

**Campionati Italiani di Astronomia**  
**Corso di preparazione alla Gara Interregionale**  
**Categorie Senior/Master - Lezione 3**



1. Utilizzando le proprietà dei logaritmi in base 10 determinare:

$$\log 10 = ? \quad \log 1000 = ? \quad \log 1 = ? \quad \log (a \cdot b) = ? \quad \log \frac{a}{b} = ?$$

$$\log (a)^3 = ? \quad \log 10^6 = ? \quad \log \sqrt{10} = ? \quad \sqrt[4.7]{36.54} = ?$$

**Soluzione**

$$\log 10 = 1 \quad \log 1000 = 3 \quad \log 1 = 0 \quad \log (a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad \log (a)^3 = 3 \log a \quad \log 10^6 = 6 \quad \log \sqrt{10} = \frac{1}{2} \log 10 = 0.5$$

Per risolvere l'ultimo poniamo  $\sqrt[4.7]{36.54} = x$

e consideriamo il logaritmo di ambo i membri:  $\frac{1}{4.7} \log 36.54 = \log x$  da cui:  $0.3325 = \log x$

e passando agli esponenziali:  $x = 10^{0.3325} = 2.150$

2. Completare la seguente tabella, dove  $m$  è la magnitudine apparente,  $\pi$  la parallasse,  $d$  la distanza e  $M$  la magnitudine assoluta.

Nome	$m$	$\pi$ (")	$d$ (pc)	$d$ (al)	$M$
$\alpha$ Cen A	-0.01	0.747			
$\alpha$ CMa (= Sirio)	-1.43		2.63		
61 Cyg A	5.21			11.4	
$\alpha$ Aql (= Altair)		0.194			2.21

**Soluzione**

Le relazioni che legano tra di loro le quantità in tabella sono:

$$\frac{1}{\pi} = d \text{ (pc)}$$

$$d \text{ (al)} \approx 3.2616 d \text{ (pc)}$$

$$M = m + 5 - 5 \log d \text{ (pc)}$$

Nome	$m$	$\pi$ (")	$d$ (pc)	$d$ (al)	$M$
$\alpha$ Cen A	-0.01	0.747	1.34	4.37	4.35
$\alpha$ CMa (= Sirio)	-1.43	0.380	2.63	8.58	1.47
61 Cyg A	5.21	0.286	3.50	11.4	7.49
$\alpha$ Aql (= Altair)	0.77	0.194	5.16	16.8	2.21

3. Verificate il valore della magnitudine assoluta del Sole  $M_{\odot} = 4.83$ , sapendo che dalla Terra la sua magnitudine apparente media è  $m_{\odot} = -26.74$ . Calcolate la magnitudine apparente media del Sole visto da: Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno.

**Soluzione**

La relazione che lega la magnitudine apparente del Sole  $m_{\odot}$  a quella assoluta  $M_{\odot}$  è:

$$m_{\odot} - M_{\odot} = -5 + 5 \log d$$

Esprimiamo la distanza media della Terra dal Sole in parsec:

$$1 \text{ UA} = \frac{1}{206265} \text{ parsec}$$

La magnitudine assoluta del Sole vale quindi:

$$M_{\odot} = -26.74 + 5 - 5 \log \left( \frac{1}{206265} \right) \approx 4.83$$

Poiché  $1 \text{ km} \approx \frac{1}{30857 \cdot 10^9} \text{ pc}$ , per le distanze medie  $d$  dei pianeti dal Sole in parsec e per la magnitudine apparente del Sole visto da essi avremo:

Pianeta	$d$ (pc)	$m_{\odot}$
Mercurio	$1.877 \cdot 10^{-6}$	-28.80
Venere	$3.507 \cdot 10^{-6}$	-27.45
Marte	$7.386 \cdot 10^{-6}$	-25.83
Giove	$2.523 \cdot 10^{-5}$	-23.16
Saturno	$4.625 \cdot 10^{-5}$	-21.84

4. Sirio ( $= \alpha$  CMA;  $m = -1.43$ ) si trova a 8.58 anni luce dal Sole. Trascurando gli effetti dovuti all'atmosfera terrestre calcolate:
- quanto varrebbe la magnitudine apparente di Sirio se si trovasse a una distanza dieci volte maggiore;
  - a partire da quale distanza, in anni luce e in pc, Sirio non sarebbe più visibile a occhio nudo dalla Terra.

### Soluzione

1. La distanza della Terra dal Sole è ovviamente trascurabile rispetto alla distanza Sole-Sirio. Detti  $m_d$  la magnitudine di Sirio alla distanza  $d = 8.58$  anni luce,  $m_D$  la magnitudine che avrebbe Sirio se si trovasse alla distanza  $D = 85.8$  anni luce,  $L_{\text{Sirio}}$  la luminosità di Sirio e  $F_d$  e  $F_D$  i flussi in arrivo a Terra nei due casi, vale la relazione:

$$m_d - m_D = -2.5 \log \frac{F_d}{F_D} = -2.5 \log \frac{L_{\text{Sirio}}}{4 \pi d^2} \cdot \frac{4 \pi D^2}{L_{\text{Sirio}}}$$

da cui si ricava:

$$m_D = m_d + 2.5 \log \frac{D^2}{d^2} = -1.43 + 5 \log 10 = 3.57$$

2. Generalmente si assume come limite di visibilità a occhio nudo nelle migliori condizioni osservative il valore  $m_{\text{limite}} = 6.0$ . Detta  $d_{\text{limite}}$  la distanza dalla quale Sirio avrebbe magnitudine uguale a  $m_{\text{limite}}$  avremo:

$$m_d - m_{\text{limite}} = -2.5 \log \frac{d_{\text{limite}}^2}{d^2} = -5 \log d_{\text{limite}} + 5 \log d$$

da cui si ricava:

$$\log d_{\text{limite}} = \frac{m_{\text{limite}} - m_d}{5} + \log d$$

$$d_{\text{limite}} = 10^{\left( \frac{m_{\text{limite}} - m_d}{5} + \log d \right)} \approx 10^{\left( \frac{6.0 + 1.43}{5} + \log 8.58 \right)} \approx 260 \text{ anni luce} \approx 80 \text{ parsec}$$

Soluzione alternativa.

1. Detta  $m_d$  la magnitudine di Sirio alla distanza  $d = 8.58$  anni luce, possiamo calcolare la sua magnitudine assoluta  $M$ :

$$M = m_d + 5 - 5 \log d (\text{pc}) \approx -1.43 + 5 - 5 \log \left( \frac{8.58 \text{ anni luce}}{3.2616 \frac{\text{anni luce}}{\text{parsec}}} \right) \approx 1.47$$

Quindi la magnitudine  $m_D$  che avrebbe Sirio se si trovasse alla distanza  $D = 85.8$  anni luce sarebbe:

$$m_D = M - 5 + 5 \log D \text{ (pc)} \simeq 1.47 - 5 + 5 \log \left( \frac{85.8 \text{ anni luce}}{3.2616 \frac{\text{anni luce}}{\text{parsec}}} \right) \simeq 3.57$$

2. Generalmente si assume come limite di visibilità a occhio nudo nelle migliori condizioni osservative il valore  $m_{\text{limite}} = 6.0$ . Detta  $d_{\text{limite}}$  la distanza dalla quale Sirio avrebbe magnitudine apparente uguale a  $m_{\text{limite}}$  avremo:

$$m_{\text{limite}} = M - 5 + 5 \log d_{\text{limite}} \text{ (pc)}$$

e quindi:

$$\log d_{\text{limite}} \text{ (pc)} = \frac{m_{\text{limite}} - M + 5}{5}$$

$$d_{\text{limite}} \text{ (pc)} = 10^{\left(\frac{m_{\text{limite}} - M + 5}{5}\right)} \simeq 10^{\left(\frac{6.0 - 1.47 + 5}{5}\right)} \simeq 80 \text{ pc} \simeq 260 \text{ anni luce}$$

5. Sirio ( $= \alpha$  CMa;  $m = -1.43$ ) è la stella più luminosa del cielo.
1. Calcolare la sua magnitudine apparente se il suo raggio si dimezzasse;
  2. Calcolare la sua magnitudine apparente se la temperatura della sua fotosfera si dimezzasse;
  3. Dire infine quale delle due variazioni produrrebbe un effetto maggiore.

### Soluzione

Detti  $R$  il raggio e  $T$  la temperatura della fotosfera, la luminosità  $L$  di una stella vale:

$$L = 4 \pi R^2 \sigma T^4$$

dove  $\sigma$  è la Costante di Stefan-Boltzmann.

Detta  $d$  la distanza dall'osservatore, la differenza di magnitudine tra due stelle è data dalla relazione:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \left( \frac{F_1}{F_2} \right) = -2.5 \log \left( \frac{R_1^2 \cdot T_1^4}{d_1^2} \right) \left( \frac{d_2^2}{R_2^2 \cdot T_2^4} \right) \quad (a)$$

che si può utilizzare per ricavare la variazione di magnitudine di una data stella al variare del suo raggio, della sua temperatura o della sua distanza.

1. Se il raggio di Sirio si dimezza, nella relazione (a) possiamo porre:

$$d_1 = d_2, \quad T_1 = T_2, \quad R_1 = 2 R_2$$

Dette  $m$  la magnitudine di Sirio e  $m_{R/2}$  la sua magnitudine se il raggio si dimezza, avremo:

$$m_{R/2} = m + 2.5 \log 4 \simeq 0.08$$

2. Se la temperatura di Sirio si dimezza, nella relazione (a) possiamo porre:

$$d_1 = d_2, \quad T_1 = 2 T_2, \quad R_1 = R_2$$

Dette  $m$  la magnitudine di Sirio e  $m_{T/2}$  la sua magnitudine se la temperatura si dimezza, avremo:

$$m_{T/2} = m + 2.5 \log 16 \simeq 1.58$$

3. Dai precedenti risultati ricaviamo che una variazione di temperatura comporta una variazione di magnitudine maggiore rispetto a un'identica variazione del raggio. Risultato prevedibile in quanto la luminosità di una stella dipende da  $R^2$  e da  $T^4$ .
6. Se potessero essere osservate individualmente, le componenti di una binaria spettroscopica avrebbero magnitudini apparenti pari a 3.74 e 4.15. Quanto vale la magnitudine apparente totale della binaria spettroscopica?

### Soluzione

La magnitudine totale di due o più stelle NON è la somma delle singole magnitudini, ma la risposta del rivelatore (ad es. il nostro occhio) alla somma dei flussi delle singole stelle.

Si può dimostrare che per calcolare la magnitudine totale  $m_T$  di due stelle di magnitudine  $m_1$  e  $m_2$  possiamo usare una delle due seguenti relazioni:

$$m_T = -2.5 \log (10^{-0.4 m_1} + 10^{-0.4 m_2})$$

$$m_T = m_2 - 2.5 \log (10^{0.4 (m_2 - m_1)} + 1)$$

ottenendo:

$$m_T = -2.5 \log (10^{-1.496} + 10^{-1.66}) \simeq 3.17$$

$$m_T = 4.15 - 2.5 \log (10^{0.4 (4.15 - 3.74)} + 1) \simeq 3.17$$

### Nota.

La prima delle due relazioni per il calcolo di  $m_T$  è utile quando si devono sommare i flussi di più di due stelle. Nel caso di due stelle è spesso di più rapido utilizzo la seconda formula, che si ottiene come segue dalla definizione di magnitudine:

$$m_T = -2.5 \log (F_1 + F_2) \quad \text{e} \quad m_1 - m_2 = -2.5 \log \left( \frac{F_1}{F_2} \right)$$

Dalla seconda relazione si ricava  $F_1 = F_2 \cdot 10^{-0.4 (m_1 - m_2)}$  e sostituendo nella prima otteniamo:

$$m_T = -2.5 \log (F_2 \cdot 10^{-0.4 (m_1 - m_2)} + F_2) = -2.5 \log F_2 - 2.5 \log (10^{-0.4 (m_1 - m_2)} + 1)$$

$$m_T = m_2 - 2.5 \log (10^{0.4 (m_2 - m_1)} + 1)$$

Relazione che si può ricavare nella forma del tutto equivalente:

$$m_T = m_1 - 2.5 \log (10^{0.4 (m_1 - m_2)} + 1)$$

7. Una binaria spettroscopica è formata da una stella di luminosità costante con magnitudine 2.75 e da una stella variabile la cui magnitudine al minimo di luminosità è 4.15 e la cui ampiezza di variazione è di 1.00 magnitudini. Quanto valgono le magnitudini della binaria quando la variabile è al minimo e al massimo di luminosità?

### Soluzione

Dette  $m_1$ ,  $m_{2max}$  e  $m_{2min}$  le magnitudini della stella di luminosità costante e della variabile al massimo e al minimo di luminosità, e  $\Delta m$  l'ampiezza di variazione della variabile, si ha:

$$m_{2max} = m_{2min} - \Delta m = 4.15 - 1.00 = 3.15$$

Dette  $m_{Tmax}$  e  $m_{Tmin}$  le magnitudini della binaria quando la variabile è al massimo e al minimo di luminosità, si ha (utilizzando entrambe le formule che consentono la somma di due magnitudini):

$$m_{Tmax} = -2.5 \log (10^{-0.4 m_1} + 10^{-0.4 m_{2max}}) = -2.5 \log (10^{-0.4 \cdot 2.75} + 10^{-0.4 \cdot 3.15}) \simeq 2.18$$

$$m_{Tmin} = m_1 - 2.5 \log (10^{0.4 (m_1 - m_{2min})} + 1) = 2.75 - 2.5 \log (10^{0.4 (2.75 - 4.15)} + 1) \simeq 2.49$$

8. Calcolate la differenza di magnitudine tra la Luna Piena osservata al perigeo e la Luna Piena osservata all'apogeo.

### Soluzione

Trascurando la differenza del flusso solare incidente nei due casi (la differenza tra la distanza della Luna al perigeo e all'apogeo dalla Terra è  $\simeq 2.9 \cdot 10^{-4}$  la distanza media della Terra dal Sole) il flusso riflesso dalla Luna, a parità di condizioni osservative, dipende unicamente dalla superficie illuminata visibile ed è ad essa proporzionale.

Dette  $d_{ALuna}$  e  $d_{PLuna}$  le distanze della Luna all'apogeo e al perigeo (calcolabili tramite le relative formule), i corrispondenti raggi apparenti  $R_{ALuna}$  e  $R_{PLuna}$  della Luna sono dati da:

$$R_{ALuna} = \sin^{-1} \left( \frac{R_{Luna}}{d_{ALuna}} \right) \simeq \sin^{-1} \left( \frac{1738}{405.7 \cdot 10^3} \right) \simeq 14'.73$$

$$R_{PLuna} = \sin^{-1} \left( \frac{R_{Luna}}{d_{PLuna}} \right) \simeq \sin^{-1} \left( \frac{1738}{363.1 \cdot 10^3} \right) \simeq 16'.46$$

Quindi le aree del disco lunare all'apogeo  $A_{ALuna}$  e al perigeo  $A_{PLuna}$  sono date da:

$$A_{ALuna} = \pi R_{ALuna}^2 \simeq 681.6 \text{ arcmin}^2 \quad A_{PLuna} = \pi R_{PLuna}^2 \simeq 851.2 \text{ arcmin}^2$$

La differenza di magnitudine  $\Delta m$  vale quindi:

$$\Delta m = m_p - m_A = -2.5 \log \frac{F_P}{F_A} \simeq -2.5 \log \frac{851.2 \text{ arcmin}^2}{681.6 \text{ arcmin}^2} \simeq -2.5 \log 1.249 \simeq -0.24$$

In alternativa, considerando che il flusso diminuisce con l'inverso del quadrato della distanza si ha:

$$\Delta m = m_p - m_A = -2.5 \log \frac{F_P}{F_A} = -2.5 \log \frac{d_{ALuna}^2}{d_{PLuna}^2} = -5 \log \frac{405.7 \cdot 10^3 \text{ km}}{363.1 \cdot 10^3 \text{ km}} \simeq -5 \log 1.117 \simeq -0.24$$

9. Per poter valutare correttamente la sottoclasse di una galassia a spirale da una foto, è necessario che le sue dimensioni angolari risultino di almeno  $1'$ . Consideriamo una galassia a spirale con un diametro di  $30.1 \text{ kpc}$  e una magnitudine assoluta pari a  $-21$ . Si determini la distanza massima, in  $\text{pc}$  e in anni luce, per cui può essere classificata correttamente, e la sua magnitudine apparente a tale distanza.

#### Soluzione

Detto  $d$  il diametro della galassia e  $D$  la distanza dalla quale sottende un angolo di  $1'$ , ovvero la distanza massima per cui può essere classificata correttamente, si ha:

$$D = \frac{d}{\tan 1'} \simeq \frac{30.1 \cdot 10^3 \text{ pc}}{\tan 0.0167} \simeq 1.03 \cdot 10^8 \text{ pc} \simeq 3.37 \cdot 10^8 \text{ anni luce}$$

Da tale distanza la sua magnitudine apparente  $m$ , nota quella assoluta  $M$ , vale:

$$m = M - 5 + 5 \log d \simeq -21 - 5 + 5 \log (1.03 \cdot 10^8) \simeq 14$$

10. Da una stella  $\gamma$  riceviamo sulla Terra un flusso luminoso 8560 volte minore rispetto a quello di una stella  $\beta$ . Se la magnitudine apparente della stella  $\beta$  è 2.86, calcolare la magnitudine apparente della stella  $\gamma$ .

#### Soluzione

Detti  $F_\gamma$  e  $F_\beta$  i flussi ricevuti dalle due stelle, la loro differenza di magnitudine apparente vale:

$$m_\gamma - m_\beta = -2.5 \log \frac{F_\gamma}{F_\beta} = -2.5 \log \frac{1}{8560} \simeq 9.83$$

La magnitudine apparente della stella  $\gamma$  vale quindi:

$$m_\gamma = m_\beta + 9.83 \simeq 12.69$$

11. Una foto della Luna al perigeo mostra al centro del disco lunare un cratere di forma circolare le cui dimensioni angolari sono  $5''$ . Quanto vale il diametro del cratere in  $\text{km}$ ?

#### Soluzione

Poiché il cratere è al centro del disco, trascuriamo gli effetti dovuti alla sfericità della Luna. Detti  $a_L$  ed  $e_L$  il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita della Luna, la distanza  $D_{LP}$  della Luna al perigeo vale:

$$D_{LP} = a_L (1 - e_L) \simeq 384.4 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot (1 - 0.05490) \simeq 363.3 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Il diametro  $d$  del cratere di dimensioni angolari  $\alpha$  sarà quindi dato dalla relazione:

$$d = D_{LP} \cdot \tan \alpha \approx 363.3 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot \tan\left(\frac{5''}{3600}\right) \approx 9 \text{ km}$$

12. Calcolare il potere risolutivo per osservazioni a  $5500 \text{ \AA}$  di un telescopio con apertura di 1.1 m posto sulla superficie della Terra.

**Soluzione**

Il potere risolutivo teorico  $\alpha$  in secondi d'arco alla lunghezza d'onda  $\lambda$  di un telescopio con apertura  $D$  vale:

$$\alpha = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot 206265 = 1.22 \cdot \frac{5500 \cdot 10^{-10} \text{ m}}{1.1 \text{ m}} \cdot 206265 \approx 0''.13$$

Tuttavia se il telescopio è posto sulla superficie della Terra il suo potere risolutivo effettivo sarà dell'ordine, in buona parte dei siti osservativi, di 1'' a causa degli effetti della turbolenza atmosferica.

13. Disponiamo di un telescopio riflettore Cassegrain con apertura di 15 cm e rapporto di apertura f/10. Per osservare visualmente con questo strumento abbiamo acquistato un set di tre oculari, che hanno tutti un campo di vista (FoV) di  $60^\circ$  e lunghezza focale, rispettivamente, di 4 mm, 10 mm e 20 mm. Calcolate la focale del telescopio, quanti ingrandimenti e che FoV otterremo utilizzando i tre oculari e con quale oculare potremo osservare l'intero disco lunare.

**Soluzione**

Il rapporto di apertura f/n indica quante volte (n) la focale del telescopio  $F_{Tel}$  è maggiore dell'apertura (ovvero del diametro dello specchio). Detta  $D$  l'apertura, la focale del nostro telescopio vale:

$$F_{Tel} = D \cdot 10 = 15 \text{ cm} \cdot 10 = 150 \text{ cm} = 1500 \text{ mm}$$

Detta  $f_{oc}$  la focale di un oculare, l'ingrandimento  $I$  che si ottiene da un telescopio è dato dalla relazione:

$$I = \frac{F_{Tel}}{f_{oc}}$$

Per ogni ingrandimento così ottenuto, detto  $FoV_{oc}$  il campo di vista dell'oculare, per il campo di vista  $FoV_{Tel}$  del telescopio vale la relazione:

$$FoV_{Tel} = \frac{FoV_{oc}}{I}$$

Gli ingrandimenti e i corrispondenti campi di vista del telescopio per i tre oculari valgono quindi:

$$\begin{aligned} I_{4mm} &= \frac{F_{Tel}}{f_{oc}} = \frac{1500 \text{ mm}}{4 \text{ mm}} = 375 & FoV_{4mm} &= \frac{FoV_{oculare}}{I_{4mm}} = \frac{60^\circ}{375} = 0^\circ.16 = 9'.6 \\ I_{10mm} &= \frac{F_{Tel}}{f_{oc}} = \frac{1500 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} = 150 & FoV_{10mm} &= \frac{FoV_{oculare}}{I_{10mm}} = \frac{60^\circ}{150} = 0^\circ.4 = 24' \\ I_{20mm} &= \frac{F_{Tel}}{f_{oc}} = \frac{1500 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 75 & FoV_{20mm} &= \frac{FoV_{oculare}}{I_{20mm}} = \frac{60^\circ}{75} = 0^\circ.8 = 48' \end{aligned}$$

Detti  $R_L$  il raggio della Luna e  $d_L$  la sua distanza media dalla Terra, il valore medio  $D_L$  del diametro apparente della Luna è dato dalla relazione:

$$D_L = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_L}{d_L}\right) \approx 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{1738 \text{ km}}{384.4 \cdot 10^3 \text{ km}}\right) \approx 31'.09$$

Quindi solo con il terzo oculare potremo osservarne l'intero disco.

**Nota.**

Da quanto sopra deduciamo che l'ingrandimento non è una caratteristica del telescopio, in quanto varia al variare della focale dell'oculare utilizzato. Esiste però un limite pratico alla possibilità di ingrandimento, che per un riflettore Cassegrain è all'incirca pari al diametro dello specchio espresso in millimetri. Quindi il nostro telescopio può essere ben utilizzato con l'oculare da 10 mm (=150 ingrandimenti), mentre oculari

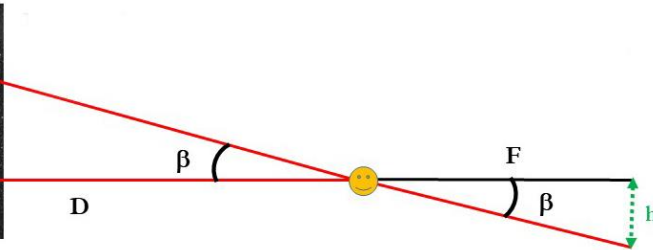
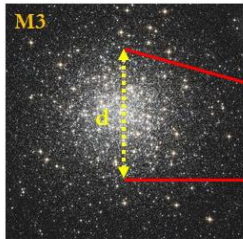
con focale via via più corta (come ad esempio quello da 4 mm) forniscono in realtà immagini di qualità sempre più scadente. L'ingrandimento massimo utilizzabile dipende anche dalla turbolenza atmosferica e dallo schema ottico del telescopio. In particolare i rifrattori non soffrono della notevole ostruzione dei Cassegrain dovuta al secondario e al suo supporto e permettono ingrandimenti maggiori.

14. L'ammasso globulare M3 dista dal Sole 10.5 kpc e ha un diametro apparente pari a 18.0'. Stimare il diametro dell'ammasso in anni luce. Se osservate l'ammasso con un telescopio con apertura di 1 m e rapporto focale f/10, quanto varranno le sue dimensioni lineari sul piano focale?

**Soluzione**

Detto  $\beta$  il diametro apparente e  $D$  la distanza, il diametro vero  $d$  dell'ammasso si ricava dalla relazione:

$$d = D \tan \beta \approx 10.5 \cdot 10^3 \cdot \tan 0^\circ.300 \approx 55.0 \text{ pc} \approx 179 \text{ anni luce}$$



Poiché il telescopio ha un'apertura  $A$  di 1m e un rapporto focale f/10, la sua lunghezza focale  $F$  vale:

$$F = A \cdot 10 = 10m$$

Detta  $h$  la dimensione lineare dell'immagine dell'ammasso sul piano focale del telescopio, si ha:

$$h = F \cdot \tan \beta \approx 10 \text{ m} \cdot \tan 0^\circ.300 \approx 0.052 \text{ m} = 5.2 \text{ cm}$$

15. Calcolare quale deve essere l'apertura minima di un radiotelescopio che osserva alla frequenza di 3.0 GHz, per risolvere due radiosorgenti distanti angularmente 6'.

**Soluzione**

Detta  $\nu$  la frequenza, la lunghezza d'onda  $\lambda$  della radiazione osservata è pari a:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \approx \frac{299792 \cdot 10^3 \frac{m}{s}}{3.0 \cdot 10^9 \text{ Hz}} \approx 0.10 \text{ m}$$

La separazione  $\alpha$  tra le due radiosorgenti vale:

$$\alpha = 6' = 360''$$

Quindi il diametro minimo  $D_m$  di un radiotelescopio in grado di risolverle è:

$$D_m = 1.22 \frac{\lambda}{\alpha \text{ (rad)}} = 1.22 \frac{\lambda}{\alpha''} \cdot 206265'' = 1.22 \frac{0.10 \text{ m}}{360''} \cdot 206265'' \approx 70 \text{ m}$$

16. Disponete di un telescopio con apertura 2.0 m posto in una località dove il seeing medio è di 1''. Osservando alla lunghezza d'onda di 5500 Å, quali dei seguenti oggetti potete risolvere?

1. una macchia solare con diametro pari a quello della Terra;
2. un cratere lunare con diametro di 500m.

**Soluzione**

1. Il potere risolutivo teorico  $\alpha$  in secondi d'arco alla lunghezza d'onda  $\lambda$  di un telescopio con apertura  $D$  vale:

$$\alpha = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot 206265'' = 1.22 \cdot \frac{5500 \cdot 10^{-10} \text{ m}}{2.0 \text{ m}} \cdot 206265'' \approx 0''.069$$

Tuttavia il potere risolutivo effettivo  $\alpha_e$  del nostro telescopio è limitato a 1'' a causa degli effetti della turbolenza atmosferica.

Detti  $d$  il diametro della macchia solare,  $D_\odot$  la distanza media Terra-Sole e  $\beta$  l'angolo sotteso dalla macchia osservata dalla Terra, trascurando le dimensioni della Terra e del Sole si ha in media:

$$\beta = \tan^{-1} \frac{d}{D_{\odot}} \approx \tan^{-1} \frac{12756 \text{ km}}{149.6 \cdot 10^6 \text{ km}} \approx 0^{\circ}.004885 = 17''.59$$

La macchia risulta quindi ben osservabile, in quanto il valore ottenuto è molto maggiore della risoluzione del telescopio anche tenendo conto degli effetti della turbolenza dell'atmosfera.

2. Detti  $K$  il diametro del cratere lunare,  $D_L$  la distanza media Terra-Luna e  $\gamma$  l'angolo sotteso dal cratere osservato dalla Terra, trascurando le dimensioni della Terra e della Luna si ha in media:

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{K}{D_L} \approx \tan^{-1} \frac{0.5 \text{ km}}{384.4 \cdot 10^3 \text{ km}} \approx 7^{\circ}.45 \cdot 10^{-5} \approx 0''.27$$

Poiché  $\gamma > \alpha$  il cratere sarebbe in teoria distinguibile, ma in pratica essendo  $\gamma < \alpha_e$  la turbolenza atmosferica ci impedisce di risolverlo.

17. Un aerostato ha un diametro di 14 m. In un certo istante un osservatore lo vede sovrapporsi esattamente alla Luna piena. Trascurando le dimensioni della Terra, a che distanza minima e massima può trovarsi l'osservatore dall'aerostato?

### Soluzione

Le distanze massima  $D_{LA}$ , ovvero all'apogeo, e minima  $D_{LP}$ , ovvero al perigeo, della Luna valgono:

$$D_{LA} = a_L (1 + e_L) \approx 384.4 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot (1 + 0.05490) \approx 405.5 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$D_{LP} = a_L (1 - e_L) \approx 384.4 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot (1 - 0.05490) \approx 363.3 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Detto  $R_L$  il raggio della Luna, le sue dimensioni angolari minima  $\alpha_{LA}$  e massima  $\alpha_{LP}$  valgono:

$$\alpha_{LA} = 2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{R_L}{D_{LA}} \right) \approx 2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{1738 \text{ km}}{405.5 \cdot 10^3 \text{ km}} \right) \approx 0^{\circ}.4911 \approx 29'.47$$

$$\alpha_{LP} = 2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{R_L}{D_{LP}} \right) \approx 2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{1738 \text{ km}}{363.3 \cdot 10^3 \text{ km}} \right) \approx 0^{\circ}.5482 \approx 32'.89$$

Indicando con  $K_A$  il diametro dell'aerostato, la distanza minima dell'osservatore dall'aerostato  $d_m$  si ha se la Luna si trova al perigeo, quella massima  $d_M$  se la Luna si trova all'apogeo. Tali distanze valgono:

$$d_m = \frac{K_A}{2 \sin \frac{\alpha_{LP}}{2}} \approx \frac{14 \text{ m}}{2 \sin 0^{\circ}.2741} \approx 1460 \text{ m}$$

$$d_M = \frac{K_A}{2 \sin \frac{\alpha_{LA}}{2}} \approx \frac{14 \text{ m}}{2 \sin 0^{\circ}.2456} \approx 1630 \text{ m}$$

18. Si considerino due stelle di magnitudine 3 e 10. Con un telescopio con apertura di 20 cm viene scattata una foto della prima stella con un tempo di esposizione di 3 secondi. Volendo scattare una foto alla seconda stella, quanto dovrà essere il tempo di esposizione se si vuole che questa appaia, sulla foto, brillante come la prima? Se invece si volesse mantenere lo stesso tempo di esposizione, di quanto dovrebbe aumentare il diametro dell'obiettivo?

### Soluzione

Dette  $m_1$  e  $m_2$  le magnitudini delle due stelle, possiamo ricavare il rapporto dei loro flussi  $F_1$  e  $F_2$ :

$$m_1 - m_2 = -7 = -2.5 \log \frac{F_1}{F_2}$$

da cui:

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{\left( \frac{m_2 - m_1}{2.5} \right)} = 10^{2.8} \approx 631$$



Se vogliamo che la seconda stella risulti luminosa come la prima dobbiamo riceverne lo stesso flusso. A parità di telescopio occorrerà aumentare il tempo di esposizione di un fattore pari al rapporto tra i flussi e quindi detti  $T_1$  e  $T_2$  i tempi di esposizione sarà:

$$T_2 = \frac{F_1}{F_2} \cdot T_1 \approx 631 \cdot 3 \text{ s} \approx 1893 \text{ s} \approx 31\text{m } 33\text{s}$$

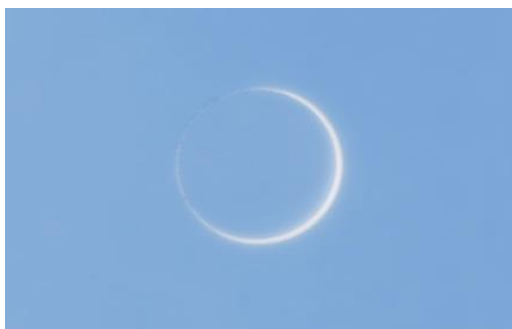
Se invece si cambia il diametro dell'obiettivo mantenendo il tempo di esposizione, si deve aumentare l'area del telescopio di un fattore pari al rapporto dei flussi. L'area di un telescopio è proporzionale al quadrato del suo raggio  $R$  e poiché il raggio è pari a metà dell'apertura  $D$  nel caso in esame avremo:

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \left(\frac{2 D_2}{2 D_1}\right)^2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \approx 631$$

da cui si ricava l'apertura  $D_2$  del telescopio che permette di raccogliere in 3 s da una stella di magnitudine 10 lo stesso flusso raccolto da un telescopio con apertura di 20 cm da una stella di magnitudine 3:

$$D_2 \approx \sqrt{631} \cdot D_1 \approx 25.1 \cdot D_1 \approx 502 \text{ cm}$$

19.



La foto a sinistra mostra il pianeta Venere osservato dalla Terra all'inizio del mese di giugno 2020. Il Sole illumina direttamente il bordo a destra di Venere, mentre il bordo sinistro risulta appena visibile grazie alla luce diffusa dall'atmosfera del pianeta.

1) A quale delle seguenti configurazioni era più vicina Venere? Giustificate la vostra risposta.

a) massima elongazione est; b) massima elongazione ovest;  
c) congiunzione inferiore; d) congiunzione superiore.

2) A quale dei seguenti valori era più prossima la distanza Venere-Terra quando è stata scattata la foto?

a) 0.277 UA b) 0.695 UA c) 1.72 UA

### Soluzione

1) Congiunzione inferiore.

Ciò in quanto Venere appare quasi in fase “nuova” con solo una piccolissima porzione direttamente illuminata. Alle massime elongazioni Venere appare in fase di “primo quarto” o di “ultimo quarto”, mentre quando si avvicina alla congiunzione superiore la sua fase è prossima a “piena”.

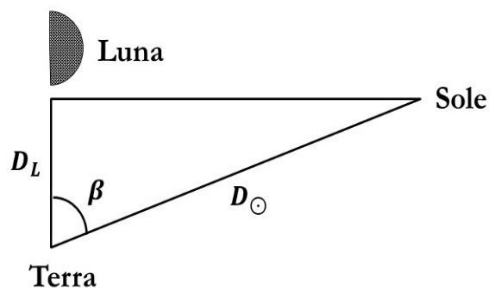
2) 0.277 UA.

Infatti in congiunzione inferiore, considerando orbite circolari, la distanza  $D_{VT}$  Venere-Terra è data semplicemente dalla differenza tra i semiassi maggiori dell'orbita della Terra  $a_T$  e di Venere  $a_V$ :

$$D_{VT} = a_T - a_V \approx 149.6 \cdot 10^6 \text{ km} - 108.2 \cdot 10^6 \text{ km} \approx 41.4 \cdot 10^6 \text{ km} \approx 0.277 \text{ UA}$$

20. Calcolare la distanza angolare media Luna-Sole quando la Luna è al primo quarto vista dalla Terra.

### Soluzione



Quando la Luna è al primo quarto Terra, Luna e Sole si trovano ai vertici di un triangolo rettangolo, con la Luna in corrispondenza all'angolo retto.

Detti  $D_L$  la distanza media Terra-Luna,  $D_{\odot}$  la distanza media Terra-Sole e  $\beta$  l'angolo tra Luna e Sole visti dalla Terra, si ha:

$$\beta = \arccos\left(\frac{D_L}{D_{\odot}}\right) = \arccos\left(\frac{384.4 \cdot 10^3 \text{ km}}{149.6 \cdot 10^6 \text{ km}}\right) \approx 89^{\circ} 51' 10''$$