# XXI Campionati Italiani di Astronomia

## Finale Nazionale - 19 aprile 2023

## Categoria Senior

### 1. Karel e Corty in vacanza

La gattina Karel è in vacanza presso l'Osservatorio di Greenwich, mentre lo scoiattolo rosso Corty, suo amico, si trova presso l'Osservatorio di Mauna Kea (latitudine = +19° 49'; longitudine = 155° 29' Ovest). Quando per Karel, il 19 aprile 2023, il tempo universale è di 9h 22m, quanto vale il tempo solare medio per Corty? Indicate data e ora.

**Soluzione**

La longitudine dell'Osservatorio di Greenwich è $\lambda_G = 0°$. Detta $\boldsymbol{\lambda_t}$ la longitudine in unità di tempo di una data località, la relazione che lega il tempo solare medio $\mathbf{T_{SM}}$ in tale località al tempo universale UT è:

$$T_{SM} = UT \pm \lambda_t$$

dove per la longitudine il segno è positivo se la località si trova a est di Greenwich e negativo se si trova a ovest.
Detta $\boldsymbol{\lambda_{MK}}$ la longitudine in gradi di Mauna Kea e $\boldsymbol{\lambda_{MK-T}}$ il suo valore in unità di tempo, quest'ultimo vale:

$$\lambda_{MK-T} = \frac{\lambda_{MK}\, 24^h \cdot}{360°} \simeq \frac{155°.48\ \cdot 24^h}{360°} \simeq 10^h.37\ \simeq 10^h\, 22^m$$

e quindi, poiché Mauna Kea si trova a ovest di Greenwich:

$$T_{SM} = UT - \lambda_{MK-T}\ \simeq 9^h\, 22^m - 10^h\, 22^m = -1^h = 23^h \text{ del 18 aprile 2023}$$

### 2. Una binaria sui binari

Un sistema binario è composto da una stella di sequenza principale e da una nana bianca. Di questo sistema, che si trova a una distanza di 100 pc dal Sole, vengono misurati il periodo orbitale, pari a 1.72 giorni, e la massima separazione angolare tra le componenti, pari a $3.6 \cdot 10^{-4}$ secondi d'arco.
Da misure spettroscopiche si ricava che le orbite delle due stelle attorno al centro di massa sono circolari, che il piano delle orbite coincide esattamente con la direzione di osservazione e che il valore della velocità orbitale attorno al centro di massa della stella di sequenza principale è di 77 km/s.

1. Calcolate la massa totale del sistema in kg e in masse solari.
2. Calcolate la massa delle due componenti in kg e in masse solari.
3. Dite quale, tra i seguenti, è il tipo spettrale della stella di sequenza principale: M2, K4, G1, A8.

**Soluzione**

1. Detta **D** la distanza del sistema e $\boldsymbol{\alpha}$ la separazione angolare massima tra le componenti, la distanza lineare **a** tra le due stelle vale:

$$a = D\ \cdot \tan\alpha\ \simeq 100\text{ pc}\ \cdot 30857\ \cdot\ 10^9\ \frac{\text{km}}{\text{pc}}\ \cdot \tan\frac{3''.6\ \cdot\ 10^{-4}}{3600\ ''/°}\ \simeq 5.4\ \cdot\ 10^6\text{ km} =\ 5.4\ \cdot\ 10^9\text{ m}$$

   Dette $\mathbf{M_{SP}}$ e $\mathbf{M_{NB}}$ le masse della stella di sequenza principale e della nana bianca, $\mathbf{M_\odot}$ la massa del Sole e **T** il periodo orbitale, la massa totale del sistema $\mathbf{M_{TOT}}$ vale:

$$M_{TOT} =\ M_{SP}\ +\ M_{NB} = \frac{4\pi^2\, a^3}{G\, T^2} \simeq \frac{4\pi^2 \cdot 1.6 \cdot 10^{29}\text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2} \cdot 2.21\ \cdot\ 10^{10}\, s^2} \simeq 4.3 \cdot 10^{30}\text{ kg}\ \simeq 2.2\ M_\odot$$

2. Le distanze $\mathbf{d_{SP}}$ e $\mathbf{d_{NB}}$ delle due componenti dal centro di massa sono inversamente proporzionali alle loro masse, e la loro somma è pari ad **a**, per cui si ha:

$$M_{SP} : M_{NB} = d_{NB} : d_{SP}$$

   e applicando la proprietà del comporre:

$$(M_{SP} + M_{NB}) : M_{NB} = (d_{NB} + d_{SP}) : d_{SP}$$

$$M_{TOT} : M_{NB} = a : d_{SP}$$

$$M_{NB} = \frac{M_{TOT} \cdot d_{SP}}{a}$$

Possiamo ricavare $\mathbf{d_{SP}}$ dal valore $\mathbf{v_{SP}}$ della velocità orbitale della stella di sequenza principale, in quanto questo valore corrisponde al raggio di un'orbita percorsa con detta velocità in un tempo pari a **T**:

$$d_{SP} = \frac{v_{SP}\, T}{2\pi}$$

abbiamo quindi:

$$M_{NB} = \frac{M_{TOT} \cdot v_{SP} \cdot T}{2\pi\, a} = \frac{4.3 \cdot 10^{30}\ \text{kg} \cdot 77 \cdot 10^{3}\ \frac{m}{s} \cdot 1.49 \cdot 10^{5}\ \text{s}}{2\pi \cdot 5.4 \cdot 10^{9}\ \text{m}} \simeq 1.5 \cdot 10^{30}\ \text{kg} \simeq 0.73\ M_{\odot}$$

$$M_{SP} = M_{TOT} - M_{NB} \simeq 4.3 \cdot 10^{30}\ \text{kg} - 1.5 \cdot 10^{30}\ \text{kg} \simeq 2.8 \cdot 10^{30}\ \text{kg} \simeq 1.4\ M_{\odot}$$

3. Il valore della massa della stella di sequenza principale è maggiore della massa del Sole, quindi, tra quelle proposte, l'unico tipo spettrale a cui può appartenere è A8.

### 3. Corty osserva il cielo

Lo scoiattolo rosso Corty si trova nella sua casa di Cortina d'Ampezzo (latitudine = +46° 32') e osserva una stella che passa al meridiano allo zenit a UT = 0h 0m 0s. Successivamente, a UT = 6h 30m 31s, Corty osserva una seconda stella passare al meridiano in direzione sud a un'altezza di 20° sull'orizzonte. Corty vuole calcolare la distanza angolare tra le due stelle. Per far questo gli viene in aiuto Karel, che gli ricorda che la distanza angolare $\Upsilon_{AB}$ (in gradi) tra due stelle A e B con declinazione rispettivamente $\delta_A$ e $\delta_B$ e differenza di ascensione retta $\Delta\alpha$ (in gradi) è data dalla relazione $\Upsilon_{AB} = \arccos(\cos \Delta\alpha \cdot \cos \delta_A \cdot \cos \delta_B + \text{sen}\, \delta_A \cdot \text{sen}\, \delta_B)$. Quanto vale la distanza angolare tra le due stelle osservate da Corty?

**Soluzione**

Indichiamo con $\boldsymbol{\alpha_A}$, $\boldsymbol{\alpha_B}$, $\boldsymbol{\delta_A}$ e $\boldsymbol{\delta_B}$ ascensione retta e declinazione delle due stelle.

Detta $\boldsymbol{\varphi}$ la latitudine di Cortina, poiché la prima stella passa al meridiano allo zenith di Cortina si ha:

$$\delta_A = \varphi = 46°\ 32'$$

Quando la seconda stella passa al meridiano in direzione sud (il che significa che $\varphi > \delta_B$) la sua altezza sull'orizzonte è massima $\mathbf{h_{maxB}}$ ed è legata alla sua declinazione dalla relazione:

$$h_{maxB} = 90° - \varphi + \delta_B$$

da cui si ricava:

$$\delta_B = h_{maxB} - 90° + \varphi = 20° - 90° + 46°\ 32' = -23°\ 28'$$

La relazione che lega la differenza di ascensione retta $\boldsymbol{\Delta\alpha}$ di due stelle alla differenza $\boldsymbol{\Delta t_S}$ di tempo siderale del loro passaggio al meridiano è:

$$\Delta\alpha = \Delta t_S$$

La relazione che lega la differenza di tempo siderale $\mathbf{\Delta t_S}$ alla differenza **ΔUT** di Tempo Universale (o di tempo solare medio) è:

$$\Delta t_S = \frac{\Delta UT}{K}$$

dove il fattore di conversione **K** è dovuto al fatto che la sfera celeste effettua una rotazione completa in $23^h\ 56^m\ 4.1^s$ e dunque in un anno solare di n giorni ci sono n+1 giorni siderali:

$$K = \frac{365.25636}{366.25636} \simeq 0.99726967$$

avremo quindi:

$$\Delta\alpha = \Delta t_S = \frac{\Delta UT}{K} \simeq \frac{6^h\,30^m\,31^s}{0.99726967} \simeq 6^h.5264 \simeq 6^h\,31^m\,35^s$$

Questa differenza di ascensione retta espressa in unità di tempo può essere espressa in gradi $\Delta\alpha(°)$ utilizzando la proporzione:

$$\frac{\Delta\alpha}{24^h} = \frac{\Delta\alpha(°)}{360°}$$

da cui ricaviamo:

$$\Delta\alpha(°) = \frac{360° \cdot \Delta\alpha}{24^h} \simeq \frac{360° \cdot 6^h.5264}{24^h} \simeq 97°.896$$

Utilizzando la formula suggerita da Karel avremo infine:

$$\gamma_{AB} = \arccos\ (\cos\Delta\alpha(°) \cdot \cos\delta_A \cdot \cos\delta_B + \operatorname{sen}\delta_A \cdot \operatorname{sen}\delta_B)$$

$$\gamma_{AB} \simeq \arccos\ [\cos 97°.896 \cdot \cos 46°.533 \cdot \cos\ (-23°.467) + \operatorname{sen} 46°.533 \cdot \operatorname{sen}(-23°.467)]$$

$$\gamma_{AB} \simeq \arccos\,[-0.13738 \cdot 0.68794 \cdot 0.91729 + 0.72577 \cdot (-0.39822)]$$

$$\gamma_{AB} \simeq \arccos\,[-0.086692 - 0.28902] \simeq \arccos\ (-0.37571)$$

$$\gamma_{AB} \simeq 112°.07 = 112°\,4'\,6''$$

**4. La sorellina di Sirio**

Sirio (α CMa) è una stella binaria il cui centro di massa si trova a una distanza di 8.61 anni luce dal Sole. La componente principale, Sirio A, è una stella di sequenza principale, mentre la sua compagna, Sirio B, è una stella piuttosto peculiare. Infatti Sirio B ha una massa pari a 1.02 volte quella del Sole e una temperatura della fotosfera di $25.0 \cdot 10^3$ K, ma la sua magnitudine apparente è solo 5.96.

1. Calcolate la densità media di Sirio B in $kg/m^3$ e in $g/cm^3$.
2. Che tipo di stella è Sirio B?

**Soluzione**

1. Nota la distanza $\mathbf{D}$ del sistema e la magnitudine apparente $\mathbf{m_B}$ di Sirio B, possiamo calcolare la sua magnitudine assoluta $\mathbf{M_B}$:

$$M_B = m_B + 5 - 5\log D\,(pc) \simeq 5.96 + 5 - 5\log\left(\frac{8.61\ anni\ luce}{3.2616\ \frac{anni\ luce}{parsec}}\right) \simeq 8.85$$

Detti $\mathbf{R_B}$ il suo raggio e $\mathbf{T_B}$ la temperatura della sua fotosfera, la luminosità $\mathbf{L_B}$ di Sirio B si calcola dalla formula di Stefan-Boltzmann:

$$L_B = 4\pi\sigma\, R_B^2\, T_B^4$$

Detti $\mathbf{R_\odot}$, $\mathbf{T_\odot}$ e $\mathbf{L_\odot}$ il raggio, la temperatura della fotosfera e la luminosità del Sole, per la differenza tra la magnitudine assoluta di Sirio B e quella $\mathbf{M_\odot}$ del Sole vale la relazione:

$$M_B - M_\odot = -2.5\log\frac{L_B}{L_\odot} = -2.5\log\frac{4\pi\sigma\, R_B^2\, T_B^4}{4\pi\sigma\, R_\odot^2\, T_\odot^4}$$

da cui si può ricavare il raggio di Sirio B:

$$M_B - M_\odot = -5\log\frac{R_B\ T_B^2}{R_\odot\, T_\odot^2} \qquad\qquad 10^{\frac{M_\odot - M_B}{5}} = \frac{R_B\ T_B^2}{R_\odot\, T_\odot^2}$$

$$R_B = R_\odot\left(\frac{T_\odot}{T_B}\right)^2 10^{\frac{M_\odot - M_B}{5}} \simeq$$

$$\simeq 6.955 \cdot 10^5\ km\left(\frac{5778\ K}{25.0 \cdot 10^3\ K}\right)^2 10^{\frac{4.83-8.85}{5}} \simeq 5.83 \cdot 10^3\ km$$

e infine, detta $\mathbf{M_S}$ la massa del Sole, la densità media $\boldsymbol{\rho_B}$ di Sirio B vale:

$$\rho_B = \frac{1.02 \cdot \mathbf{M_S}}{\frac{4}{3}\,\pi\, R_B^3} \simeq$$

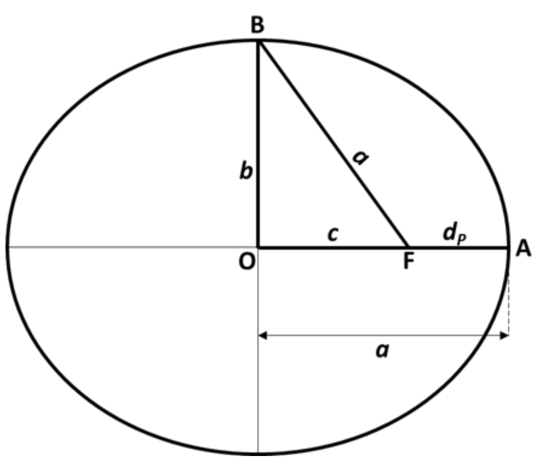
$$\simeq \frac{1.02 \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\, kg}{\frac{4}{3}\,\pi \cdot 1.98 \cdot 10^{20}\, m^3} \simeq 2.45 \cdot 10^9\, \frac{kg}{m^3} = 2.45 \cdot 10^9\, \frac{10^3}{10^6}\, \frac{g}{cm^3} = 2.45 \cdot 10^6\, \frac{g}{cm^3}$$

2. Abbiamo ricavato che Sirio B è una stella il cui raggio è poco inferiore a quello della Terra, ma la cui massa è simile a quella del Sole. Questo fa sì che la sua densità risulti elevatissima. Inoltre, Sirio B ha una temperatura molto elevata, simile a quella delle stelle dei primi tipi della classe spettrale B. Tutte queste caratteristiche sono tipiche di quelle che vengono chiamate "nane bianche".

**5. L'ellisse impossibile**

Per un qualsiasi corpo di massa trascurabile in orbita attorno al Sole:
1. dimostrate con argomenti geometrici che un'orbita il cui semiasse minore è pari alla distanza al perielio è un'orbita circolare;
2. dimostrate con argomenti algebrici che un'orbita il cui semiasse minore è pari alla distanza al perielio è un'orbita circolare;
3. dimostrate con argomenti algebrici che un'orbita il cui semiasse minore è pari alla distanza all'afelio è un'orbita circolare.

**Soluzione**




1. Con riferimento alla figura a sinistra, consideriamo i parametri tipici di un'orbita ellittica indicando con:
   - O il centro dell'ellisse;
   - F il suo fuoco;
   - A e B i punti in cui gli assi intersecano l'ellisse;
   - OA il semiasse maggiore (di lunghezza **a**);
   - OB il semiasse minore (di lunghezza **b**);
   - OF la semidistanza interfocale (di lunghezza **c** );
   - FA la distanza al perielio (di lunghezza $\mathbf{d_P}$).

   In particolare si vede che: OA = a = OF + FA = c + $d_P$

   Inoltre, se l'orbita non è circolare deve essere c > 0

Poiché l'ellisse è, per definizione, il luogo dei punti per cui la somma delle distanze dai fuochi è costante e vale 2a, ricaviamo che: FB = a

Se imponiamo che il semiasse minore dell'ellisse sia pari alla distanza al perielio avremo:

FA = OB = b

Si verificherebbe allora la seguente eguaglianza:

OA = OF + OB = c + b = a

D'altro canto, il triangolo OFB ha come lati:

OF = c      OB = b      FB = a

Ma una proprietà fondamentale dei triangoli impone che <u>qualsiasi lato è minore della somma degli altri due</u>, cioè in particolare:

c + b > a

che è in contraddizione con essere c > 0.

L’uguaglianza FA = b si verifica quindi solo se il triangolo OFB degenera nel lato a, sul quale si schiacciano i lati b e c, il che equivale a deformare l’ellisse finché si ottiene c = 0 e b = a, ***ottenendo quindi un’orbita circolare, come volevasi dimostrare.***

2. Ricordiamo le espressioni che legano il semiasse minore **b** e la distanza al perielio $\mathbf{d_P}$ all’eccentricità **e** e al semiasse maggiore **a** dell’ellisse:

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

$$d_P = a(1-e)$$

Se vogliamo che sia $\mathbf{b} = \mathbf{d_P}$, otteniamo l’equazione:

$$a\sqrt{1-e^2} = a\,(1-e)$$

Semplificando **a** ed elevando al quadrato ambo i membri, otteniamo:

$$1-e^2 = (1-e)^2$$

al primo membro abbiamo la differenza di due quadrati e quindi otteniamo:

$$(1+e)(1-e) = (1-e)^2$$

L’equazione si semplifica con la condizione che l’eccentricità sia diversa da 1, ottenendo:

$$1+e = 1-e \qquad\qquad con \;\; e \neq 1$$

se ne ricava infine:

$$2e = 0 \qquad \rightarrow \qquad e = 0$$

**ovvero un’orbita circolare, come volevasi dimostrare.**

3. Ricordiamo le espressioni che legano il semiasse minore **b** e la distanza all’afelio $\mathbf{d_A}$ all’eccentricità **e** e al semiasse maggiore **a** dell’ellisse:

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

$$d_A = a(1+e)$$

Se vogliamo che sia $\mathbf{b} = \mathbf{d_A}$, otteniamo l’equazione:

$$a\sqrt{1-e^2} = a\,(1+e)$$

$$\sqrt{(1+e)(1-e)} = 1+e$$

Avendo semplificato **a** ed elevando al quadrato ambo i membri, otteniamo:

$$(1+e)(1-e) = (1+e)^2$$

da cui:

$$1-e = 1+e \qquad\qquad con \;\; e \neq 1$$

se ne ricava nuovamente:

$$2e = 0 \qquad \rightarrow \qquad e = 0$$

**ovvero un’orbita circolare, come volevasi dimostrare.**

**NOTA**

Sia per via geometrica, sia per via algebrica, esistono diversi altri metodi di soluzione. Quelli qui proposti sono solo due esempi di essi.