Campionati Italiani di Astronomia
Corso di preparazione alla Finale Nazionale

Categoria Junior 2 - Lezione 1

1. Calcolate il più breve periodo di rotazione che un pianeta con densità media pari a quella della Terra può avere affinché un corpo all'equatore non sia espulso a causa della forza centrifuga.

Soluzione

Il valore massimo del modulo della velocità di rotazione $\boldsymbol{v_r}$ per il quale l'attrazione gravitazionale è ancora in grado di trattenere i corpi all'equatore di un pianeta è pari alla prima velocità cosmica. Detto **R** il raggio del pianeta, **M** la sua massa e $\boldsymbol{\rho}$ la sua densità si ha:

$$v_r = \sqrt{\frac{G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{4\,\pi\,\rho\,G\,R^2}{3}}$$

Poiché la densità $\boldsymbol{\rho}$ del pianeta è pari a quella della Terra, detti $\boldsymbol{M_T}$ e $\boldsymbol{R_T}$ massa e raggio della Terra avremo:

$$\rho = \frac{3\,M_T}{4\,\pi\,{R_T}^3}$$

Detto $\boldsymbol{T}$ il periodo di rotazione, si ha:

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v_r} = \sqrt{\frac{3\,\pi}{\rho\,G}} = \sqrt{\frac{4\,\pi^2\,\cdot\,{R_T}^3}{G\,\cdot\,M_T}}$$

$$\simeq \sqrt{\frac{39.48\,\cdot\,2.595\,\cdot\,10^{20}\,\mathrm{m}^3}{6.674\,\cdot\,10^{-11}\frac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 5.972\,\cdot\,10^{24}\,\mathrm{kg}}} \simeq 5070\,s \simeq 1h\,24m\,30s$$

2. Disegnare sullo stesso grafico le orbite delle comete P/HUSB (e = 0.230) e P/WIFE (e = 0.950) che hanno la stessa linea degli apsidi e distanza all'afelio di 15.02 UA. Sapendo che il 7 aprile 2016 le due comete si trovavano entrambe al perielio, quale sarà, all'incirca, la loro configurazione a fine agosto 2037?

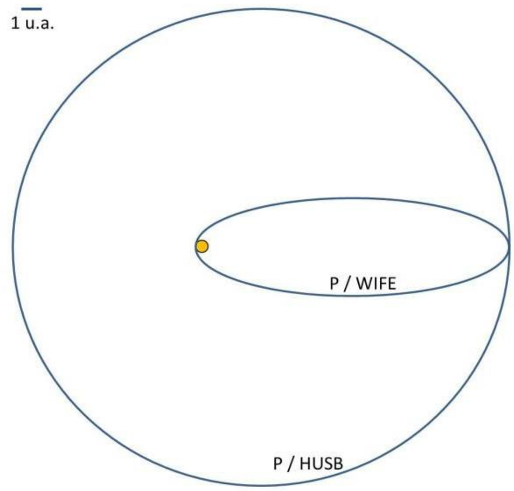
Soluzione

Dette $\boldsymbol{D_P}$ e $\boldsymbol{D_A}$ le distanze al perielio e all'afelio in UA, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ le lunghezze dei semiassi in UA e $\boldsymbol{T}$ il periodo di rivoluzione in anni, dalle relazioni:

$$D_P = D_a\frac{1-e}{1+e} \qquad a = \frac{D_a + D_p}{2} \qquad b = a\sqrt{1-e^2} \qquad T = \sqrt{a^3}$$

otteniamo per le due comete i valori riportati nella seguente tabella:

Nome	D_A	D_P	a	b	e	T
P/HUSB	15.02	9.40	12.2	11.9	0.230	42.6
P/WIFE	15.02	0.385	7.70	2.40	0.950	21.4



Sapendo che le due comete hanno la stessa linea degli apsidi, otteniamo infine il grafico a sinistra, con entrambe le comete al perielio il 7 aprile 2016.

A fine agosto 2037 saranno trascorsi circa 21.4 anni (21 anni + 4.8 mesi), un tempo pari a quello di rivoluzione di P/WIFE e pari a circa la metà di quello di rivoluzione di P/HUSB. Quindi la cometa P/WIFE sarà nuovamente nei pressi del perielio, mentre P/HUSB si troverà nei pressi dell'afelio.

3. Calcolate il valore medio del periodo sinodico della Luna (mese sinodico).

Soluzione
La durata del mese sinodico **S**, ovvero il tempo necessario alla Luna per tornare nella stessa posizione rispetto al Sole (ovvero alla stessa "fase"), si può calcolare a partire dalla durata del mese siderale della Luna ***P*** e dell'anno siderale della Terra ***E***:

$$\frac{1}{\mathrm{S}} = \frac{1}{\mathrm{P}} - \frac{1}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{E} - \mathrm{P}}{\mathrm{P} \cdot \mathrm{E}}$$

da cui otteniamo:

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{P} \cdot \mathrm{E}}{\mathrm{E} - \mathrm{P}} \simeq \frac{27.322 \cdot 365.256}{365.256 - 27.322} \simeq 29.531 \text{ g} \simeq 29 \text{ g } 12 \text{ h } 45 \text{ m}$$

Nota.
Poiché le orbite della Terra e della Luna non sono circolari, la durata del mese sinodico varia da un minimo di circa 29.269 giorni a un massimo di circa 29.840 giorni, ovvero in un intervallo di circa ±7 ore rispetto alla sua durata media.

4. Supponete che la massa del Sole si dimezzi. Nell'ipotesi che restino inalterati il periodo di rotazione della Terra e il semiasse maggiore dell'orbita, da quanti giorni solari medi sarebbe formato un anno? Quanto varrebbero un parsec, un anno luce e il loro rapporto?

Soluzione
Detti $\boldsymbol{a}$ il semiasse maggiore dell'orbita della Terra e $\boldsymbol{M_{N\odot}}$ la nuova massa del Sole, il nuovo periodo di rivoluzione $\boldsymbol{T}$ della Terra varrebbe:

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \, \mathrm{a}^3}{\mathrm{G} \, M_{N\odot}}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.348 \cdot 10^{33} \, m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \, \frac{m^3}{kg \, s^2} \cdot 0.9945 \cdot 10^{30} \text{ kg}}} \simeq 4.463 \cdot 10^7 \, s \simeq 516.5 \, giorni$$

Poiché il semiasse dell'orbita resta invariato, la lunghezza del parsec non cambierebbe, mentre la lunghezza di un anno luce sarebbe:

$$1 \, anno \, luce = velocit\grave{a} \, della \, luce \cdot numero \, di \, secondi \, in \, un \, anno$$

$$1 \, anno \, luce \simeq 299792 \, \frac{km}{s} \cdot 4.463 \cdot 10^7 \, s \simeq 1.338 \cdot 10^{13} \, km$$

e il nuovo rapporto ***K*** parsec/anno luce sarebbe:

$$K = \frac{\text{parsec}}{\text{anno luce}} \simeq \frac{3.0857 \cdot 10^{13}\ \text{km}}{1.338 \cdot 10^{13}\ \text{km}} \simeq 2.306$$

Nota.
Il valore attuale dell'anno luce è definito utilizzando l'Anno Giuliano (=365.25 giorni solari medi), mentre nella soluzione per il suo calcolo si utilizza il nuovo anno siderale, che fornisce comunque una buona approssimazione del valore cercato.

5. Calcolate la velocità orbitale della Terra intorno al Sole al perielio e all'afelio. Trascurate la massa della Terra rispetto a quella del Sole.

Soluzione
Detti $\boldsymbol{M_\odot}$ la massa del Sole, $\boldsymbol{a}$ il semiasse maggiore dell'orbita della Terra e $\boldsymbol{P}$ il periodo di rivoluzione, la media delle velocità della Terra intorno al Sole $\boldsymbol{v_{mT}}$ può essere ricavata con le relazioni:

$$\mathrm{v_{mT}} = \frac{2\,\pi\,a}{P} \simeq \frac{2\,\pi \cdot 149.6 \cdot 10^6\ \text{km}}{3.1558 \cdot 10^7\ s} \simeq 29.79\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$\mathrm{v_{mT}} = \sqrt{\frac{G\,M_\odot}{a}} \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ kg}{149.6 \cdot 10^9\ m}} \simeq 2.979 \cdot 10^4\ \frac{m}{s} = 29.79\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

I due risultati sono ovviamente coincidenti nei limiti di precisione delle grandezze utilizzate.
Detta **e** l'eccentricità dell'orbita della Terra, per le velocità al perielio $\boldsymbol{v_{pT}}$ e all'afelio $\boldsymbol{v_{aT}}$ si ha:

$$\mathrm{v_{PT}} = \mathrm{v_{mT}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \simeq 29.79\ \frac{\text{km}}{\text{s}}\ \sqrt{\frac{1+0.01673}{1-0.01673}} \simeq 30.29\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$\mathrm{v_{aT}} = \mathrm{v_{mT}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \simeq 29.79\ \frac{\text{km}}{\text{s}}\ \sqrt{\frac{1-0.01673}{1+0.01673}} \simeq 29.30\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

6. Schematizzando la Via Lattea come un disco uniforme con un diametro di $1.06 \cdot 10^5$ anni luce e spessore trascurabile, si fornisca una stima della sua massa totale in masse solari, sapendo che il Sole si trova a una distanza dal centro di circa 8.34 kpc e assumendo per l'anno galattico una durata di $233 \cdot 10^6$ anni terrestri. Stimate infine la velocità di fuga dalla Via Lattea a una distanza dal centro pari al doppio del suo diametro.

Soluzione
L'anno galattico $\boldsymbol{T}$ vale:

$$\mathbf{T} \simeq 233 \cdot 10^6 \cdot 365.256 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \simeq 7.35 \cdot 10^{15}\ \text{s}$$

La massa $\boldsymbol{M_g}$ della Via Lattea entro una distanza $\boldsymbol{a}$ di 8.34 kpc ($\simeq 27.2 \cdot 10^3$ anni luce $\simeq 2.57 \cdot 10^{20}$ m) dal centro vale:

$$M_g = \frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} \simeq \frac{39.48 \cdot 1.70 \cdot 10^{61}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\dfrac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5.41 \cdot 10^{31}\ s^2} \simeq 1.86 \cdot 10^{41}\ \text{kg} \simeq 93.5 \cdot 10^9\ M_\odot$$

Avendo schematizzato la Via Lattea come un disco uniforme, la massa è proporzionale all'area del disco. Per ottenere la massa totale $\boldsymbol{M_G}$ della Via Lattea entro il suo raggio $\boldsymbol{R}$ (≃53000 anni luce ≃ 16.2 kpc), possiamo quindi usare la proporzione:

$$M_G : \pi\,R^2 = M_g : \pi\,a^2$$

da cui si ottiene:

$$\mathrm{M_G} = \mathrm{M_g} \left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{a}}\right)^2 \simeq 1.86 \cdot 10^{41}\mathrm{kg} \left(\frac{16.2\ \mathrm{kpc}}{8.34\ \mathrm{kpc}}\right)^2 \simeq 7.06 \cdot 10^{41}\mathrm{kg} \simeq 355 \cdot 10^9\ \mathrm{M}_\odot$$

La velocità di fuga $\boldsymbol{v_f}$ a una distanza $\boldsymbol{d}$ dal centro di un corpo di massa $\boldsymbol{M}$ è data dalla relazione:

$$\mathrm{v_f} = \sqrt{\frac{2\ \mathrm{G\ M}}{\mathrm{d}}}$$

Quindi nel nostro caso detto $\boldsymbol{D}$ il diametro della galassia:

$$\mathrm{v_f} = \sqrt{\frac{2\ \mathrm{G}\ M_G}{2\ \mathrm{D}}} \simeq \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 7.06 \cdot 10^{41}\mathrm{kg}}{2.01 \cdot 10^{21}\ \mathrm{m}}} \simeq 217 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 217\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Nota.
In questa semplice schematizzazione della Via Lattea non si sta tenendo conto degli effetti dovuti alla presenza e alla distribuzione della "materia oscura".

7. Calcolate il periodo di rivoluzione e il modulo della velocità tangenziale di un corpo che si muove su un'orbita circolare a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi di un buco nero con massa pari a 2.51 masse solari.

Soluzione
Dette $\mathbf{M_{BN}}$ e $\mathbf{M}_\odot$ le masse del buco nero e del Sole, il "Raggio di Schwarzschild" $\boldsymbol{R_s}$ del buco nero vale:

$$\mathrm{R_s} = \frac{2\ \mathrm{G\ M_{BN}}}{\mathrm{c}^2} = \frac{2\ \mathrm{G} \cdot 2.51 \cdot \mathrm{M}_\odot}{\mathrm{c}^2} \simeq$$

$$\simeq \frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 4.99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}{8.988 \cdot 10^{16}\ \frac{m^2}{s^2}} \simeq 7410\ \mathrm{m} = 7.41\ \mathrm{km}$$

Detto **a** (= $\boldsymbol{R_s}$+ 10 km) il raggio dell'orbita, dalla III Legge di Keplero il periodo di rivoluzione **T** vale:

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{4\pi^2\ \mathrm{a}^3}{\mathrm{G} \cdot 2.51 \cdot \mathrm{M}_\odot}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 5.277 \cdot 10^{12}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 4.99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}} \simeq 7.91 \cdot 10^{-4}\ s$$

Con tale periodo il modulo **v** della velocità tangenziale vale:

$$\mathrm{v} = \frac{2\ \pi\ \mathrm{a}}{\mathrm{T}} = \frac{109.4\ \mathrm{km}}{7.91 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}} \simeq 138 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \simeq 0.461\ \mathrm{c}$$

Nota: nella soluzione stiamo assumendo che le leggi di Keplero siano valide a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi del buco nero. La soluzione rigorosa del problema richiede l'uso di relazioni derivate dalla teoria della Relatività Generale.

8. Nel 2015 il team internazionale LIGO/VIRGO ha rivelato le onde gravitazionali prodotte dalla fusione di due buchi neri con 29 e 36 volte la massa del Sole, che hanno formato un unico buco nero con 62 volte la massa del Sole. Calcolare:

1. la quantità totale di energia emessa utilizzando la relazione $E = \Delta m\ c^2$;
2. il raggio massimo del buco nero risultante dalla fusione.

Soluzione
Espressa in masse solari $\boldsymbol{M_\odot}$, la massa $\boldsymbol{\Delta m}$ che si trasforma in energia vale:

$$\Delta m = \left(29M_\odot + 36M_\odot\right) - 62M_\odot = 3M_\odot \simeq 3 \cdot 1.989 \cdot 10^{30}kg \simeq 5.967 \cdot 10^{30}kg$$

La massa del buco nero risultante è quindi di $3M_\odot$ minore della somma della massa dei due buchi neri che si sono fusi. La quantità totale di energia **E** emessa nello spazio sotto forma di onda gravitazionale è stata:

$$E = \Delta m \cdot c^2 \simeq 5.967 \cdot 10^{30}kg \cdot 8.988 \cdot 10^{16} \frac{m^2}{s^2} \simeq 5.363 \cdot 10^{47} \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 5.363 \cdot 10^{47}\ \mathrm{J}$$

La velocità di fuga **v** dalla superfice di un corpo di massa **M** e raggio **R** (seconda velocità cosmica) vale:

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2\ \mathrm{G\ M}}{\mathrm{R}}}$$

Nel caso in cui v = c, il corrispondente raggio $\boldsymbol{R_S}$ è detto "raggio di Schwarzschild" e rappresenta il limite (raggio) massimo di un buco nero di massa M (pari a $62M_\odot$ nel nostro caso):

$$R_S = \frac{2 \cdot G \cdot 62\ M_\odot}{c^2} \simeq \frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 1.233 \cdot 10^{32}kg}{8.988 \cdot 10^{16} \frac{m^2}{s^2}} \simeq 183 \cdot 10^3\ m = 183\ km$$

9. Intorno a una stella a 10 anni luce dal Sole è stato scoperto un pianeta di massa $6.5 \cdot 10^{24}\ kg$, che percorre intorno a essa, in 20 anni, un'orbita circolare il cui piano è perpendicolare alla direzione di osservazione e il cui raggio sottende un angolo di 4".89. Si calcoli la massa della stella in unità di masse solari e quanto varrebbe il periodo di rivoluzione del pianeta se orbitasse intorno al Sole.

Soluzione
Poiché il piano dell'orbita è perpendicolare alla direzione di osservazione, detta **D** la distanza della stella dal Sole, il valore del raggio dell'orbita $\boldsymbol{a}$ si ricava dalla relazione:

$$a = D \cdot \tan\alpha \simeq 9460.7 \cdot 10^{10}\ \mathrm{km} \cdot \tan\left(\frac{4''.89}{3600}\right) \simeq 224 \cdot 10^7\ \mathrm{km}$$

Detti $\mathbf{M_S}$ e $\mathbf{M_P}$ le masse della stella e del pianeta e **T** il periodo orbitale del pianeta, dalla III Legge di Keplero ricaviamo:

$$\mathrm{M_S} + \mathrm{M_P} = \frac{4\ \pi^2 \cdot \mathrm{a}^3}{\mathrm{G} \cdot \mathrm{T}^2} = \frac{39.48 \cdot 1.12 \cdot 10^{37}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 3.98 \cdot 10^{17}\ s} \simeq 1.66 \cdot 10^{31}\ \mathrm{kg}$$

Poiché la massa del pianeta è trascurabile rispetto a tale valore, il risultato corrisponde alla massa della stella e in masse solari si ha:

$$\mathrm{M_S} \simeq 1.66 \cdot 10^{31}\ \mathrm{kg} \simeq 8.35\ \mathrm{M_\odot}$$

Il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta in unità astronomiche vale:

$$\mathrm{a} \simeq 224 \cdot 10^7\ \mathrm{km} \simeq 15.0\ UA$$

Quindi il periodo di rivoluzione $\mathbf{T_S}$ del pianeta attorno al Sole in anni varrebbe:

$$\mathrm{T_S} = \sqrt{\mathrm{a}^3} \simeq 58\ \mathrm{anni}$$

Nota.
Dallo studio della struttura ed evoluzione stellare sappiamo che la massa minima di una stella che "brucia" idrogeno nel nucleo è: $\mathrm{M_{S-minima}} \simeq 0.08 \cdot \mathrm{M_\odot} \simeq 1.59 \cdot 10^{29}\ \mathrm{kg} \simeq 24 \cdot 10^3\ \mathrm{M_p}$. Esistono anche degli oggetti molto particolari, le "Brown Dwarf", una sorta di "stelle mancate" che bruciano deuterio nel

loro nucleo, la cui massa minima è di circa: $M_{BD} \simeq 0.012 \cdot M_\odot \simeq 2.4 \cdot 10^{28}$ kg $\simeq 3.7 \cdot 10^3\ M_P$. Quale che sia la natura dell'oggetto attorno a cui è stato scoperto il pianeta, l'approssimazione $M_S + M_P \simeq M_s$ risulta giustificata.

10. La stella Castore (= **α** Gem) ha una parallasse di 0".0761 ed è un sistema binario visuale con periodo di rivoluzione di 306 anni. Il semiasse maggiore dell'orbita delle componenti forma un angolo di 90° rispetto alla direzione di osservazione e le sue dimensioni angolari sono di 6".0. Determinare la somma delle masse delle due componenti in unità della massa del Sole.

Soluzione

Detta **D** la distanza di Castore dal Sole e **π** la sua parallasse si ha:

$$D = \frac{1}{\pi} \simeq \frac{1}{0''.0761} \simeq 13.1\, pc \simeq 4.05 \cdot 10^{14}\, km$$

Possiamo calcolare le dimensioni lineari $\boldsymbol{a}$ del semiasse maggiore dell'orbita a partire dalle sue dimensioni apparenti $\boldsymbol{\beta}$. Poiché il piano dell'orbita è perpendicolare alla direzione di osservazione sarà:

$$a = D \cdot \tan\beta \simeq 4.05 \cdot 10^{14}\, km \cdot \tan\left(\frac{6''.0}{3600}\right) \simeq 1.2 \cdot 10^{10}\, km$$

Dette **M** e **m** le masse delle due componenti e **T** il periodo di rivoluzione, vale la relazione:

$$M + m = \frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} \simeq \frac{39.48 \cdot 1.7 \cdot 10^{39}\, m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\, \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 9.33 \cdot 10^{19}\, s^2} \simeq 1.1 \cdot 10^{31}\, kg \simeq 5.5\, M_\odot$$

11. L'asteroide Pallas ha un raggio medio di 512 km; l'accelerazione di gravità in superficie vale: 0.210 m/s^2. Calcolare la densità dell'asteroide in kg/m^3 e in g/cm^3 e la velocità di fuga sulla superficie. Calcolare la velocità di impatto con l'asteroide di un corpo di piccola massa lasciato cadere, da fermo, da una distanza di 800 km dalla superficie.

Soluzione

Detto **R** il raggio, l'asteroide ha un volume **V** pari a:

$$\mathrm{V} = \frac{4}{3}\,\pi\, \mathrm{R}^3 = 5.62 \cdot 10^8\ \mathrm{km}^3 = 5.62 \cdot 10^8 \cdot (10^3\ \mathrm{m})^3 = 5.62 \cdot 10^{17}\ \mathrm{m}^3$$

Nota l'accelerazione di gravità alla sua superficie ricaviamo la massa **M** e la densità **ρ** di Pallas:

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{g} \cdot \mathrm{R}^2}{\mathrm{G}} \simeq \frac{0.210\ \frac{m}{s^2} \cdot 2.62 \cdot 10^{11}\ m^2}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}} \simeq 8.24 \cdot 10^{20}\ \mathrm{kg}$$

$$\rho = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{V}} = \frac{8.25 \cdot 10^{20}\ \mathrm{kg}}{5.62 \cdot 10^{17}\ \mathrm{m}^3} \simeq 1.47 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1.47 \cdot 10^3 \cdot \frac{10^3\ \mathrm{g}}{10^6\ \mathrm{cm}^3} = 1.47\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

La velocità di fuga $\mathbf{v_f}$ dall'asteroide vale:

$$\mathrm{v_f} = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{G\,M}}{\mathrm{R}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20}\ \mathrm{kg}}{512 \cdot 10^3\ \mathrm{m}}} \simeq 463\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0.463\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

La distanza **h** da cui cade il corpo è dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni di Pallas. Non possiamo quindi applicare le leggi del moto uniformemente accelerato, ma utilizziamo la legge di conservazione dell'energia meccanica. Posto **H** = h + R e dette $\mathbf{v_i}$ e $\mathbf{v_0}$ le velocità di impatto e iniziale si ha:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_i^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

da cui, essendo la velocità iniziale nulla, si ricava:

$$v_i = \sqrt{2\,G\,M\left(\frac{H-R}{HR}\right)} = \sqrt{2\,\cdot 6.674\,\cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 8.24\,\cdot\,10^{20}\,kg\left(\frac{800\,\cdot 10^3\,m}{6.72\,\cdot\,10^{11}\,\cdot m^2}\right)} \simeq 362\,\frac{m}{s}$$

12. Un'astronave si trova tra la Terra e il Sole nel punto in cui l'attrazione gravitazionale della Terra è un centesimo di quella del Sole. A che distanza dalla Terra si trova e quanto tempo impiegherà un segnale radio per raggiungere i radiotelescopi terrestri? Trascurate gli effetti dovuti al moto di rivoluzione della Terra, gli effetti gravitazionali della Luna e degli altri pianeti, le dimensioni della Terra e considerate la sua orbita circolare.

Soluzione

Detta **d** la distanza a cui si trova l'astronave dalla Terra, $\boldsymbol{M_T}$, $\boldsymbol{M_s}$ e $\boldsymbol{m_a}$ le masse della Terra, del Sole e dell'astronave e **D** la distanza Terra-Sole, poiché l'astronave si trova tra la Terra e il Sole nel punto in cui l'attrazione gravitazionale della Terra è 1/100 di quella del Sole si ha:

$$\frac{G\cdot M_T\cdot m_a}{d^2} = \frac{1}{100}\cdot\frac{G\cdot M_S\cdot m_a}{(D-d)^2}$$

da cui ricaviamo:

$$\frac{D-d}{d} = \sqrt{\frac{M_s}{100\,M_T}} \qquad\qquad \frac{D}{d} - 1 = \sqrt{\frac{M_s}{100\,M_T}}$$

e infine:

$$d = \frac{D}{\sqrt{\frac{M_s}{100\,M_T}}+1} \simeq \frac{149.6\,\cdot\,10^6\,km}{\sqrt{\frac{1.989\,\cdot\,10^{30}\,kg}{5.972\,\cdot\,10^{26}\,kg}}+1} \simeq 2.548\,\cdot\,10^6\,km\,.$$

Per calcolare il tempo **t** che un segnale radio impiega per raggiungere i radiotelescopi terrestri, dobbiamo ricordare che i segnali radio sono onde elettromagnetiche e pertanto viaggiano alla velocità della luce **c**:

$$t = \frac{d}{c} \simeq \frac{2.548\,\cdot\,10^6\,km}{299792\,\frac{km}{s}} \simeq 8.499\,s$$

13. Calcolate il peso di un corpo di massa m = 100 kg all'equatore di Mercurio e all'equatore di Saturno, considerando l'effetto della forza centrifuga dovuta alla rotazione. Il periodo di rotazione dei due pianeti è, rispettivamente, di 1407.5 h e 10h 33m. Poiché Saturno non ha una superficie solida, si assuma come distanza dal centro il raggio medio del pianeta.

Soluzione

Detta **g** l'accelerazione di gravità, il peso **P** di un corpo è la forza di gravità tra corpo e pianeta:

$$P = m\,g$$

Dalla relazione: $g = \frac{G\cdot M}{R^2}$ l'accelerazione di gravità alla superficie di Mercurio $\mathbf{g_M}$ e di Saturno $\mathbf{g_S}$ vale:

$$g_M = \frac{6.674\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 3.301\cdot 10^{23}\,kg}{(2440\cdot 10^3\,m)^2} \simeq 3.700\,\frac{m}{s^2} \qquad g_S = \frac{6.674\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 5.685\cdot 10^{26}\,kg}{(60267\cdot 10^3\,m)^2} \simeq 10.45\,\frac{m}{s^2}$$

In assenza di rotazione il peso del corpo su Mercurio $\mathbf{P_M}$ e su Saturno $\mathbf{P_S}$ sarà quindi:

$$P_M = m\,\cdot\,g_M \simeq 370\,N \qquad P_S = m\,\cdot\,g_S \simeq 1045\,N$$

Detti **T** il periodo di rotazione, **v** $(= \frac{2\pi R}{T})$ il modulo della velocità tangenziale alla superficie e **R** il raggio di un pianeta, la forza centrifuga $\mathbf{F_c}$ è data dalla relazione:

$$F_c = m\,\frac{v^2}{R} = m\,\frac{4\,\pi^2 \cdot R}{T^2}$$

e all'equatore è diretta esattamente in senso opposto alla gravità e rende minore il peso del corpo. Per i due pianeti avremo:

$$F_{cM} \simeq 100\,kg\,\frac{39.48 \cdot 2440 \cdot 10^3\,m}{25.67 \cdot 10^{12}\,s^2} \simeq 3.75\ \cdot 10^{-4}\,N \qquad F_{cS} \simeq 100\,kg\,\frac{39.48 \cdot 60267 \cdot 10^3\,m}{144.2 \cdot 10^7\,s^2} \simeq 165\,N$$

Tenendo conto della rotazione il peso del corpo all'equatore di Mercurio $\mathbf{P_{M-R}}$ e di Saturno $\mathbf{P_{S-R}}$ vale:

$$P_{M-R} \simeq 370\ N\ -\ 3.75\ \cdot 10^{-4}\,N \simeq P_M \qquad P_{S-R} \simeq 1045\ N\ - 165\ N\ \simeq 880\ N$$

14. Un pianeta di massa $\mathbf{M_P} = 1.6 \cdot 10^{26}$ kg si muove attorno a una stella su un'orbita il cui semiasse maggiore è di 9.00 UA con un periodo di 20.0 anni. Trovare la massa (in kg e in unità di masse solari) e il raggio (in km e in unità del raggio solare) della stella, sapendo che l'accelerazione di gravità sulla fotosfera della stella è 54 volte quella che si ha sulla superficie della Terra.

Soluzione

Detti **a** il semiasse maggiore dell'orbita e **T** il periodo di rivoluzione, trascurando la massa del pianeta (vedere nota alla fine), ricaviamo la massa della stella $\mathbf{M_s}$ dalla III legge di Keplero:

$$M_s = \frac{4\,\pi^2\,a^3}{G\,T^2} \simeq \frac{39.48\ \cdot 2.44\ \cdot 10^{36}\,m^3}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\,\dfrac{m^3}{kg\,s^2}\ \cdot 3.98\ \cdot\ 10^{17}\,s^2} \simeq 3.63\ \cdot\ 10^{30}\,kg \simeq 1.82\,M_\odot$$

Detta $\mathbf{g_S}$ l'accelerazione di gravità sulla fotosfera della stella e $\mathbf{g_T}$ l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra, possiamo ricavare il raggio della stella $\mathbf{R_s}$ dalla relazione:

$$R_S = \sqrt{\frac{G\ \cdot M_S}{g_S}} = \sqrt{\frac{G\ \cdot M_S}{54\ \cdot\ g_T}}$$

$$R_S \ \simeq \sqrt{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\,\dfrac{m^3}{kg\,s^2}\ \cdot\ 3.63\ \cdot\ 10^{30}\,kg}{54\ \cdot 9.807\ \dfrac{m}{s^2}}}\ \simeq\ 6.76\ \cdot\ 10^5\,km \simeq 0.973\,R_\odot$$

Nota.

Dallo studio della struttura ed evoluzione stellare sappiamo che la massa minima di una stella che "brucia" idrogeno nel nucleo è: $M_{S-minima} \simeq 0.08\ \cdot M_\odot\ \simeq\ 1.59\ \cdot\ 10^{29}$ kg $\simeq 24\ \cdot 10^3\ M_p$. Esistono anche degli oggetti molto particolari, le "Brown Dwarf", una sorta di "stelle mancate" che bruciano deuterio nel loro nucleo, la cui massa minima è di circa: $M_{BD}\ \simeq 0.012\ \cdot\ M_\odot\ \simeq 2.4\ \cdot\ 10^{28}$ kg $\simeq 3.7\ \cdot\ 10^3\ M_P$. Quale che sia la natura dell'oggetto attorno a cui è stato scoperto il pianeta, l'approssimazione $M_S + M_P\ \simeq\ M_s$ risulta giustificata.

15. La stella Kepler-101 ha due pianeti, Kepler-101b e Kepler-101c. Kepler-101b ha un raggio 0.520 volte quello di Giove e una massa 51.0 volte quella della Terra. Kepler-101c ha un raggio 1.23 volte quello della Terra e una massa $1.20\ \cdot\ 10^{-2}$ volte quella di Giove. Calcolare:

1. l'accelerazione di gravità alla superficie dei due pianeti;
2. a quale altezza dalla superficie di Kepler-101c si avrà un'accelerazione di gravità pari a quella sulla superficie di Kepler-101b;
3. la densità dei due pianeti, valutando se sono rocciosi o gassosi.

Soluzione

1. Detti $\boldsymbol{M_T}$, $\boldsymbol{M_G}$, $\boldsymbol{R_T}$, e $\boldsymbol{R_G}$ le masse e i raggi della Terra e di Giove, l'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g_b}$ e $\boldsymbol{g_c}$ alla superficie dei due pianeti vale:

$$g_b = \frac{G \cdot 51.0 \cdot M_T}{(0.520 \cdot R_G)^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 51.0 \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg}{(0.520 \cdot 71490 \cdot 10^3\, m)^2} \simeq 14.7 \frac{m}{s^2}$$

$$g_c = \frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{(1.23 \cdot R_T)^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27}\, kg}{(1.23 \cdot 6378 \cdot 10^3\, m)^2} \simeq 24.7 \frac{m}{s^2}$$

2. L'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g_{ch}}$ a un'altezza $\boldsymbol{h}$ sulla superficie di Kepler-101c vale:

$$g_{ch} = \frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{(1.23 \cdot R_T + h)^2}$$

relazione dalla quale, ponendo $g_{ch} = g_b$, otteniamo il valore di $\boldsymbol{h}$ richiesto:

$$h = \sqrt{\frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{g_b}} - 1.23 \cdot R_T$$

$$h \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27}\, kg}{14.7 \frac{m}{s^2}}} - 7.84 \cdot 10^6\, m \simeq 2.33 \cdot 10^6\, m$$

3. La densità media $\boldsymbol{\rho_b}$ e $\boldsymbol{\rho_c}$ dei due pianeti è data dal rapporto tra la loro massa e il loro volume:

$$\boldsymbol{\rho_b} = \frac{3 \cdot 51.0 \cdot M_T}{4\pi \cdot (0.520 \cdot R_G)^3} \simeq \frac{3 \cdot 51.0 \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg}{4\pi \cdot (0.520 \cdot 71490 \cdot 10^3\, m)^3} \simeq 1.42 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

$$\boldsymbol{\rho_c} = \frac{3 \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{4\pi \cdot (1.23 \cdot R_T)^3} \simeq \frac{3 \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27}\, kg}{4\pi \cdot (1.23 \cdot 6378 \cdot 10^3\, m)^3} \simeq 1.13 \cdot 10^4 \frac{kg}{m^3}$$

Dalle densità ottenute si deduce che il pianeta Kepler-101b è di tipo gassoso, mentre Kepler-101c è di tipo roccioso. Si consideri infatti che Giove ha una densità media di $1.33 \cdot 10^3\ kg/m^3$, mentre la densità media della Terra è di $5.51 \cdot 10^3\ kg/m^3$.