Campionati Italiani di Astronomia 2023
Corso di preparazione alla Finale Nazionale
Categoria Junior 2 - Lezione 3

1. Dimostrate che per un osservatore nell'emisfero Boreale la Luna Piena raggiunge la sua massima altezza sull'orizzonte in inverno. Stimate il valore minimo e massimo dell'altezza della Luna Piena al meridiano per un osservatore posto al Polo Nord.

Soluzione

La Luna Piena si trova in direzione esattamente opposta al Sole. L'inclinazione della sua orbita rispetto all'eclittica è di circa 5°. Per un osservatore nell'emisfero Boreale il Sole raggiunge la declinazione massima $\delta_{\odot max} = +23° \, 26'$ in estate e quindi la Luna Piena avrà declinazione minima $\delta_{Lmin} = -23° \, 26' \pm 5°$. Il Sole raggiunge la declinazione minima $\delta_{\odot min} = -23° \, 26'$ in inverno e quindi la Luna Piena avrà declinazione massima $\delta_{Lmax} = +23° \, 26' \pm 5°$.

L'altezza sull'orizzonte di un astro al passaggio al meridiano dipende dalla sua declinazione $\boldsymbol{\delta}$ e dalla latitudine $\boldsymbol{\varphi}$ a cui si trova l'osservatore. Per un osservatore nell'emisfero Boreale ($0° < \varphi \leq 90°$) si ha allora che per l'altezza massima della Luna vale la relazione:

$$\mathrm{h_{max-L}} = 90° - \varphi + \delta_{\mathrm{Lmax}}$$

e quindi la Luna Piena raggiunge la sua massima altezza sull'orizzonte in inverno.

Per l'altezza massima $\boldsymbol{h_{max-Lp}}$ e minima $\boldsymbol{h_{min-Lp}}$ della Luna per un osservatore posto al polo valgono le relazioni:

$$\mathrm{h_{max-Lp}} = 90° - \varphi + \delta_{\mathrm{Lmax}} = 90° - 90° + 23° \, 26' + 5° = +28° \, 26'$$

$$\mathrm{h_{min-Lp}} = 90° - \varphi - \delta_{\mathrm{Lmin}} = 90° - 90° - 23° \, 26' - 5° = -28° \, 26'$$

2. Il 21 marzo 2013 un osservatore nei pressi di Catania (λ = 15° 4' 27") ha visto la Luna sorgere sul mare alle 19:00. Sapendo che in quella data era in vigore l'ora legale, stimate la fase della Luna quando quest'osservazione è stata fatta. Commentate quali dei dati forniti concorrono e come alla soluzione.

Soluzione

Il 21 marzo il Sole si trova in prossimità del Punto **γ** e quindi la sua declinazione è circa zero. In questo periodo dell'anno la lunghezza del giorno è pari a quella della notte a tutte le latitudini e il Sole tramonta, per un osservatore posto al centro di un dato fuso orario e trascurando l'equazione del tempo, alle 18, ovvero alle 19 se è in vigore l'ora legale. Poiché la Luna sorgeva quando il Sole tramontava, si trovava in direzione opposta al Sole e quindi la sua fase era molto prossima a piena.

Importanza dei dati:

- Dalla data del 21 marzo ricaviamo che la declinazione del Sole era prossima a zero.
- Dalla longitudine di Catania deduciamo che la differenza dell'ora locale rispetto all'ora solare del meridiano centrale è piccola.
- Dal sapere che era in vigore l'ora legale deduciamo che il Sole tramontava circa alle 19:00.
- Dal sapere che la Luna sorgeva sul mare possiamo escludere che l'osservatore avesse davanti a sé delle montagne o altre ostruzioni, che avrebbero comportato vederla sorgere più tardi.

3. Quanto dovrebbe valere l'obliquità dell'eclittica per poter osservare da Catania (φ = +37° 31') il 21 giugno il fenomeno del "Sole di mezzanotte"? Quanto varrebbe con questo valore di obliquità l'altezza del Sole al meridiano di Catania in direzione sud ai solstizi e agli equinozi? Trascurate gli effetti dovuti alla rifrazione e alle dimensioni apparenti del Sole.

Soluzione

Per essere osservabile a mezzanotte occorre che il Sole sia visibile quando transita al meridiano in direzione nord, ovvero che risulti circumpolare. Indicando con $\boldsymbol{\varepsilon}$ l'obliquità dell'eclittica, la condizione richiesta equivale a poter osservare da Catania il Sole circumpolare il giorno in cui la sua declinazione $\boldsymbol{\delta_\odot}$ è massima, cioè quando:

$$\delta_\odot = \varepsilon$$

In una località a latitudine $\boldsymbol{\varphi}$ una stella è circumpolare quando:

$$\delta \geq 90° - \varphi$$

quindi a Catania il Sole alla sua massima declinazione risulterebbe circumpolare per:

$$\varepsilon = 90° - \varphi = 90° - 37°\,31' = 52°\,29'$$

L'altezza di un oggetto con declinazione $\boldsymbol{\delta}$ che transita al meridiano in direzione sud è la sua altezza massima $\mathbf{h_{max}}$ ed è data dalla relazione:

$$h_{max} = 90° - \varphi + \delta$$

Con il valore di $\boldsymbol{\varepsilon}$ che rende il Sole circumpolare a Catania il 21 giugno ai solstizi e agli equinozi si ha:

Solstizio estate	Equinozio di autunno	Solstizio d'inverno	Equinozio di primavera
$\delta_\odot = \varepsilon = 52°\,29'$	$\delta_\odot = 0°$	$\delta_\odot = -\varepsilon = -52°\,29'$	$\delta_\odot = 0°$
$h_{max-\odot} =$ $90° - 37°31' + 52°29'$ $= 104°58'$	$h_{max-\odot} =$ $90° - 37°31' + 0°$ $= 52°\,29'$	$h_{max-\odot} =$ $90° - 37°31' - 52°29'$ $= 0°$	$h_{max-\odot} =$ $90° - 37°31' + 0°$ $= 52°\,29'$

Quindi al solstizio d'estate il Sole culminerebbe oltre lo zenith, mentre sarebbe sull'orizzonte al solstizio d'inverno. Se osserviamo il fenomeno del Sole di mezzanotte il 21 giugno, il Sole sarebbe al massimo sull'orizzonte (trascurando le dimensioni angolari) al solstizio di inverno. Notiamo infine che l'altezza massima agli equinozi resta invariata, in quanto trovandosi sull'equatore celeste $\boldsymbol{\delta_\odot}$ non dipende da $\boldsymbol{\varepsilon}$.

4. Nel 1100 A.C. degli astronomi cinesi misurarono l'altezza massima del Sole al meridiano ai solstizi, ottenendo 79° 7' e 31° 19'. In entrambi i casi il Sole era a sud dello zenith. A quale latitudine furono eseguite queste osservazioni? Quanto valeva all'epoca l'obliquità dell'eclittica?

Soluzione.

Gli astronomi si trovavano sicuramente nell'emisfero nord. Dette $\boldsymbol{\varepsilon}$ l'obliquità dell'eclittica e $\boldsymbol{\varphi}$ la latitudine del luogo, poiché il Sole culminava a sud dello zenith, le altezze massime al solstizio d'estate $\boldsymbol{h_{\odot 21-G}}$ e a quello d'inverno $\boldsymbol{h_{\odot 21-D}}$ sono date dalle relazioni:

$$h_{\odot 21-G} = 90° - \varphi + \varepsilon \qquad h_{\odot 21-D} = 90° - \varphi - \varepsilon$$

Quindi sottraendo membro a membro risulta che:

$$\varepsilon = \frac{h_{\odot 21-G} - h_{21\odot-D}}{2} = \frac{79°\,7' - 31°\,19'}{2} = 23°\,54'$$

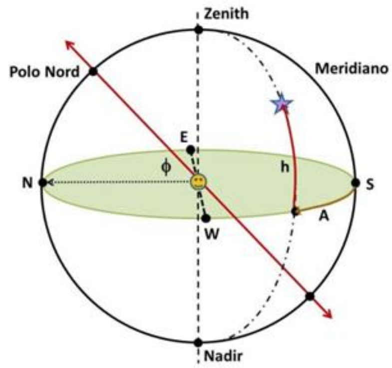
e inoltre:

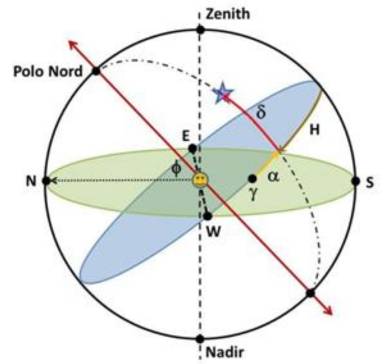
$$\varphi = 90° - h_{21\odot-G} + \varepsilon = 90° - 79°\,7' + 23°\,54' = 34°\,47'$$

Notiamo che il valore dell'obliquità dell'eclittica dall'anno 1100 A.C. a oggi è diminuito di 28'.

5. Scrivete le coordinate altazimutali e orarie dei punti cardinali Est e Ovest, del Polo Nord celeste e dello Zenith per un osservatore posto a Catania ($\boldsymbol{\varphi}$ = +37° 31').

Soluzione





I quattro punti di cui si chiedono le coordinate sono fissi, non partecipano cioè al moto diurno; quindi le loro coordinate altazimutali (azimut $\boldsymbol{A}$ e altezza $\boldsymbol{h}$) e orarie (angolo orario $\boldsymbol{H}$ e declinazione $\boldsymbol{\delta}$) restano costanti.

Per un osservatore nell'emisfero Boreale, la latitudine del luogo è pari alla distanza angolare tra l'orizzonte e il polo Nord contata dal punto cardinale Nord e alla distanza angolare tra l'equatore celeste e lo zenith. Ricordiamo inoltre che tutti i cerchi verticali passano per lo zenith e tutti i cerchi orari passano per i poli.
L'azimut e l'altezza si contano in gradi, l'azimut dal punto cardinale sud in senso orario, l'altezza dall'orizzonte. L'angolo orario si conta in ore dal meridiano in senso orario, la declinazione in gradi dall'equatore celeste. Avremo quindi:

	A	h	H	$\boldsymbol{\delta}$
Est	270°	0°	18h	0°
Ovest	90°	0°	6h	0°
Polo Nord	180°	37° 31'	imprecisato	90°
Zenith	imprecisato	90°	0h	37° 31'

6. Dall' "Isola che non c'è" è possibile osservare la Polare alta sull'orizzonte e inoltre l'altezza massima raggiuta dal Sole al meridiano il 21 giugno vale 90°. Determinare la latitudine a cui si trova l' "Isola che non c'è" e l'altezza massima e minima sull'orizzonte della Polare (δ_{Polare}= 89° 16').

Soluzione
Anche se molto vicina al polo nord celeste, l'attuale Stella Polare non coincide perfettamente con esso (infatti ha δ_{Polare}= 89° 16'), pertanto ruota anch'essa attorno al polo celeste e la sua altezza sull'orizzonte dell'osservatore varierà tra un valore massimo e un valore minimo.
Poiché osserviamo la Polare alta sull'orizzonte, l' "Isola che non c'è" si trova certamente nell'emisfero Boreale. L'altezza massima del Sole $\mathrm{h}_{\max-\odot}$ in una località a latitudine φ il 21 giugno vale:

$$\mathrm{h}_{\max-\odot} = 90° - \varphi + 23°\,26'$$

da cui, poiché $\mathrm{h}_{\max-\odot} = 90°$, ricaviamo la latitudine dell' "Isola che non c'è":

$$\varphi = 23°\,26'$$

Una stella con $\delta > \varphi$ culmina più a nord dello zenith e l'altezza massima $\mathrm{h}_{\max}$ e minima $\mathrm{h}_{\min}$ sono contate a partire dal punto cardinale nord e valgono:

$$\mathrm{h}_{\max} = 90° + \varphi - \delta$$

$$\mathrm{h}_{\min} = -90° + \varphi + \delta$$

Per la polare osservata dall' "Isola che non c'è" avremo:

$$\mathrm{h}_{\max-\mathrm{Polare}} = 90° + 23°\,26' - 89°\,16' = 24°\,10'$$

$$\mathrm{h}_{\min-\mathrm{Polare}} = -90° + 23°\,26' + 89°\,16' = 22°\,42'$$

7. Un osservatore posto sul meridiano di Greenwich misura per una stella un angolo orario di 2h. Nello stesso istante un secondo osservatore misura per la stessa stella un angolo orario di 4h 15m. A che longitudine si trova il secondo osservatore?

Soluzione

Osservando nello stesso istante una data stella, una differenza di angolo orario ΔH equivale a una differenza in longitudine $\Delta\lambda$ dei due osservatori pari a:

$$\Delta\lambda = \frac{360° \cdot \Delta H}{24h}$$

ovvero nel caso in esame:

$$\Delta\lambda = \frac{360° \cdot 2.25h}{24h} = 33°.75 = 33°\,45'$$

Poiché il secondo osservatore misura un angolo orario maggiore, vuol dire che si trova a est del meridiano di Greenwich e quindi la sua longitudine è: $\lambda = 33°\,45'$.

8. Un astronomo nota che il suo orologio a tempo siderale si è fermato. Suggerite un metodo con cui l'astronomo, che dispone di un telescopio, può autonomamente sincronizzare con buona precisione il suo orologio con il tempo siderale (senza ricorrere cioè a interventi esterni).
Sapendo che il telescopio ha un'apertura di 0.15 m, osservando alla lunghezza d'onda di 5500 Å l'astronomo riuscirà a risolvere una binaria visuale composta da 2 stelle che hanno una separazione angolare, viste dalla Terra, di 1".2?

Soluzione.

Il tempo siderale $\boldsymbol{t}$ è definito come l'angolo orario del punto $\boldsymbol{\gamma}$. Se di una stella conosciamo l'ascensione retta $\boldsymbol{\alpha}$ e ne misuriamo l'angolo orario $\mathbf{H}$, vale la relazione:

$$t = \alpha + H$$

Quando una stella passa al meridiano il suo angolo orario è nullo. Quindi in ogni istante passano al meridiano le stelle la cui ascensione retta è pari al tempo siderale. L'astronomo potrà regolare l'orologio a tempo siderale sul valore dell'ascensione retta di una stella e farlo ripartire nell'istante in cui osserverà con il suo telescopio detta stella passare al meridiano.
La risoluzione $\boldsymbol{\theta}$ in secondi d'arco di un telescopio di apertura $\mathbf{D}$ per osservazioni alla lunghezza d'onda $\boldsymbol{\lambda}$ vale:

$$\theta = 1.22\,\frac{\lambda}{D} \cdot 206265'' = \frac{1.22 \cdot 5500 \cdot 10^{-10}\ \text{m} \cdot 206265''}{0.15\ \text{m}} = 0''.92$$

Quindi, poiché la risoluzione del telescopio è minore della separazione angolare delle due stelle della binaria, l'astronomo riuscirà a distinguerle.

9. Si considerino due località A e B sulla Terra, con la seconda a ovest rispetto alla prima. Detti $\boldsymbol{t_A}$ e $\boldsymbol{t_B}$ i valori del tempo siderale e $\boldsymbol{UT_A}$ e $\boldsymbol{UT_B}$ i valori del tempo universale nelle due località, dire se le affermazioni $\boldsymbol{t_A = t_B}$ e $\boldsymbol{UT_A = UT_B}$ sono corrette.

Soluzione.

Il tempo siderale dipende dalla longitudine dell'osservatore. Consideriamo una stella di ascensione retta $\boldsymbol{\alpha}$ visibile da entrambe le località. Se la stella passa al meridiano in direzione sud nella località A al tempo $\boldsymbol{t_A}$, vale la relazione:

$$\boldsymbol{t_A = \alpha}$$

Poiché la località B si trova a ovest di A, e poiché la rotazione della Terra è da ovest verso est, la stella vista da B passerà al meridiano in un tempo successivo. Ne segue che:

$$\boldsymbol{t_A > t_B}$$

È invece vera l'affermazione $\boldsymbol{UT_A = UT_B}$, perché, per definizione, il Tempo Universale è lo stesso in tutti i luoghi della Terra.

10. Osservate che una stella sull'equatore celeste sorge quando il vostro orologio a tempo siderale segna 5h. Quanto vale l'ascensione retta della stella? Assumete di trovarvi al livello del mare e trascurate la rifrazione atmosferica.

Soluzione

La declinazione della stella è pari a zero poiché si trova sull'equatore celeste. Al momento in cui sorge, il suo angolo orario $\boldsymbol{H}$ vale:

$$H = -6h$$

il segno è negativo poiché la stella è a est del meridiano.

Detti $\boldsymbol{t}$ il tempo siderale e $\boldsymbol{\alpha}$ l'ascensione retta della stella, vale la relazione:

$$\mathrm{t} = \alpha + \mathrm{H}$$

da cui ricaviamo:

$$\alpha = t - H = 5h + 6h = 11h$$

11. Calcolare il tempo siderale di Greenwich quando presso l'European Southern Observatory di La Silla (Cile; λ = 70° 43' 53" W, φ = 29° 15' 40".2 S) il tempo siderale locale è 10h 15m 45s.

Soluzione

In ogni istante, detto $\boldsymbol{t_s}$ il tempo siderale locale è $\boldsymbol{TSG}$ il tempo siderale di Greenwich, vale la relazione:

$$t_s = TSG \pm \lambda$$

dove la longitudine $\boldsymbol{\lambda}$ (trasformata in tempo) è da considerare con segno negativo se la località è a ovest di Greenwich (come in questo caso) e con segno positivo se la località è a est di Greenwich.

Trasformiamo la longitudine di La Silla in unità di tempo **X** dalla relazione:

$$360° : 24h = \lambda : X$$

$$X = \frac{\lambda \cdot 24\,h}{360°} = \frac{70°\,43'\,53'' \cdot 24h}{360°} \simeq \frac{70°.7314 \cdot 24h}{360°} \simeq 4^h.7154 \simeq 4h\ 42m\,56s$$

e quindi:

$$TSG = t_s + X \simeq 10h\,15m\,45s + 4h\,42m\,56s \simeq 14h\,58m\,41s$$

12. Quanto valgono per un osservatore posto alla latitudine +42° la declinazione, l'angolo orario e l'ascensione retta dello zenith in un certo istante? Di quanto varia dopo 24h di tempo solare medio l'ascensione retta dello zenith?

Soluzione

Per ogni latitudine $\boldsymbol{\varphi}$ la declinazione dello zenith $\boldsymbol{\delta_Z}$ è pari alla latitudine.

Nel caso in esame quindi:

$$\delta_Z = \mathbf{42°}$$

e rimane costante al passare del tempo, a meno degli effetti dovuti alla precessione e alla variazione dell'obliquità dell'eclittica.

L'angolo orario $\boldsymbol{H_Z}$ dello zenith è costante e vale:

$$\mathrm{H_Z} = \mathbf{0°}$$

poiché, per definizione, il meridiano del luogo passa per lo zenith.

L'ascensione retta dello zenith $\boldsymbol{AR_Z}$ varia in modo continuo a causa della rotazione della Terra ed è in ogni istante pari al tempo siderale locale:

$$\boldsymbol{AR_Z} = \textbf{tempo siderale locale (LST)}$$

poiché, per definizione, a ogni istante passano al meridiano le stelle con ascensione retta pari al tempo siderale.
Infine, a causa della differenza tra giorno solare e giorno siderale, dopo 24h di tempo solare medio l'ascensione retta dello zenith $\boldsymbol{AR_{Z+24h}}$ sarà:

$$\boldsymbol{AR_{Z+24h}} \simeq \boldsymbol{AR_Z} + \mathbf{3m\ 56s}$$

cioè aumentata di circa 3m 56s rispetto al giorno precedente.

13. Il 21 agosto 2017 alle 13:30 di ora locale in una città posta sul meridiano centrale del fuso orario $\mathrm{UT} - 5$ è stata osservata un'eclisse totale di Sole. Stimare la fase che aveva la Luna osservata dalla stessa località il 26 agosto 2018 alle UT = 00:00. Per il periodo sinodico della Luna si assuma $P_{sin} = 29.53$ giorni.

Soluzione
Poiché è stata osservata un'eclisse totale di Sole, nella data e nell'ora indicata la Luna era nuova. Noto il tempo locale **LT** dell'eclisse e il fuso orario del luogo di osservazione, possiamo calcolare il Tempo Universale $\boldsymbol{UT_E}$ al momento dell'eclisse, che, essendo la località posta sul meridiano centrale e a ovest di Greenwich, vale semplicemente:

$$\mathrm{UT_E} = \mathrm{LT} + 5 = 13{:}30 + 5 = 18{:}30$$

Il numero di giorni $\mathbf{\Delta T}$ trascorsi tra le 18:30 UT del 21 agosto 2017 e le 00:00 UT del 26 agosto 2018 è:

$$\Delta T = 1\ anno + 4\ giorni + 5.5\ h = 369.23\ giorni$$

Questo tempo corrisponde a un numero $\mathbf{N_L}$ di lunazioni:

$$\mathrm{N_L} = \frac{\Delta \mathrm{T}}{\mathrm{P_{sin}}} \simeq \frac{369.23}{29.53} \simeq 12.50$$

Poiché sono trascorsi 12 periodi sinodici e mezzo, vuol dire che la Luna era piena.

14. Il tempo siderale a Greenwich il 18 febbraio 2003 alle 00h:00m di Tempo Universale era di 9h 50m 12s. A che Tempo Universale è passata quel giorno al meridiano di Greenwich in direzione sud una stella circumpolare con ascensione retta di 22 h? Sapendo che la magnitudine apparente della stella era 1.5, dite se poteva essere osservata a occhio nudo all'istante del passaggio al meridiano.

Soluzione.
Ogni istante passano al meridiano in direzione sud le stelle la cui ascensione retta $\boldsymbol{\alpha}$ è pari al tempo siderale.
Quindi quando la stella è passata al meridiano il tempo siderale locale **t** era:

$$t = \alpha = 22h$$

In quel momento il tempo siderale $\mathbf{\Delta t}$ trascorso dalle ore 00h:00m di Tempo Universale (**UT**) era:

$$\Delta t = 22h - 9h\ 50m\ 12s = 12h\ 09m\ 48s$$

Per trasformare questo intervallo di tempo siderale Δt in intervallo di tempo universale $\mathbf{\Delta UT}$, ricordiamo che 24h di tempo siderale corrispondono a 23h 56m 4.1s di tempo universale, quindi la costante di proporzionalità **K** tra tempo siderale e tempo universale è:

$$\mathrm{K} = \frac{23\mathrm{h}\ 56\mathrm{m}\ 4.1\ \mathrm{s}}{24\mathrm{h}} \simeq \frac{23.9345}{24} \simeq 0.99727$$

Detto UT l'ora in cui la stella transita al meridiano avremo:

$$\mathrm{UT} = 00\mathrm{h}00\mathrm{m} + \Delta\mathrm{UT} = \Delta\mathrm{t} \cdot \mathrm{K}$$

$$\mathrm{UT} \simeq 12\mathrm{h}\ 09\mathrm{m}\ 48\mathrm{s} \cdot 0.99727 \simeq 12.1633\ \mathrm{h} \cdot 0.99727 \simeq 12.1301\ \mathrm{h} \simeq 12\mathrm{h}\ 7\mathrm{m}\ 48\mathrm{s}$$

Poiché la stella è circumpolare a Greenwich e molto luminosa, sarebbe stata sicuramente visibile con il Sole a meno di circa 12 gradi sotto l'orizzonte (inizio del crepuscolo astronomico). Poiché il tempo solare medio è definito come l'angolo orario del Sole medio aumentato di 12h, trascurando l'equazione del tempo (il cui valore massimo è di circa 16 minuti), possiamo stimare che l'angolo orario del Sole vero $\boldsymbol{h}_{\odot}$ era:

$$\boldsymbol{h}_{\odot} \simeq \mathrm{UT} - 12\mathrm{h} \simeq 0\mathrm{h}$$

Quindi il Sole era in prossimità del passaggio al meridiano in direzione sud, ovvero ci si trovava in pieno giorno e quindi la stella, anche se molto luminosa, non poteva essere osservata a occhio nudo.

15. Attualmente la stella più vicina al polo nord celeste è α UMi, che viene chiamata Stella Polare. La stella più vicina al polo nord celeste nel 2800 A.C. era Thuban (= α Dra) con declinazione $\delta\, Thuban_{2800AC} = +89°\, 48'$. Nell'anno 2000 le declinazioni delle due stelle erano $\delta\, Polare_{2000} = +89°\, 16'$ e $\delta\, Thuban_{2000} = +64°\, 22'$. Calcolare l'altezza massima sull'orizzonte di α UMi nel 2800 A.C. per un osservatore posto a Cremona (φ = +45° 8'). Trascurate gli effetti dovuti al moto proprio delle due stelle.

Soluzione.

L'altezza massima sull'orizzonte $\boldsymbol{h_{max}}$ di una stella con declinazione $\boldsymbol{\delta}$ si ha in corrispondenza del suo passaggio al meridiano in direzione sud e da una località con declinazione $\boldsymbol{\varphi}$ vale:

$$\mathrm{h_{max}} = 90° - \varphi + \delta \qquad \text{se } \varphi > \delta$$

$$\mathrm{h_{max}} = 90° + \varphi - \delta \qquad \text{se } \varphi < \delta$$

Nel primo caso la stella culmina più a sud dello zenit, nel secondo più a nord e l'altezza sull'orizzonte viene contata dal punto cardinale nord.

Trascurando gli effetti del moto proprio, la distanza in declinazione $\boldsymbol{\Delta\delta}$ tra le due stelle rimane invariata nel tempo ed era quindi la stessa nel 2000 e nel 2800 A.C.:

$$\Delta\delta = \delta Polare_{2000} - \delta Thuban_{2000} = 89°\, 16' - 64°22' = 24°\, 54'$$

$$\Delta\delta = \delta Thuban_{2800AC} - \delta Polare_{2800AC} = 24°\, 54'$$

Poiché nel 2800 A.C. Thuban si trovava a 12' dal polo celeste, la declinazione della Polare era:

$$\delta Polare_{2800AC} = 90° - \Delta\delta - 12' = 90° - 24°\, 54' - 12' = 64°\, 54'$$

Poiché $\delta Polare_{2800AC} > \varphi$, a Cremona la polare culminava oltre lo zenith e quindi la sua altezza massima sull'orizzonte $\boldsymbol{h}\mathbf{P_{max\_2800AC}}$ valeva:

$$\mathrm{hP_{max\_2800AC}} = 90° + \varphi - \delta Polare_{2800AC} = 90° + 45°\, 8' - 64°\, 54' = 70°\, 14'$$