Campionati Italiani di Astronomia
Corso di preparazione alla Gara Interregionale
Categoria Junior 2 - Lezione 3

1. Utilizzando le proprietà dei logaritmi in base 10 determinare:
1) log 10 = ? 2) log 1000 = ? 3) log 1 = ? 4) log (a · b) = ?

5) $\log \frac{a}{b}$ = ? 6) $\log (a)^3$ = ? 7) $\log 10^6$ = ? 8) $\log \sqrt{10}$ = ? 9) $\sqrt[4.7]{36.54}$ = ?

Soluzione
1) log 10 = 1 2) log 1000 = 3 3) log 1 = 0 4) log (a · b) = log a + log b

5) $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ 6) $\log (a)^3 = 3 \log a$ 7) $\log 10^6 = 6$ 8) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2} \log 10 = 0.5$

9) Poniamo $\sqrt[4.7]{36.54} = x$ e calcoliamo il logaritmo di ambo i membri:

$\frac{1}{4.7} \log 36.54 = \log x$ da cui: $0.3325 = \log x$ e passando agli esponenziali: $x = 10^{0.3325} = 2.150$

2. La stella Arturo (= α Boo) ha magnitudine apparente $m = -0.05$ e parallasse 0''.0880. Calcolate la sua distanza, in pc e in anni luce, e la sua magnitudine assoluta.

Soluzione
Dalla parallasse π di Arturo ricaviamo la distanza D in parsec e in anni luce:

$$D = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0''.0880} \simeq 11.4\ pc \simeq 11.4\ pc \cdot 3.2616\ \frac{anni\ luce}{pc} \simeq 37.2\ anni\ luce$$

La magnitudine assoluta **M** vale:

$$\mathrm{M = m + 5 - 5 \log D\ (pc)} \simeq -0.05 + 5 - 5.28 = -0.33$$

3. Completare la seguente tabella, dove m è la magnitudine apparente, π la parallasse, d la distanza e M la magnitudine assoluta.

Nome	m	π (")	d (pc)	d (al)	M
α Cen A	-0.01	0.747			
α CMa (= Sirio)	-1.43		2.63		
61 Cyg A	5.21			11.4	
α Aql (= Altair)		0.194			2.21

Soluzione
Le relazioni che legano tra di loro le quantità in tabella sono:

$$\frac{1}{\pi''} = \mathrm{d\ (pc)} \qquad \mathrm{d\ (al)} \simeq 3.2616\ \mathrm{d\ (pc)} \qquad \mathrm{M = m + 5 - 5 \log\ d\ (pc)}$$

Nome	m	π (")	d (pc)	d (al)	M
α Cen A	-0.01	0.747	1.34	4.37	4.35
α CMa (= Sirio)	-1.43	0.380	2.63	8.58	1.47
61 Cyg A	5.21	0.286	3.50	11.4	7.49
α Aql (= Altair)	0.77	0.194	5.15	16.8	2.21

4. Verificate la correttezza del valore della magnitudine assoluta del Sole ($M_\odot$) riportato nella Tabella dei dati, sapendo che dalla Terra la magnitudine apparente media del Sole è: $m_\odot = -26.74$.

Soluzione

Utilizzando i dati nella Tabella esprimiamo la distanza del Sole in parsec:

$$1 \text{ UA} = \frac{1}{206265} \; parsec$$

La magnitudine assoluta del Sole vale quindi:

$$\mathrm{M}_\odot = -26.74 + 5 \; - 5 \log\left(\frac{1}{206265}\right) \simeq \; 4.83$$

5. La magnitudine apparente del Sole visto dalla Terra è $\mathrm{m}_{\odot\mathrm{Terra}} = -26.74$. Calcolate la magnitudine apparente media del Sole visto da: Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno.

Soluzione

La relazione che lega la magnitudine apparente del Sole visto da un pianeta $\boldsymbol{m}_{\odot\mathbf{P}}$ a quella assoluta $\boldsymbol{M}_\odot$ è:

$$\mathrm{m}_\odot = \mathrm{M}_\odot - \; 5 + 5 \log \mathrm{d} \text{ (pianeta)}$$

Poiché $1 \, UA \simeq \frac{1}{206265} \; parsec \; \simeq 4.8481 \cdot 10^{-6} \, pc$ si ha:

$$\mathrm{M}_\odot = \mathrm{m}_{\odot\mathrm{Terra}} + \; 5 - 5 \log \mathrm{d} \; \simeq \; -26.74 + 5 - 5 \log \; (4.8481 \cdot 10^{-6}) \; \simeq 4.83$$

Poiché 1 km $\simeq \frac{1}{30857 \cdot 10^9}$ pc, per le distanze medie **d** dei pianeti dal Sole in parsec e per la magnitudine apparente del Sole visto da essi avremo:

Pianeta	d (pc)	$\mathrm{m}_\odot$
Mercurio	$1.877 \cdot 10^{-6}$	-28.80
Venere	$3.507 \cdot 10^{-6}$	-27.45
Marte	$7.386 \cdot 10^{-6}$	-25.83
Giove	$2.523 \cdot 10^{-5}$	-23.16
Saturno	$4.625 \cdot 10^{-5}$	-21.84

6. Si calcoli la differenza di magnitudine tra la Luna Piena osservata al perigeo e la Luna Piena osservata all'apogeo.

Soluzione

Trascurando la differenza del flusso solare incidente nei due casi (la differenza tra la distanza della Luna al perigeo e all'apogeo è circa $2.9 \cdot 10^{-4}$ la distanza della Terra dal Sole) il flusso riflesso dalla Luna, a parità di condizioni osservative, dipende unicamente dalla superficie visibile ed è ad essa proporzionale.
Dette $\mathbf{d}_{\mathbf{ALuna}}$ e $\mathbf{d}_{\mathbf{PLuna}}$ le distanze della Luna all'apogeo e al perigeo, i raggi apparenti della Luna all'apogeo $\mathbf{R}_{\mathbf{ALuna}}$ e al perigeo $\mathbf{R}_{\mathbf{PLuna}}$ sono dati da:

$$\mathrm{R}_{\mathrm{ALuna}} = \; \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R}_{\mathrm{Luna}}}{\mathrm{d}_{\mathrm{ALuna}}}\right) \simeq \; \sin^{-1}\left(\frac{1738}{405.7 \cdot 10^3}\right) \; \simeq \; 14'.73$$

$$\mathrm{R}_{\mathrm{PLuna}} \; = \; \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R}_{\mathrm{Luna}}}{\mathrm{d}_{\mathrm{PLuna}}}\right) \simeq \; \sin^{-1}\left(\frac{1738}{363.1 \cdot 10^3}\right) \; \simeq \; 16'.46$$

Quindi l'area del disco lunare all'apogeo $\mathbf{A}_{\mathbf{ALuna}}$ e al perigeo $\mathbf{A}_{\mathbf{PLuna}}$ vale:

$$\mathrm{A}_{\mathrm{ALuna}} \; = \; \pi \, {\mathrm{R}_{\mathrm{ALuna}}}^2 \simeq 681.6 \, arcmin^2 \qquad \mathrm{A}_{\mathrm{PLuna}} \; = \pi \, {\mathrm{R}_{\mathrm{PLuna}}}^2 \; \simeq 851.2 \, arcmin^2$$

La differenza di magnitudine $\boldsymbol{\Delta m}$ vale quindi:

$$\Delta \text{m} = m_p - m_A - 2.5 \log \frac{\text{F}_\text{P}}{\text{F}_\text{A}} \simeq \; - 2.5 \log \frac{851.2 \, arcmin^2}{681.6 \, arcmin^2} \simeq - 2.5 \log 1.249 \simeq -0.24$$

In alternativa, considerando che il flusso diminuisce con l'inverso del quadrato della distanza si ha:

$$\Delta \text{m} = m_p - m_A = -2.5 \log \frac{\text{F}_\text{P}}{\text{F}_\text{A}} = \; - 2.5 \log \frac{\text{d}_{\text{ALuna}}{}^2}{\text{d}_{\text{PLuna}}{}^2} = - 5 \log \frac{\text{d}_{\text{ALuna}}}{\text{d}_{\text{PLuna}}} \simeq - 5 \log 1.117 \simeq -0.24$$

7. Sirio (= α CMa; $m = \; -1.43$) si trova a 8.58 anni luce dal Sole. Quanto varrebbe la magnitudine apparente di Sirio se si trovasse a una distanza dieci volte maggiore?

Soluzione

Detta $\boldsymbol{m_d}$ la magnitudine di Sirio alla distanza **d** = 8.58 anni luce, possiamo calcolare la sua magnitudine assoluta **M**:

$$\text{M} = \; m_d + 5 - 5 \log d \; (pc) \simeq -1.43 + 5 - 5 \log \left(\frac{8.58 \; anni \; luce}{3.2616 \; \frac{anni \; luce}{parsec}} \right) \simeq \; 1.47$$

Quindi la magnitudine $\boldsymbol{m_D}$ che avrebbe Sirio se si trovasse alla distanza **D** = 85.8 anni luce sarebbe:

$$m_D = M - 5 + 5 \; log \; D \; (pc) \; \simeq 1.47 - 5 + 5 \log \left(\frac{85.8 \; anni \; luce}{3.2616 \; \frac{anni \; luce}{parsec}} \right) \simeq \; 3.57$$

Soluzione alternativa

Detti $\boldsymbol{m_d}$ la magnitudine di Sirio alla distanza **d** = 8.58 anni luce, $\boldsymbol{m_D}$ la magnitudine che avrebbe se si trovasse alla distanza **D** = 85.8 anni luce, $\boldsymbol{L_{Sirio}}$ la luminosità di Sirio e $\boldsymbol{F_d}$ e $\boldsymbol{F_D}$ i flussi in arrivo a Terra nei due casi, vale la relazione:

$$\text{m}_\text{d} - \; \text{m}_\text{D} = \; -2.5 \log \frac{\text{F}_\text{d}}{\text{F}_\text{D}} = \; -2.5 \log \; \frac{\text{L}_{\text{Sirio}}}{4 \; \pi \; \text{d}^2} \cdot \frac{4 \; \pi \; \text{D}^2}{\text{L}_{\text{Sirio}}}$$

da cui si ricava:

$$\text{m}_\text{D} = \; \text{m}_\text{d} + 2.5 \log \frac{\text{D}^2}{\text{d}^2} = \; -1.43 + 5 \log 10 = 3.57$$

Nota. Generalmente si assume $\boldsymbol{m_{limite}} = 6.0$ come limite di visibilità a occhio nudo nelle migliori condizioni osservative, quindi Sirio risulterebbe ancora visibile.

8. A partire da quale distanza non potremmo più osservare il Sole a occhio nudo trovandoci su un pianeta la cui atmosfera ha le stesse caratteristiche di quella della Terra?

Soluzione

La magnitudine limite $\boldsymbol{m_{limite}}$ delle stelle visibili a occhio nudo dipende fortemente dalla composizione dell'atmosfera e dalla quota a cui si trova l'osservatore. Normalmente per un osservatore posto a livello del mare in assenza di inquinamento luminoso si assume:

$$\boldsymbol{m_{limite}} \simeq \; 6.0$$

Per il pianeta possiamo ragionevolmente assumere lo stesso valore.

Data una certa magnitudine assoluta, la magnitudine apparente di un oggetto aumenta all'aumentare della sua distanza. Quindi se nella relazione che lega la magnitudine assoluta del Sole $\mathbf{M}_\odot$ con la sua magnitudine apparente $\mathbf{m}_\odot$ e la sua distanza **d** poniamo $\text{m}_\odot = 6$, otteniamo la distanza massima $\boldsymbol{d_{max}}$ dalla quale il Sole sarebbe ancora visibile a occhio nudo:

$$m_\odot = M_\odot - 5 + 5\log d$$

$$6.0 = M_\odot - 5 + 5\log d_{max}$$

$$d_{max} \simeq 10^{\left(\frac{6.0 - M_\odot + 5}{5}\right)} \simeq 10^{\left(\frac{6.0-4.83+5}{5}\right)} \simeq 17 \text{ pc} \simeq 56 \text{ anni luce}$$

9. Se potessero essere osservate individualmente, le componenti di una binaria spettroscopica avrebbero magnitudini apparenti pari a 3.74 e 4.15. Quanto vale la magnitudine apparente totale della binaria spettroscopica?

Soluzione

La magnitudine totale di due o più stelle NON è la somma delle singole magnitudini, ma la risposta del rivelatore (ad es. il nostro occhio) alla somma dei flussi delle singole stelle.

Si può dimostrare che per calcolare la magnitudine totale $\mathbf{m_T}$ di due stelle di magnitudine $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ possiamo usare una delle due seguenti relazioni:

$$m_T = -2.5\log\left(10^{-0.4\, m_1} + 10^{-0.4\, m_2}\right)$$

$$m_T = m_2 - 2.5\log\left(10^{0.4\,(m_2 - m_1)} + 1\right)$$

ottenendo:

$$m_T = -2.5\log\left(10^{-1.496} + 10^{-1.66}\right) \simeq 3.17$$

$$m_T = 4.15 - 2.5\log\left(10^{0.4\,(4.15 - 3.74)} + 1\right) \simeq 3.17$$

Nota 1.

In generale la magnitudine totale di due o più stelle è un valore numericamente minore della magnitudine della stella più luminosa

Nota 2.

La prima delle due relazioni per il calcolo di m_T è utile quando si devono sommare i flussi di più di due stelle. Nel caso di due stelle è spesso di più rapido utilizzo la seconda formula, che si ottiene come segue dalla definizione di magnitudine:

$$m_T = -2.5\log\left(F_1 + F_2\right) \qquad \text{e} \qquad m_1 - m_2 = -2.5\log\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

Dalla seconda relazione si ricava $F_1 = F_2 \cdot 10^{-0.4\,(m_1 - m_2)}$ e sostituendo nella prima otteniamo:

$$m_T = -2.5\log\left(F_2 \cdot 10^{-0.4\,(m_1 - m_2)} + F_2\right) = -2.5\log F_2 - 2.5\log\left(10^{-0.4\,(m_1 - m_2)} + 1\right)$$

$$m_T = m_2 - 2.5\log\left(10^{0.4\,(m_2 - m_1)} + 1\right)$$

Relazione che si può ricavare nella forma del tutto equivalente:

$$m_T = m_1 - 2.5\log\left(10^{0.4\,(m_1 - m_2)} + 1\right)$$

10. Da una stella γ riceviamo sulla Terra un flusso luminoso 8560 volte minore rispetto a quello di una stella β. Se la magnitudine apparente della stella β è 2.86, calcolare la magnitudine apparente della stella γ.

Soluzione

Detti $\mathbf{F_\gamma}$ e $\mathbf{F_\beta}$ i flussi ricevuti dalle due stelle, la loro differenza di magnitudine apparente vale:

$$m_\gamma - m_\beta = -2.5\log\frac{F_\gamma}{F_\beta} = -2.5\log\frac{1}{8560} \simeq 9.83$$

La magnitudine apparente della stella γ vale quindi:

$$m_\gamma = m_\beta + 9.83 \simeq 12.69$$

11. Disponiamo di un telescopio riflettore Cassegrain con apertura di 15 cm e rapporto di apertura f/10. Per osservare visualmente con questo strumento abbiamo acquistato un set di tre oculari, che hanno tutti un campo di vista (FoV) di 60° e lunghezza focale, rispettivamente, di 4 mm, 10 mm e 20 mm. Calcolate la focale del telescopio, quanti ingrandimenti e che FoV otterremo utilizzando i tre oculari e con quale oculare potremo osservare l'intero disco lunare.

Soluzione

Il rapporto di apertura f/n indica quante volte (n) la focale del telescopio $\boldsymbol{F_{Tel}}$ è maggiore dell'apertura (ovvero del diametro dello specchio). Detta **D** l'apertura, la focale del nostro telescopio vale:

$$F_{Tel} = D \cdot 10 = 15\ \mathrm{cm} \cdot 10 = 150\ \mathrm{cm} = 1500\ \mathrm{mm}$$

Detta f_{oc} la focale di un oculare, l'ingrandimento **I** che si ottiene da un telescopio è dato dalla relazione:

$$I = \frac{F_{Tel}}{f_{oc}}$$

Per ogni ingrandimento così ottenuto, detto $\mathbf{FoV_{oc}}$ il campo di vista dell'oculare, per il campo di vista $\mathbf{FoV_{Tel}}$ del telescopio vale la relazione:

$$FoV_{Tel} = \frac{FoV_{oc}}{I}$$

Gli ingrandimenti e i corrispondenti campi di vista del telescopio per i tre oculari valgono quindi:

$$I_{4mm} = \frac{F_{Tel}}{f_{oc}} = \frac{1500\ \mathrm{mm}}{4\ \mathrm{mm}} = 375 \qquad FoV_{4mm} = \frac{FoV_{oculare}}{I_{4mm}} = \frac{60°}{375} = 0°.16 = 9'.6$$

$$I_{10mm} = \frac{F_{Tel}}{f_{oc}} = \frac{1500\ \mathrm{mm}}{10\ \mathrm{mm}} = 150 \qquad FoV_{10mm} = \frac{FoV_{oculare}}{I_{10mm}} = \frac{60°}{150} = 0°.4 = 24'$$

$$I_{20mm} = \frac{F_{Tel}}{f_{oc}} = \frac{1500\ \mathrm{mm}}{20\ \mathrm{mm}} = 75 \qquad FoV_{20mm} = \frac{FoV_{oculare}}{I_{20mm}} = \frac{60°}{75} = 0°.8 = 48'$$

Detti $\mathbf{R_L}$ il raggio della Luna e $\mathbf{d_L}$ la sua distanza media dalla Terra, il valore medio $\mathbf{D_L}$ del diametro apparente della Luna è dato dalla relazione:

$$D_L = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_L}{d_L}\right) \simeq 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{1738\ \mathrm{km}}{384.4 \cdot 10^3\ km}\right) \simeq 31'.09$$

Quindi solo con il terzo oculare potremo osservarne l'intero disco.

Nota.

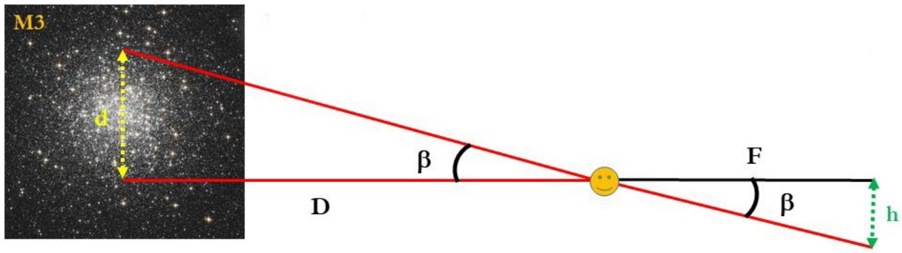
Notiamo che l'ingrandimento non è una caratteristica del telescopio, in quanto varia al variare della focale dell'oculare utilizzato. Esiste però un limite pratico alla possibilità di ingrandimento, che per un riflettore Cassegrain è all'incirca pari al diametro dello specchio espresso in millimetri. Quindi il nostro telescopio può essere ben utilizzato con l'oculare da 10 mm (=150 ingrandimenti), mentre oculari con focale via via più corta (come ad esempio quello da 4 mm) forniscono in realtà immagini di qualità sempre più scadente. L'ingrandimento massimo utilizzabile dipende anche dalla turbolenza atmosferica e dallo schema ottico del telescopio. In particolare i rifrattori non soffrono della notevole ostruzione dei Cassegrain dovuta al secondario e al suo supporto e permettono ingrandimenti maggiori.

12. L'ammasso globulare M3 dista dal Sole 10.5 kpc e ha un diametro apparente pari a 18.0'. Stimate il diametro dell'ammasso in anni luce. Se osservate l'ammasso con un telescopio con apertura di 1 m e rapporto focale f/10, quanto varranno le sue dimensioni lineari sul piano focale?

Soluzione

Detto $\boldsymbol{\beta}$ il diametro apparente e $\boldsymbol{D}$ la distanza, il diametro vero $\boldsymbol{d}$ dell'ammasso si ricava dalla relazione:

$$d = D \tan\beta \simeq 10.5 \cdot 10^3\ \mathrm{pc} \cdot \tan 0°.300 \simeq 55.0\ \mathrm{pc} \simeq 179\ \text{anni luce}$$



Poiché il telescopio ha un'apertura **A** di 1m e un rapporto focale f/10, la sua lunghezza focale **F** vale:

$$F = A \cdot 10 = 10m$$

Detta **h** la dimensione lineare dell'immagine dell'ammasso sul piano focale del telescopio, si ha:

$$\mathrm{h = F \cdot \ tan\,\beta \ \simeq 10\ m\ \cdot tan\,0°.300\ \ \simeq 0.052\ m = \ 5.2\ cm}$$

13. Una foto della Luna al perigeo mostra al centro del disco lunare un cratere di forma circolare le cui dimensioni angolari sono 5". Quanto vale il diametro del cratere in km?

Soluzione

Poiché il cratere è al centro del disco, trascuriamo gli effetti dovuti alla sfericità della Luna. Detti $\boldsymbol{a_L}$ ed $\boldsymbol{e_L}$ il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita della Luna, la distanza $\boldsymbol{D_{LP}}$ della Luna al perigeo vale:

$$D_{LP} = \ a_L\,(1 - \ e_L) \ \simeq 384.4\ \cdot\ 10^3\ km\ \cdot(1 - \ 0.05490)\ \simeq 363.3\ \cdot\ 10^3\ km$$

Il diametro **d** del cratere di dimensioni angolari $\boldsymbol{\alpha}$ sarà quindi dato dalla relazione:

$$\mathrm{d = \ D_{LP}\ \cdot tan\,\alpha\ \simeq 363.3\ \cdot\ 10^3\ km\ \cdot\ \ tan\left(\frac{5"}{3600}\right)\ \ \simeq\ 9\ km}$$

Nota.

La distanza $\mathbf{D_{LP}}$ così calcolata è quella tra il centro della Terra e il centro della Luna. Per ottenere la minima distanza a cui un osservatore potrebbe trovarsi dalla superficie della Luna, e quindi le dimensioni minime del cratere, occorre sottrarre a tale distanza i raggi della Terra e della Luna. Tuttavia data la precisione con cui sono note le dimensioni angolari del cratere il valore finale del diametro non cambia.

14.

La foto a sinistra mostra il pianeta Venere osservato dalla Terra all'inizio del mese di giugno 2020. Il Sole illumina direttamente il bordo a destra di Venere, mentre il bordo sinistro risulta appena visibile grazie alla luce diffusa dall'atmosfera del pianeta.

1) A quale delle seguenti configurazioni era più vicina Venere? Giustificate la vostra risposta.

a) massima elongazione est; b) massima elongazione ovest;
c) congiunzione inferiore; d) congiunzione superiore.

2) A quale dei seguenti valori era più prossima la distanza Venere-Terra quando è stata scattata la foto?
a) 0.277 UA b) 0.695 UA c) 1.72 UA

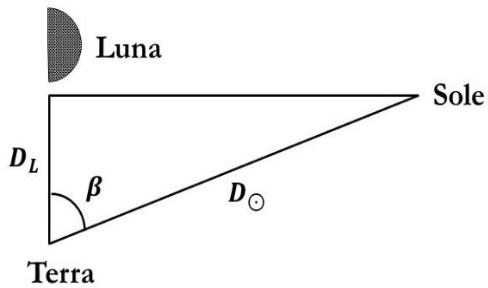
Soluzione

1) Congiunzione inferiore.
   Ciò in quanto Venere appare quasi in fase "nuova", con solo una piccolissima porzione direttamente illuminata. Alle massime elongazioni Venere appare in fase di "primo quarto" o di "ultimo quarto", mentre quando si avvicina alla congiunzione superiore la sua fase è prossima a "piena".
2) 0.277 UA.
   Infatti in congiunzione inferiore, considerando orbite circolari, la distanza $\boldsymbol{D_{VT}}$ Venere-Terra è data semplicemente dalla differenza tra i semiassi maggiori dell'orbita della Terra $\boldsymbol{a_T}$ e di Venere $\boldsymbol{a_V}$:

$$\mathrm{D_{VT} = \ a_T\ -\ a_V\ \simeq 149.6\ \cdot\ 10^6\ km - \ 108.2\ \cdot\ 10^6\ km\ \simeq 41.4\ \cdot\ 10^6\ km \simeq 0.277\ UA}$$

15. Calcolare la distanza angolare media Luna-Sole quando la Luna è al primo quarto vista dalla Terra.

Soluzione



Quando la Luna è al primo quarto Terra, Luna e Sole si trovano ai vertici di un triangolo rettangolo, con la Luna in corrispondenza all'angolo retto.

Detti $\boldsymbol{D_L}$ la distanza media Terra-Luna, $\boldsymbol{D_\odot}$ la distanza media Terra-Sole e $\boldsymbol{\beta}$ l'angolo tra Luna e Sole visti dalla Terra, si ha:

$$\beta = \arccos\left(\frac{D_L}{D_\odot}\right) = \arccos\left(\frac{384.4 \cdot 10^3\ km}{149.6 \cdot 10^6\ km}\right) \simeq 89°\,51'10''$$

16. Un aerostato ha un diametro di 14 m. In un certo istante un osservatore lo vede sovrapporsi esattamente alla Luna piena. Trascurando le dimensioni della Terra, a che distanza minima e massima può trovarsi l'osservatore dall'aerostato?

Soluzione

Le distanze massima $\mathbf{D_{LA}}$, ovvero all'apogeo, e minima $\mathbf{D_{LP}}$, ovvero al perigeo, della Luna valgono:

$$D_{LA} = a_L\,(1 + e_L) \simeq 384.4 \cdot 10^3\ km \cdot (1 + 0.05490) \simeq 405.5 \cdot 10^3\ km$$

$$D_{LP} = a_L\,(1 - e_L) \simeq 384.4 \cdot 10^3\ km \cdot (1 - 0.05490) \simeq 363.3 \cdot 10^3\ km$$

Detto $\mathbf{R_L}$ il raggio della Luna, le sue dimensioni angolari minima $\boldsymbol{\alpha_{LA}}$ e massima $\boldsymbol{\alpha_{LP}}$ valgono:

$$\alpha_{LA} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_L}{D_{LA}}\right) \simeq 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{1738\ \mathrm{km}}{405.5 \cdot 10^3\ km}\right) \simeq 0°.4911 \simeq 29'.47$$

$$\alpha_{LP} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_L}{D_{LP}}\right) \simeq 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{1738\ \mathrm{km}}{363.3 \cdot 10^3\ km}\right) \simeq 0°.5482 \simeq 32'.89$$

Indicando con $\mathbf{K_A}$ il diametro dell'aerostato, la distanza minima dell'osservatore dall'aerostato $\mathbf{d_m}$ si ha se la Luna si trova al perigeo, quella massima $\mathbf{d_M}$ se la Luna si trova all'apogeo. Tali distanze valgono:

$$d_m = \frac{K_A}{2\sin\frac{\alpha_{LP}}{2}} \simeq \frac{14\ m}{2\sin 0°.2741} \simeq 1460\ m$$

$$d_M = \frac{K_A}{2\sin\frac{\alpha_{LA}}{2}} \simeq \frac{14\ m}{2\sin 0°.2456} \simeq 1630\ m$$