XXII Campionati Italiani di Astronomia

Gara Interregionale - 8 febbraio 2024

Categoria Senior

1. Il giorno solare vero

La durata del giorno solare vero non è costante nel corso di un anno. Dite in quale mese dell'anno la sua durata è maggiore e in quale mese è minore. Giustificate la vostra risposta.

Soluzione:

Il giorno solare vero è il tempo che intercorre tra due culminazioni consecutive del Sole vero al meridiano. È leggermente più lungo di un giorno siderale perché la Terra, mentre ruota su sé stessa, orbita anche attorno al Sole nello stesso senso della rotazione. Ne consegue che, dopo una rotazione "assoluta" della Terra, il meridiano non è più rivolto esattamente verso il Sole, ma lo sarà dopo che la Terra avrà ruotato su sé stessa di un angolo pari alla variazione di ascensione retta del Sole vero.

Il giorno solare vero non ha durata costante a causa di due effetti:

1. la velocità della Terra lungo la sua orbita, che fa variare la velocità angolare apparente del Sole, rispetto alle stelle, in base alla II legge di Keplero;
2. l'obliquità dell'eclittica, che, a parità di velocità angolare apparente del Sole, comporta variazioni di ascensione retta maggiori ai solstizi, dove la componente del moto apparente in declinazione si annulla.

Considerando solo l'effetto dovuto alla velocità orbitale della Terra, il giorno solare vero avrebbe durata massima al perielio, attualmente ai primi di gennaio, quando la velocità di rivoluzione della Terra è maggiore, e minima all'afelio, attualmente ai primi di luglio, quando la velocità di rivoluzione della Terra è minore.

Considerando solo l'effetto dovuto all'obliquità dell'eclittica, il giorno solare vero avrebbe durata massima ai solstizi e minima gli equinozi.

Considerando l'insieme dei due effetti il giorno solare vero più lungo si ha a metà dicembre, mentre il più corto si osserva a metà settembre.

Nota. Nella valutazione sono state considerate corrette le soluzioni che tenevano conto di uno solo dei due effetti. Agli studenti che hanno considerato entrambi gli effetti dovuto è stata assegnata una valutazione supplementare

2. Mantenere la distanza di sicurezza

Attualmente ci sono 560 satelliti in orbita geostazionaria (ovvero satelliti la cui posizione apparente nel cielo resta immutata nel tempo per un qualsiasi osservatore sulla Terra). Determinate la distanza media, misurata lungo l'orbita, tra uno qualsiasi di essi e quello immediatamente precedente o successivo.

Soluzione:

Per apparire geostazionario un satellite deve trovarsi su un'orbita equatoriale, circolare, e avere un periodo di rivoluzione attorno alla Terra pari a un giorno siderale. Quindi, indicando con $\mathbf{M_T}$ la massa della Terra e con $\mathbf{T}$ il periodo orbitale, il raggio **a** della sua orbita deve essere:

$$a = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg \cdot (86164\, s)^2}{39.48}} \simeq 4.216 \cdot 10^4\, km\,.$$

Quindi la lunghezza **C** dell'orbita geostazionaria risulta:

$$\mathrm{C} = 2\pi \cdot \mathrm{a} \simeq 2\pi \cdot 4.216 \cdot 10^4\ \mathrm{km} \simeq 2.649 \cdot 10^5\ km\ .$$

Per calcolare la distanza media **D** tra uno di essi e quello immediatamente precedente o successivo, assumiamo che i 560 satelliti siano distribuiti uniformemente lungo l'orbita geostazionaria. Si avrà quindi:

$$D = \frac{C}{560} \simeq \frac{2.649 \cdot 10^5\, km}{560} \simeq 473.0\, km\,.$$

3. Superga, Monviso e Luna in un sol colpo

La NASA ha recentemente pubblicato la foto di Valerio Minato, qui a destra, come APOD (Astronomy Picture of the Day) il giorno di Natale 2023. La foto mostra un allineamento tra la Luna, la sommità del Monviso e la Basilica di Superga, vicino a Torino. Calcolate:

a) la distanza dell'osservatore dalla sommità del Monviso, assumendo che quest'ultima abbia una larghezza di $7.50 \cdot 10^2$ m e un diametro angolare pari a quello del disco lunare;

b) la distanza dell'osservatore dalla Basilica di Superga, la cui larghezza è di 80.0 m, assumendo che questa sottenda un angolo pari al 70% del diametro angolare del disco lunare.

Nei calcoli trascurate il raggio della Terra e assumete l'orbita della Luna circolare.

Soluzione:

Indicando con $\mathbf{R_L}$ il raggio della Luna e con $\mathbf{d_L}$ la sua distanza media dalla Terra, il suo diametro angolare $\boldsymbol{\theta_L}$ vale:

$$\theta_L = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{R_L}{d_L}\right) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1.738 \cdot 10^6\ m}{3.844 \cdot 10^8\ m}\right) \simeq 0^\circ.5181\ .$$

a) La distanza $\mathbf{d_M}$ dell'osservatore dal Monviso, a partire dalla larghezza $\mathbf{D_M}$ di quest'ultimo e dal suo diametro angolare pari a quello lunare $\boldsymbol{\theta_L}$, si ottiene dalla relazione:

$$d_M = \frac{D_M}{2 \cdot \sin\left(\frac{\theta_M}{2}\right)} \simeq \frac{7.50 \cdot 10^2\ m}{9.043 \cdot 10^{-3}} \simeq 82.6\ km\ .$$

b) Utilizzando la stessa formula, ma sostituendo la dimensione fisica $\mathbf{D_S}$ e angolare $\boldsymbol{\theta_S}$ (= 0.7 θ_L) della Basilica di Superga, si ottiene la sua distanza $\mathbf{d_S}$ dall'osservatore:

$$d_s = \frac{D_S}{2 \cdot \sin\left(\frac{0.7 \cdot \theta_L}{2}\right)} \simeq \frac{80.0\ m}{6.330 \cdot 10^{-3}} \simeq 12.6\ km\ .$$

4. Un testimone d'eccezione

Il 26 settembre 2022 il satellite italiano LICIACube ha ripreso l'impatto della sonda Dart sulla superficie dell'asteroide Dimorphos, che si trovava in orbita circolare attorno all'asteroide Didymos, di massa $5.27 \cdot 10^{11}$ kg. Prima dell'impatto il periodo e il semiasse maggiore dell'orbita di Dimorphos erano di 11 h 55 minuti e 1.19 km. Al momento dell'impatto la Terra e Didymos risultavano separati da un angolo di 4°.02 con vertice nel Sole e Didymos distava dal Sole 1.014 UA. Dopo l'impatto il periodo orbitale di Dimorphos è diminuito di 33 minuti. Calcolate:

a) la velocità orbitale di Dimorphos prima dell'impatto;

b) di quanto si è ridotto in percentuale il semiasse maggiore dell'orbita di Dimorphos;

c) il ritardo con cui sono giunte sulla Terra le prime immagini dell'impatto.

Trascurate le masse di Dart e Dimorphos, la distanza tra Didymos, Dimorphos e LICIACube e assumete l'orbita della Terra circolare.

Soluzione:

a) Detto $\mathbf{a_0}$ il raggio dell'orbita e $\boldsymbol{P_0}$ il periodo orbitale, otteniamo la velocità $\mathbf{v_0}$ con cui Dimorphos orbitava attorno a Didymos, dalla relazione:

$$v_0 = \frac{2\pi \cdot a_0}{P_0} = \frac{2\pi \cdot 1.19 \cdot 10^3\ m}{42900\ s} = 0.174\ \frac{m}{s}\ .$$

b) Per calcolare il semiasse maggiore $\mathbf{a_1}$ della nuova orbita di Dimorphos, utilizziamo la III legge di Keplero, indicando con $\mathbf{M_D}$ la massa di Didymos, trascurando le masse di Dart e Dimorphos e considerando il nuovo periodo $\mathbf{P_1}$:

$$\mathrm{P_1 = P_0 - 33\ m = 11\ h\ 22\ m = 40920\ s}\ .$$

Avremo quindi:

$$\mathrm{a_1} = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{P_1^2 \cdot G \cdot M_D}}{4\pi^2}} \simeq \sqrt[3]{\frac{(40920\ \mathrm{s})^2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot s^2}} \cdot 5.27 \cdot 10^{11}\ \mathrm{kg}}{4\pi^2}} \simeq 1.14 \cdot 10^3\ \mathrm{m}\ .$$

Di conseguenza, la riduzione percentuale dell'orbita $\mathbf{r_{\%}}$ vale:

$$r_{\%} = \frac{a_0 - a_1}{a_0} = 4.20\ \%\ .$$

c) Detto $\mathbf{a_T}$ il semiasse maggiore dell'orbita della Terra, $\mathbf{a_D}$ la distanza di Didymos dal Sole al momento dell'impatto e $\boldsymbol{\alpha}$ l'angolo di separazione tra Terra e Didymos visti del Sole, possiamo ricavare la distanza $\mathbf{D_L}$ tra la Terra e LICIACube con il teorema di Carnot:

$$\mathrm{D_L} = \sqrt{\mathrm{a_T^2} + \mathrm{a_D^2} - 2 \cdot \mathrm{a_T} \cdot \mathrm{a_D} \cdot \cos\alpha}$$

$$\mathrm{D_L} = \sqrt{1\,\mathrm{UA}^2 + 1.028\,\mathrm{UA}^2 - 2.023\,\mathrm{UA}^2} \simeq 0.071\,\mathrm{UA} \simeq 10.7 \cdot 10^6\,\mathrm{km}\,.$$

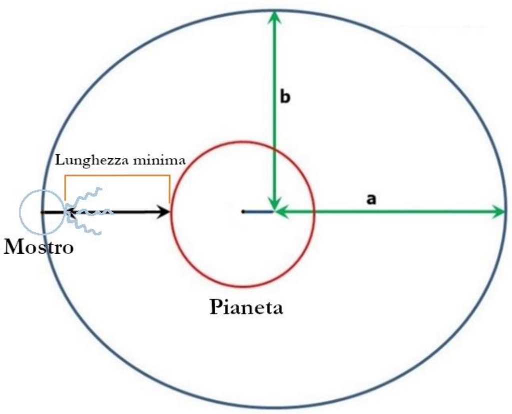
Il ritardo **t** del segnale inviato da LICIACube equivale al tempo impiegato dalla luce per percorrere la distanza $\mathbf{D_L}$ del satellite dalla Terra:

$$t = \frac{D_L}{c} \simeq 35.7\,s\,.$$

5. L'astropolpo

Un enorme polpo spaziale, di massa pari a un quarto di quella della Luna e densità pari a 0.92 g/cm³ è entrato in orbita ellittica equatoriale, con un periodo di 5.23 giorni terrestri ed eccentricità 0.30, attorno a un pianeta. Il pianeta ha la stessa densità della Terra e metà della massa terrestre. Quale lunghezza minima devono avere i tentacoli dell'astropolpo per riuscire a toccare il suolo del pianeta? Approssimate l'astropolpo a una sfera e supponete che i suoi tentacoli, la cui massa è trascurabile, partano dal punto del suo corpo più vicino al pianeta.

Soluzione:



Per riuscire a toccare il suolo del pianeta, i tentacoli del polpo devono essere lunghi almeno quanto la distanza minima tra il polpo e il suolo del pianeta. Pertanto bisognerà ricavare la distanza del polpo dal pianeta al periastro, che rappresenta la distanza minima tra il centro del polpo e il centro del pianeta, e sottrarre da questa il raggio del corpo del polpo e il raggio del pianeta, come mostrato in figura (non in scala)

Detti **a** il semiasse maggiore dell'orbita ed **e** l'eccentricità, la distanza al periastro $\mathbf{D_P}$ è data da:

$$D_P = a \cdot (1 - e)\,.$$

Possiamo calcolare **a** con la III legge di Keplero generalizzata indicando con $\mathbf{M_P}$ e $\mathbf{M_M}$ le masse del pianeta e del polpo, con $\mathbf{M_T}$ e $\mathbf{M_L}$ le masse della Terra e della Luna e con **T** il periodo di rivoluzione:

$$a^3 = T^2 \cdot G \cdot \frac{M_P + M_M}{4\pi^2}$$

$$a = \sqrt[3]{T^2 \cdot G \cdot \frac{\frac{M_T}{2} + \frac{M_L}{4}}{4\pi^2}} \simeq$$

$$\simeq \sqrt[3]{(5.23 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\,s)^2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{\frac{5.972 \cdot 10^{24}\,kg}{2} + \frac{7.342 \cdot 10^{22}\,kg}{4}}{4\pi^2}} \simeq 1.01 \cdot 10^8\,m\,.$$

Per la distanza al periastro otteniamo:

$$\mathrm{D_P} = \mathrm{a} \cdot (1 - \mathrm{e}) = 1.01 \cdot 10^5\,\mathrm{km} \cdot (1 - 0.30) = 7.07 \cdot 10^4\,\mathrm{km} = 70.7 \cdot 10^3\,\mathrm{km}\,.$$

Per ricavare infine la lunghezza minima dei tentacoli, ci restano da trovare i raggi del pianeta $\mathbf{R_P}$ e del polpo $\mathbf{R_M}$. Dalla formula che lega la densità $\boldsymbol{\varrho}$ di un corpo alla sua massa **M** e al suo volume **V**:

$$\rho = \frac{M}{\mathrm{V}} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3}\,.$$

Poiché il pianeta ha la stessa densità della Terra, vale l'uguaglianza:

$$\frac{M_P}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_P^3} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_T^3}$$

da cui, poiché la massa del pianeta è metà di quella della Terra:

$$\mathrm{R_P} = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{M_P}}{\mathrm{M_T}} \cdot \mathrm{R_T^3}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{\mathrm{M_T}}{2}}{\mathrm{M_T}} \cdot \mathrm{R_T^3}} \simeq \sqrt[3]{\frac{(6.378 \cdot 10^3\ \mathrm{km})^3}{2}} \simeq 5.062 \cdot 10^3\ \mathrm{km}\ .$$

Mentre per il polpo avremo:

$$\mathrm{R_M} = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{M_M}}{\frac{4}{3}\pi \cdot \rho_\mathrm{M}}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{\mathrm{M_L}}{4}}{\frac{4}{3}\pi \cdot 0.92\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}}}} \simeq \sqrt[3]{\frac{\frac{7.342 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}}{4}}{\frac{4}{3}\pi \cdot 0.92 \cdot 10^{12}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{km^3}}}} \simeq 1.68 \cdot 10^3\ \mathrm{km}\ .$$

A questo punto possiamo calcolare la lunghezza minima **L** dei tentacoli:

$$\mathrm{L} = \mathrm{D_P} - \mathrm{R_P} - \mathrm{R_M} = 70.7 \cdot 10^3\ \mathrm{km} - 5.062 \cdot 10^3\ \mathrm{km} - 1.68 \cdot 10^3\ \mathrm{km} \simeq 64.0 \cdot 10^3\ \mathrm{km}\ .$$