XXII Campionati Italiani di Astronomia

Gara Interregionale - 8 febbraio 2024

Categoria Junior 2

1. Orbite lunari

Un gruppo di ricerca ha scoperto una nuova piccola luna in orbita circolare attorno a un pianeta del Sistema Solare. La luna ha un periodo di rivoluzione di 13.90 ore e una distanza di $1.340 \cdot 10^5$ km dal centro del pianeta. Di quale pianeta del nostro Sistema Solare si tratta?

Soluzione:

Detti **M** la massa del pianeta, **T** il periodo di rivoluzione della luna e **R** la distanza della luna dal centro del pianeta, scriviamo la III legge di Keplero trascurando la massa della piccola luna:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\,\pi^2},$$

da cui si ricava la massa del pianeta:

$$M = \frac{4\,\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot T^2} \simeq \frac{4\,\pi^2 \cdot (1.340 \cdot 10^8 \text{ m})^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot (5.004 \cdot 10^4 \text{ s})^2} \simeq 5.684 \cdot 10^{26}\,\text{kg}\,.$$

e confrontando con i dati in tabella, tenendo conto della precisione delle misure, si ricava che il pianeta attorno a cui ruota la piccola luna è Saturno.

2. Il giorno solare vero

La durata del giorno solare vero non è costante nel corso di un anno. Dite in quale mese dell'anno la sua durata è maggiore e in quale mese è minore. Giustificate la vostra risposta.

Soluzione:

Il giorno solare vero è il tempo che intercorre tra due culminazioni consecutive del Sole vero al meridiano. È leggermente più lungo di un giorno siderale perché la Terra, mentre ruota su sé stessa, orbita anche attorno al Sole nello stesso senso della rotazione. Ne consegue che, dopo una rotazione "assoluta" della Terra, il meridiano non è più rivolto esattamente verso il Sole, ma lo sarà dopo che la Terra avrà ruotato su sé stessa di un angolo pari alla variazione di ascensione retta del Sole vero.

Il giorno solare vero non ha durata costante a causa di due effetti:

1. la velocità della Terra lungo la sua orbita, che fa variare la velocità angolare apparente del Sole, rispetto alle stelle, in base alla II legge di Keplero;
2. l'obliquità dell'eclittica, che, a parità di velocità angolare apparente del Sole, comporta variazioni di ascensione retta maggiori ai solstizi, dove la componente del moto apparente in declinazione si annulla.

Considerando solo l'effetto dovuto alla velocità orbitale della Terra, il giorno solare vero avrebbe durata massima al perielio, attualmente ai primi di gennaio, quando la velocità di rivoluzione della Terra è maggiore, e minima all'afelio, attualmente ai primi di luglio, quando la velocità di rivoluzione della Terra è minore.

Considerando solo l'effetto dovuto all'obliquità dell'eclittica, il giorno solare vero avrebbe durata massima ai solstizi e minima gli equinozi.

Considerando l'insieme dei due effetti il giorno solare vero più lungo si ha a metà dicembre, mentre il più corto si osserva a metà settembre.

Nota. Nella valutazione sono state considerate corrette le soluzioni che tenevano conto di uno solo dei due effetti. Agli studenti che hanno considerato entrambi gli effetti dovuto è stata assegnata una valutazione supplementare

3. Il peso del LEM

Il LEM (Lunar Excursion Module), il modulo dell'Apollo 11 che si è posato sulla Luna il 20 luglio 1969, aveva una massa di 13.3 tonnellate. Calcolate:

a) il peso del LEM sulla superficie della Luna;

b) a quale altezza dal suolo della Luna il LEM pesava la metà rispetto al suo peso sulla superficie.

Trascurate gli effetti dovuti all'attrazione gravitazionale del Sole e della Terra e alla rotazione della Luna.

Soluzione:

a) Detta **M** la massa della Luna e **R** il suo raggio, l'accelerazione di gravità **g** sulla superficie della Luna vale:

$$\mathrm{g} = \mathrm{G} \cdot \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^2} \simeq 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot \frac{7.342 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}{(1.738 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^2} \simeq 1.622 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Detta $\mathbf{m_{LEM}}$ la massa del LEM, ricaviamo il suo peso $\mathbf{P_S}$ sulla superficie della Luna dalla relazione:

$$\mathrm{P_S} = \mathrm{m_{LEM}} \cdot \mathrm{g} \simeq 13.3 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot 1.622 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \simeq 21.6 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}^2} = 21.6 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$$

b) D'altra parte dalla legge di Gravitazione Universale sappiamo che la forza **F** con cui la Luna attrae il LEM a una distanza **d** dal suo centro, ovvero il peso **P** del LEM a detta distanza, vale:

$$\mathrm{F} = \mathrm{P} = \mathrm{G} \frac{\mathrm{m_{LEM}} \cdot \mathrm{M}}{\mathrm{d}^2}.$$

Consideriamo i seguenti due casi:

1) il LEM si trova sulla superficie della Luna in un punto A;
2) Il LEM si trova in un punto B, sulla verticale di A, a un'altezza **h** dalla superficie della Luna.

I valori del peso $\mathbf{P_A}$ e $\mathbf{P_B}$ sono rispettivamente:

$$P_A = G \cdot \frac{m_{LEM} \cdot M}{R^2} \quad \text{e} \quad P_B = G \cdot \frac{m_{LEM} \cdot M}{(R+h)^2}$$

quindi quando il peso si dimezza:

$$\frac{1}{2} P_A = P_B$$

$$\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{m_{LEM} \cdot M}{R^2} = G \cdot \frac{m_{LEM} \cdot M}{(R+h)^2}$$

Da cui possiamo ricavare l'altezza **h**:

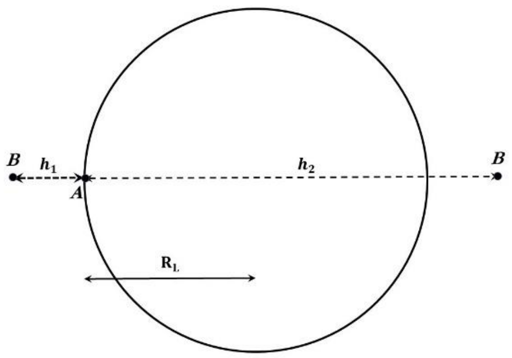
$$(R+h)^2 = 2\,R^2$$

$$R + h = \pm\sqrt{2}\,R$$

con le due possibili soluzioni $\boldsymbol{h_1}$ e $\boldsymbol{h_2}$:

$$h_1 = \left(\sqrt{2} - 1\right) R \simeq 720\,km\,,$$

$$h_2 = \left(-\sqrt{2} - 1\right) R \simeq -4196\,km\,.$$



Come mostrato nella figura, in scala, a sinistra, la prima soluzione descrive la situazione in cui il punto B è posto direttamente al di sopra del punto A; mentre la seconda descrive la situazione in cui il punto B si trova dalla parte diametralmente opposta ad A rispetto al centro della Luna.

Nota. Nella valutazione sono state considerate corrette le soluzioni con il solo calcolo di $\boldsymbol{h_1}$. Agli studenti che hanno calcolato anche $\boldsymbol{h_2}$, interpretandola correttamente, è stata assegnata una valutazione supplementare.

4. Mantenere la distanza di sicurezza

Attualmente ci sono 560 satelliti in orbita geostazionaria (ovvero satelliti la cui posizione apparente nel cielo resta immutata nel tempo per un qualsiasi osservatore sulla Terra). Determinate la distanza media, misurata lungo l'orbita, tra uno qualsiasi di essi e quello immediatamente precedente o successivo.

Soluzione:

Per apparire geostazionario un satellite deve trovarsi su un'orbita equatoriale, circolare, e avere un periodo di rivoluzione attorno alla Terra pari a un giorno siderale. Quindi, indicando con $\mathbf{M_T}$ la massa della Terra e con **T** il periodo orbitale, il raggio **a** della sua orbita deve essere:

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} kg \cdot (86164\ s)^2}{39.48}} \simeq 4.216 \cdot 10^4\ km\ .$$

Quindi la lunghezza **C** dell'orbita geostazionaria risulta:

$$C = 2\pi \cdot a \simeq 2\pi \cdot 4.216 \cdot 10^4\ km \simeq 2.649 \cdot\ 10^5\ km\ .$$

Per calcolare la distanza media **D** tra uno dei satelliti e quello immediatamente precedente o successivo, assumiamo che i 560 satelliti siano distribuiti uniformemente lungo l'orbita geostazionaria. Si avrà quindi:

$$D = \frac{C}{560} = \frac{2.649 \cdot 10^5\ km}{560} = 473.0\ km\ .$$

5. Il Sole denso

Le stelle di neutroni sono alcuni degli oggetti più densi dell'universo, con densità media pari a $5.0 \cdot 10^{17}\ kg/m^3$. Calcolate:

a) il raggio del Sole se avesse la densità media di una stella di neutroni;

b) la magnitudine apparente del Sole se, a parità di temperatura della fotosfera, avesse tale raggio.

Soluzione:

a) Calcoliamo il volume $\mathbf{V_\odot}$ del Sole in funzione della massa $\mathbf{M_\odot}$ e della densità $\boldsymbol{\rho}$ e in funzione del raggio $\mathbf{R_\odot}$:

$$V_\odot = \frac{M_\odot}{\rho} = \frac{4}{3}\pi \cdot R_\odot^3\ .$$

Da cui ricaviamo il valore del raggio $\mathbf{R_{\odot N}}$ nel caso la densità media sia pari a quella di una stella di neutroni:

$$R_{\odot N} = \sqrt[3]{\frac{3M_\odot}{4\pi\rho}} \simeq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ kg}{4\ \pi \cdot 5.0 \cdot 10^{17} \frac{kg}{m^3}}} \simeq 9.8\ km\ .$$

b) Dette $\mathbf{m_\odot}$, $\mathbf{F_\odot}$, $\mathbf{L_\odot}$ e $\mathbf{R_\odot}$ la magnitudine apparente, il flusso ricevuto a Terra, la luminosità e il raggio del Sole attuale e $\mathbf{m_N}$, $\mathbf{F_N}$, $\mathbf{L_N}$ e $\mathbf{R_{\odot N}}$ le stesse quantità, ma con il nuovo raggio, poiché la temperatura $\mathbf{T_\odot}$ e la distanza **d** del Sole restano invariate si avrebbe:

$$m_\odot - m_N = -2.5 \log\left(\frac{F_\odot}{F_N}\right) = -2.5 \log\left(\frac{4\pi\, {R_\odot}^2\ \sigma\ {T_\odot}^4}{4\pi\ d^2}\ \frac{4\pi\ d^2}{4\pi\, {R_{\odot N}}^2\ \sigma\ {T_\odot}^4}\right)$$

$$m_N = m_\odot + 2.5 \log\left(\frac{R_\odot}{R_{\odot N}}\right)^2 \simeq -26.75 + 2.5 \log\left(\frac{6.955 \cdot 10^5\ km}{9.8\ km}\right)^2 \simeq -2.49$$