminuisce con il raggio, al centro dell'Endurance il raggio da considerare è nullo e avremo quindi:

$$g_E = \omega^2 \cdot r = 0$$

18. La stella Kepler-101 ha due pianeti, Kepler-101b e Kepler-101c. Kepler-101b ha un raggio 0.520 volte quello di Giove e una massa 51.0 volte quella della Terra. Kepler-101c ha un raggio 1.23 volte quello della Terra e una massa  $1.20 \cdot 10^{-2}$  volte quella di Giove. Calcolare:

1. l'accelerazione di gravità alla superficie dei due pianeti;
2. a quale altezza dalla superficie di Kepler-101c si avrà un'accelerazione di gravità pari a quella sulla superficie di Kepler-101b;
3. la densità dei due pianeti, valutando se sono rocciosi o gassosi.

**Soluzione**

1. Detti  $M_T$ ,  $M_G$ ,  $R_T$ , e  $R_G$  le masse e i raggi della Terra e di Giove, l'accelerazione di gravità  $g_b$  e  $g_c$  alla superficie dei due pianeti vale:

$$g_b = \frac{G \cdot 51.0 \cdot M_T}{(0.520 \cdot R_G)^2} \approx \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 51.0 \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(0.520 \cdot 71490 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 14.7 \frac{m}{s^2}$$

$$g_c = \frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{(1.23 \cdot R_T)^2} \approx \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{(1.23 \cdot 6378 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 24.7 \frac{m}{s^2}$$

2. L'accelerazione di gravità  $g_{ch}$  a un'altezza  $h$  sulla superficie di Kepler-101c vale:

$$g_{ch} = \frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{(1.23 \cdot R_T + h)^2}$$

relazione dalla quale, ponendo  $g_{ch} = g_b$ , otteniamo il valore di  $h$  richiesto:

$$h = \sqrt{\frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{g_b} - 1.23 \cdot R_T}$$

$$h \approx \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27} kg}{14.7 \frac{m}{s^2}} - 7.84 \cdot 10^6 m} \approx 2.33 \cdot 10^6 m$$

3. La densità media  $\rho_b$  e  $\rho_c$  dei due pianeti è data dal rapporto tra la loro massa e il loro volume:

$$\rho_b = \frac{3 \cdot 51.0 \cdot M_T}{4 \pi \cdot (0.520 \cdot R_G)^3} \approx \frac{3 \cdot 51.0 \cdot 5.972 \cdot 10^{24} kg}{4 \pi \cdot (0.520 \cdot 71490 \cdot 10^3 m)^3} \approx 1.42 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_c = \frac{3 \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{4 \pi \cdot (1.23 \cdot R_T)^3} \approx \frac{3 \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27} kg}{4 \pi \cdot (1.23 \cdot 6378 \cdot 10^3 m)^3} \approx 1.13 \cdot 10^4 \frac{kg}{m^3}$$

Dalle densità ottenute si deduce che il pianeta Kepler-101b è di tipo gassoso, mentre Kepler-101c è di tipo roccioso. Si consideri infatti che Giove ha una densità media di  $1.33 \cdot 10^3 kg/m^3$ , mentre la densità media della Terra è di  $5.51 \cdot 10^3 kg/m^3$ .

19. Un corpo di piccola massa viene lanciato radialmente verso l'alto dalla superficie di un pianeta, che assumiamo perfettamente sferico e con densità uniforme, con una velocità pari alla metà della velocità di fuga dal pianeta. Calcolare a che distanza dal centro del pianeta la velocità del corpo si annulla. Trovate infine una relazione che leghi la velocità iniziale del corpo con quella di fuga e con l'altezza raggiunta.

### Soluzione

Scriviamo la legge di conservazione dell'energia meccanica indicando con  $R$  il raggio del pianeta di massa  $M$ , con  $m$  la massa del corpo e con  $H$  la distanza dal centro del pianeta in cui la velocità del corpo si annulla.

Poiché la velocità di fuga  $v_f$  è data dalla relazione  $v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ , avremo:

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2GM}{R}} \right)^2 - \frac{GMm}{R} = 0 - \frac{GMm}{H}$$

da cui:

$$\frac{1}{4} \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R} = - \frac{GMm}{H}$$

e quindi:

$$\frac{1}{4R} - \frac{1}{R} = - \frac{1}{H} \quad - \frac{3}{4R} = - \frac{1}{H}$$

e infine:

$$H = \frac{4}{3} R$$

Indichiamo con  $K$  il rapporto tra la velocità  $v$  ( $0 \leq v \leq v_f$ ) del corpo e la velocità di fuga:

$$K = \frac{v}{v_f} \leq 1$$

La legge di conservazione dell'energia meccanica assume la forma:

$$\frac{1}{2} m \left( K \sqrt{\frac{2GM}{R}} \right)^2 - \frac{GMm}{R} = 0 - \frac{GMm}{H}$$

da cui ricaviamo:

$$H = \frac{R}{1 - K^2}$$

**Nota.**

Per  $K = 1/2$  otteniamo il valore:  $H = \frac{4}{3} R$ , se  $v = 0$  avremo  $K = 0$  e quindi  $H=R$ , mentre se  $v = v_f$  avremo  $K=1$  e il corpo raggiungerà una distanza infinita dal pianeta.

20. Si consideri una cometa con un nucleo di forma approssimativamente sferica e raggio di 2 km e con densità media di  $500 \text{ kg/m}^3$  in avvicinamento al pianeta Giove. Si calcoli, approssimativamente, a quale distanza dalla superficie di Giove le forze mareali cominceranno a disgregare il nucleo della cometa.

**Soluzione**

La cometa comincerà ad essere disgregata quando la sua distanza da Giove sarà minore del limite di Roche, il cui valore dipende anche dalla natura del corpo in avvicinamento. La cometa in esame è un corpo poco compatto, come indicato dalla sua densità  $\rho_c$  pari a metà di quella dell'acqua. Detto  $R_c$  il raggio della cometa, la sua massa  $M_c$  vale:

$$M_c = \rho_c \frac{4}{3} \pi R_c^3 \approx 500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4}{3} \pi (2000 \text{ m})^3 \approx 1.68 \cdot 10^{13} \text{ kg}$$

Per un corpo poco compatto, una buona approssimazione del limite di Roche  $d$  per il pianeta Giove, la cui massa indichiamo con  $M_{\text{Giove}}$ , è data dalla relazione:

$$d \approx 2.44 R_c \sqrt[3]{\frac{M_{\text{Giove}}}{M_c}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{M_{\text{Giove}}}{\rho_c}}$$

con  $d$  calcolata rispetto al centro di Giove. Dalla seconda relazione abbiamo:

$$d \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{1.899 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 23.6 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Detto  $R_G$  il raggio di Giove otteniamo che:

$$d \approx 3.3 R_G$$

quindi, la distanza  $D$  dalla superficie di Giove dove le forze mareali cominceranno a disgregare la cometa è:

$$D = d - R_G \approx 2.3 R_G \approx 16.5 \cdot 10^4 \text{ km.}$$