Campionati Italiani di Astronomia 2023
Corso di preparazione alla Finale Nazionale
Categorie Senior/Master - Lezione 2

1. Vista dalla Terra una stella ha magnitudine apparente 4.32. Sappiamo, da osservazioni spettroscopiche, che la temperatura della sua fotosfera è di 5000 K. Quanto dovrebbe valere la temperatura della fotosfera per osservare dalla Terra una magnitudine di 2.32?

Soluzione

Indicando con $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{d}$ il raggio, la temperatura e la distanza, con $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ le magnitudini apparenti di due stelle e con $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ i loro flussi, vale la relazione:

$$\mathrm{m_1 - m_2 = -2.5 \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = -2.5 \log\left(\frac{{R_1}^2 \cdot {T_1}^4}{{d_1}^2}\right)\left(\frac{{d_2}^2}{{R_2}^2 \cdot {T_2}^4}\right)}$$

Considerando le due stelle come se fossero la stessa stella ma a temperature diverse, si ha che la distanza e il raggio sono uguali e otteniamo quindi la relazione:

$$\mathrm{m_1 - m_2 = -2.5 \log \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4}$$

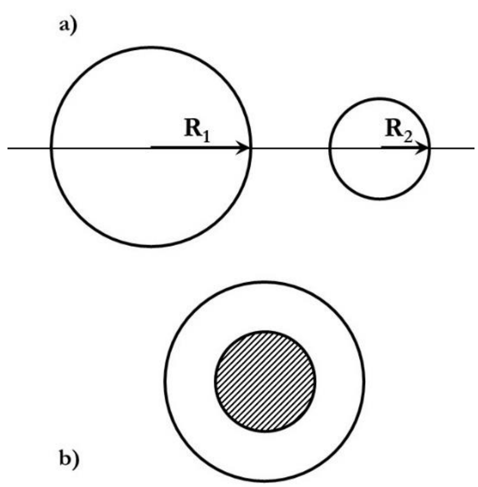
Detta $\boldsymbol{T_1}$ la temperatura della fotosfera per cui si ha $\mathrm{m_1} = 4.32$, possiamo ricavare la temperatura $\boldsymbol{T_2}$ per cui si ha $\mathrm{m_2} = 2.32$:

$$\mathrm{m_1 - m_2 = -10 \log \left(\frac{T_1}{T_2}\right)} \qquad \mathrm{\frac{m_2 - m_1}{10} = \log \left(\frac{T_1}{T_2}\right)}$$

$$T_2 = \frac{T_1}{10^{\frac{\mathrm{m_2 - m_1}}{10}}} = \frac{5000\ K}{10^{\frac{2.32\ -\ 4.32}{10}}} \simeq 7.92 \cdot 10^3\ K \simeq 7920\ K$$

2. Un sistema binario a eclisse è formato da due stelle con la stessa temperatura della fotosfera. Il raggio della prima stella è pari a quello del Sole, il raggio della seconda stella è pari a metà di quello del Sole. Il piano orbitale del sistema è parallelo alla direzione di osservazione dalla Terra. Di quanto varia, al massimo, la magnitudine della binaria a eclisse quando la seconda stella transita davanti alla prima?

Soluzione



Detta $\mathbf{T}$ la temperatura della fotosfera delle due stelle e $\boldsymbol{R_1}$ e $\boldsymbol{R_2}$ i rispettivi raggi (con $R_1 = 2\,R_2$), le luminosità $\boldsymbol{L_1}$ e $\boldsymbol{L_2}$ valgono:

$$L_1 = 4\,\pi\,{R_1}^2\,\sigma\,T^4 \qquad L_2 = 4\,\pi\,{R_2}^2\,\sigma\,T^4$$

La luminosità $\boldsymbol{L_{TOT}}$ del sistema fuori eclisse (configurazione **a** nella figura a sinistra) è massima e vale:

$$L_{TOT} = L_1 + L_2 = 4\,\pi\,({R_1}^2 + {R_2}^2)\,\sigma\,T^4$$

Per tutto il tempo dell'eclisse totale, in cui la seconda stella transitando risulta prospetticamente interamente "all'interno" della prima (configurazione **b** nella figura a sinistra), si avrà il minimo di luminosità del sistema $\boldsymbol{L_{Eclisse}}$ che vale:

$$L_{Eclisse} = 4\,\pi\,{R_1}^2\,\sigma\,T^4$$

Dette $\boldsymbol{m_{TOT}}$ la magnitudine del sistema nella configurazione **a** e $\boldsymbol{m_{Eclisse}}$ la magnitudine del sistema nella configurazione **b**, e ricordando che $R_1 = 2\,R_2$, la variazione di magnitudine $\boldsymbol{\Delta m}$ durante l'eclisse totale è data da:

$$\Delta m = m_{Eclisse} - m_{TOT} = -2.5 \log \frac{L_{Eclisse}}{L_{TOT}} = -2.5 \log \frac{{R_1}^2}{{R_1}^2 + {R_2}^2} = -2.5 \log \frac{4}{5} \simeq 0.24$$

Nota: poiché la temperatura della fotosfera delle due stelle è uguale, la stessa variazione di magnitudine si osserverà quando la seconda stella transita dietro la prima.

3. Con una magnitudine apparente di 1.25, Deneb (= $\boldsymbol{\alpha}$ Cyg) è la 19.ma stella più luminosa del cielo. La sua distanza non è ben nota, ma si stima essere di circa $2.60 \cdot 10^3$ anni luce; la temperatura della sua fotosfera è di 8500 K. Calcolate:

1. la magnitudine assoluta di Deneb;
2. la sua magnitudine apparente se si trovasse a 4.36 anni luce (cioè alla distanza di $\boldsymbol{\alpha}$ Cen);
3. il suo diametro apparente se si trovasse a 4.36 anni luce;
4. il conseguente aspetto nel cielo notturno per osservazioni a occhio nudo.

Soluzione

1. In parsec la distanza $\boldsymbol{D}$ di Deneb vale:

$$\mathrm{D} = \frac{2.60 \cdot 10^3 \text{ anni luce}}{3.2616 \text{ anni luce/parsec}} \simeq 797 \text{ parsec}$$

Dette $\boldsymbol{M_D}$ e $\boldsymbol{m_D}$ le magnitudini assoluta e apparente di Deneb si ha:

$$\mathrm{M_D} = \mathrm{m_D} + 5 - 5 \log \mathrm{D} \simeq 1.25 + 5 - 5 \log 797 \simeq -8.26$$

2. se per la distanza $\boldsymbol{d}$ di Deneb consideriamo un valore:

$$\mathrm{d} = \frac{4.36 \text{ anni luce}}{3.2616 \text{ anni luce/parsec}} \simeq 1.34 \text{ parsec}$$

per la sua magnitudine apparente otteniamo:

$$\mathrm{m_D} = \mathrm{M_D} - 5 + 5 \log \mathrm{d} \simeq -8.26 - 5 + 5 \log 1.34 \simeq -12.62$$

un valore paragonabile alla magnitudine media della Luna piena.

3. Detti $\boldsymbol{R_\odot}$, $\boldsymbol{T_\odot}$, $\boldsymbol{R_D}$ e $\boldsymbol{T_D}$ i raggi e le temperature del Sole e di Deneb e $\boldsymbol{M_\odot}$ la magnitudine assoluta del Sole vale la relazione:

$$\mathrm{M_D} - \mathrm{M_\odot} = -2.5 \log \left[\left(\frac{\mathrm{R_D}}{\mathrm{R_\odot}} \right)^2 \left(\frac{\mathrm{T_D}}{\mathrm{T_\odot}} \right)^4 \right] = -5 \log \left[\frac{\mathrm{R_D}}{\mathrm{R_\odot}} \left(\frac{\mathrm{T_D}}{\mathrm{T_\odot}} \right)^2 \right]$$

da cui possiamo ricavare il raggio di Deneb:

$$\log \frac{\mathrm{R_D}}{\mathrm{R_\odot}} = \frac{\mathrm{M_\odot} - \mathrm{M_D}}{5} - 2 \log \frac{\mathrm{T_D}}{\mathrm{T_\odot}}$$

$$\mathrm{R_D} = \mathrm{R_\odot} \cdot 10^{\left(\frac{\mathrm{M_\odot} - \mathrm{M_D}}{5} - 2 \log \frac{\mathrm{T_D}}{\mathrm{T_\odot}} \right)} \simeq \mathrm{R_\odot} \cdot 10^{\left(\frac{13.09}{5} - 2 \log 1.471 \right)} \simeq 192\, \mathrm{R_\odot} \simeq 134 \cdot 10^6\, km$$

Quindi il raggio di Deneb è quasi il 90% della distanza Terra-Sole e posta alla distanza di $\boldsymbol{\alpha}$ Cen il suo diametro apparente $\boldsymbol{D_{Deneb}}$ varrebbe:

$$\mathrm{D_{Deneb}} = 2 \text{ arcsen} \left(\frac{\mathrm{R_D}}{\mathrm{d}} \right) \simeq 2 \text{ arcsen} \left(\frac{134 \cdot 10^6 \text{ km}}{4.36 \text{ anni luce}} \right) \simeq 2 \text{ arcsen} \left(\frac{134 \cdot 10^6 \text{ km}}{4.12 \cdot 10^{13} \text{ km}} \right) \simeq 1''.3$$

4. Di notte, a occhio nudo, osserveremmo quindi un oggetto con luminosità pari a quella della Luna piena, ma di aspetto puntiforme.

4. Una stella dista dal Sole 326.2 anni luce, ha magnitudine apparente 3.25 e temperatura della fotosfera di 3500 K. Calcolate:

1. la magnitudine assoluta della stella;
2. la sua luminosità in unità di luminosità solari;
3. il suo raggio in unità di raggi solari e in km, fornendo infine una stima del suo tipo spettrale.

Soluzione

1. Detta **d** la distanza in anni luce, la distanza **D** della stella in parsec vale:

$$\mathrm{D} \simeq \frac{\mathrm{d}}{3.2616\ \frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq \frac{326.2\ anni\ luce}{3.2616\ \frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq 100.0\ \mathrm{pc}$$

Detta $\boldsymbol{m_s}$ la magnitudine apparente, la magnitudine assoluta $\boldsymbol{M_s}$ della stella vale:

$$M_S = m_S + 5 - 5\log D \simeq 3.25 + 5 - 5\log 100.0 \simeq -1.75$$

2. Dette $\boldsymbol{L_s}$ la luminosità della stella e $\boldsymbol{L_\odot}$ e $\mathbf{M_\odot}$ la luminosità e la magnitudine assoluta del Sole vale la relazione:

$$\mathrm{M_\odot} - \mathrm{M_S} = -2.5\log\left(\frac{\mathrm{L_\odot}}{\mathrm{L_S}}\right)$$

da cui ricaviamo:

$$\log\left(\frac{\mathrm{L_\odot}}{\mathrm{L_S}}\right) \simeq \frac{\mathrm{M_\odot} - \mathrm{M_S}}{-2.5} \simeq \frac{4.83+1.75}{-2.5} \simeq -2.63$$

$$\frac{L_\odot}{L_S} \simeq 10^{-2.63} \qquad L_S \simeq \frac{L_\odot}{10^{-2.63}} \simeq 427 L_\odot$$

3. Detti $\mathbf{R_S}$ e $\mathbf{T_S}$ e $\mathbf{R_\odot}$ e $\mathbf{T_\odot}$ i raggi e le temperature della stella e del Sole, dalla legge di Stefan-Boltzmann si ha:

$$4\,\pi\,\mathrm{R_S}^2\,\sigma\,\mathrm{T_S}^4 = 427\ \cdot 4\,\pi\,\mathrm{R_\odot}^2\,\sigma\,\mathrm{T_\odot}^4$$

e quindi:

$$\mathrm{R_S} = \mathrm{R_\odot}\sqrt{427\left(\frac{T_\odot}{\mathrm{T_S}}\right)^4} \simeq \mathrm{R_\odot}\sqrt{427\left(\frac{5778}{3500}\right)^4} \simeq 56.3\ \mathrm{R_\odot} \simeq 39.2\ \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

La stella è una "gigante rossa" di tipo spettrale K avanzato; il suo raggio è circa 0.68 volte il semiasse maggiore dell'orbita di Mercurio.

5. Una colonia di gatti neri, tutti perfettamente uguali, si è stabilita su un asteroide nero in orbita attorno al Sole. La colonia è visibile grazie alla luce solare riflessa dagli occhi di tutti i gatti. In un certo istante i gatti hanno tutti gli occhi aperti e la colonia è vista dalla Terra come una stella di magnitudine 28.32. Non appena uno dei gatti chiude gli occhi, la magnitudine osservata diventa 28.52. Calcolate da quanti gatti (si arrotondi il risultato all'intero più prossimo) è formata la colonia. L'emissione del corpo dei gatti e quella riflessa dall'asteroide sono trascurabili.

Soluzione.

Detto $\boldsymbol{f}$ il flusso riflesso dagli occhi di un gatto e $\boldsymbol{N}$ il numero dei gatti, le magnitudini apparenti quando tutti i gatti hanno gli occhi aperti $\boldsymbol{m_1}$ e quando uno li ha chiusi $\boldsymbol{m_2}$ sono date dalle relazioni:

$$\mathrm{m_1} = -2.5\log\ \mathrm{N}\cdot\ \mathrm{f} + \mathrm{C}$$

$$\mathrm{m_2} = -2.5\log\,(\mathrm{N}-1)\ \cdot \mathrm{f} + \mathrm{C}$$

e quindi:

$$\mathrm{m_1} - \mathrm{m_2} = -2.5\log\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-1}$$

da cui:

$$10^{\frac{m_2 - m_1}{2.5}} = \frac{N}{N-1}$$

posto: $10^{\frac{m_2 - m_1}{2.5}} = K \simeq 1.202$ ricaviamo infine:

$$N \simeq \frac{K}{K-1} \simeq \frac{1.202}{1.202-1} \simeq 6$$

6. Stimate la magnitudine apparente media della Luna Piena. Trascurate gli effetti dell'atmosfera della Terra.

Soluzione.

La luminosità della Luna è dovuta alla riflessione della luce che riceve dal Sole. Detti $\boldsymbol{R_\odot}$ e $\boldsymbol{T_\odot}$ il raggio e la temperatura della fotosfera del Sole, la quantità totale di energia $\boldsymbol{L_\odot}$ emessa dal Sole ogni secondo è:

$$L_\odot = 4\,\pi\, R_\odot{}^2\, \sigma\, T_\odot{}^4$$

$$L_\odot \simeq 4\,\pi \cdot 4.837 \cdot 10^{17}\, m^2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2\, K^4} \cdot 1.115 \cdot 10^{15}\, K^4 \simeq 3.843 \cdot 10^{26}\, \mathrm{W}$$

Dette $\boldsymbol{D_T}$ la distanza media Terra-Sole, $\boldsymbol{D_{TL}}$ la distanza media Terra-Luna e $\boldsymbol{D_{L\odot}}$ (=$\boldsymbol{D_T}$+$\boldsymbol{D_{TL}}$) la distanza media Luna-Sole, il flusso solare, ovvero la quantità di energia al secondo che arriva per unità di superficie sulla Terra $\boldsymbol{F_{\odot T}}$ (costante solare) e sulla Luna $\boldsymbol{F_{\odot L}}$ è:

$$F_{\odot T} = \frac{L_\odot}{4\,\pi\, D_T{}^2} \simeq \frac{3.843 \cdot 10^{26}\, \mathrm{W}}{4\,\pi \cdot 2.238 \cdot 10^{22}\, m^2} \simeq 1366\, \frac{W}{m^2}$$

$$F_{\odot L} = \frac{L_\odot}{4\,\pi\, D_{L\odot}{}^2} \simeq \frac{3.843 \cdot 10^{26}\, \mathrm{W}}{4\,\pi \cdot 2.250 \cdot 10^{22}\, m^2} \simeq 1359\, \frac{W}{m^2}$$

Detto $\boldsymbol{R_L}$ il raggio della Luna, la superficie proiettata $\boldsymbol{S_L}$ della Luna che riceve la radiazione solare vale:

$$S_L = \pi\, R_L{}^2 \simeq 9.490 \cdot 10^{12}\, m^2$$

Detto $\boldsymbol{A_L}$ il valore medio dell'albedo lunare, la quantità $\boldsymbol{E_L}$ di energia riflessa ogni secondo dalla Luna vale:

$$E_L = F_{\odot L}\, S_L\, A_L \simeq 1359\, \frac{W}{m^2} \cdot 9.490 \cdot 10^{12}\, m^2 \cdot 0.136 \simeq 1.754 \cdot 10^{15}\, W$$

La quantità di energia $\boldsymbol{F_{Moon}}$ ricevuta sulla Terra dalla Luna al secondo per unità di superficie è:

$$F_{Moon} = \frac{E_L}{2\,\pi\, D_{TL}{}^2} \simeq \frac{1.754 \cdot 10^{15}\, \mathrm{W}}{2\,\pi \cdot 1.478 \cdot 10^{17}\, m^2} \simeq 1.889 \cdot 10^{-3}\, \frac{W}{m^2}$$

Considerando la differenza tra la magnitudine apparente del Sole $\boldsymbol{m_\odot}$ e quella della Luna $\boldsymbol{m_L}$ si ha infine:

$$m_L = m_\odot + 2.5 \log \frac{F_{\odot T}}{F_{Moon}} \simeq -26.74 + 2.5 \log \frac{1366\, \frac{W}{m^2}}{1.889 \cdot 10^{-3}\, \frac{W}{m^2}} \simeq -12.09$$

Nota.

Il valore ottenuto con le semplici approssimazioni usate per la quantità di energia riflessa dalla Luna, è in ragionevole accordo con quello normalmente indicato come magnitudine media della Luna piena: $m_L = -12.74$.

7. Una galassia a spirale ha una magnitudine assoluta integrata -20.17 e un raggio di $2.0 \cdot 10^4$ anni luce. Stimate, in prima approssimazione, la velocità di fuga per un oggetto posto sul piano galattico alla distanza di $2.0 \cdot 10^5$ anni luce dal centro della galassia. Si assuma che la massa delle stelle sia circa la metà della massa "ordinaria" della galassia.

Soluzione.
In prima approssimazione, possiamo stimare il numero di stelle **n** che compongono la galassia, ipotizzando che siano tutte uguali al Sole, dal valore della sua magnitudine assoluta. Dette $\boldsymbol{M_T}$ e $\boldsymbol{F_T}$ la magnitudine assoluta e il flusso della galassia e $\boldsymbol{M_{A\odot}}$ e $\boldsymbol{F_\odot}$ la magnitudine assoluta e il flusso del Sole, avremo quindi:

$$\mathrm{M_T} - \mathrm{M_{A\odot}} = -2.5\log\frac{\mathrm{F_T}}{\mathrm{F_\odot}} = -2.5\log\frac{\mathrm{n\,F_\odot}}{\mathrm{F_\odot}} = -2.5\log \mathrm{n}$$

$$\mathrm{n} = 10^{\left(\frac{\mathrm{M_{A\odot}} - \mathrm{M_T}}{2.5}\right)} \simeq 10^{\left(\frac{4.83+20.17}{2.5}\right)} \simeq 10^{10}$$

Detta $\boldsymbol{M_S}$ la massa totale delle stelle e $\boldsymbol{M_\odot}$ la massa del Sole, la massa totale "ordinaria" $\boldsymbol{M_O}$ della galassia vale:

$$\mathrm{M_O} = 2\,\mathrm{M_s} \simeq 2 \cdot 10^{10} \cdot \mathrm{M_\odot} \simeq 2 \cdot 10^{10} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} \simeq 4 \cdot 10^{40}\ \mathrm{kg}$$

Dagli studi sulla dinamica delle galassie a spirale, sappiamo che esiste della materia non visibile, la cosiddetta "materia oscura". La materia oscura contribuisce per circa l'84% della massa gravitazionale totale delle galassie. Quindi $\boldsymbol{M_O}$ costituisce circa il restante 16% della massa $\boldsymbol{M_G}$ della galassia per gli effetti gravitazionali: $M_O \simeq 0.16\, M_G$, e di conseguenza si avrà:

$$M_G \simeq 6.25\, M_O \simeq 2.5 \cdot 10^{41}\ kg$$

La distanza **R** a cui vogliamo calcolare la velocità di fuga è 10 volte il raggio della galassia. Facciamo quindi l'ipotesi che tutta la massa della galassia, inclusa quella oscura, sia all'interno di tale distanza. Con questa assunzione, ai fini degli effetti gravitazionali possiamo considerare tutta la massa come concentrata al centro della galassia, e la velocità di fuga $\boldsymbol{v_f}$ vale quindi:

$$\mathrm{v_f} = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{G}\,M_G}{\mathrm{R}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 2.5 \cdot 10^{41}\ \mathrm{kg}}{1.9 \cdot 10^{21}\ \mathrm{m}}} \simeq 13 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq 130\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

8. Le Supernovae (SN) di Tipo Ia raggiungono, al massimo di luminosità, la magnitudine assoluta -21.0. Una SN di Tipo Ia è esplosa nella galassia M90 dell'Ammasso della Vergine a $60.0 \cdot 10^6$ anni luce dal Sole. Nel cielo M90 appare come un'ellisse con dimensioni angolari $9'.50 \cdot 4'.50$ e la sua magnitudine apparente superficiale media è di $22.0\ mag/arcsec^2$. Si calcoli:

1. il modulo di distanza di M90;
2. se la SN, al massimo di luminosità, è più brillante dell'intera galassia che la ospita;
3. la magnitudine apparente complessiva del sistema galassia + SN al massimo di luminosità.

Soluzione

1. La distanza ***d*** di M90 in parsec vale:

$$d = \frac{60.0 \cdot 10^6\ anni\ luce}{3.2616\ \frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq 18.4 \cdot 10^6\ pc$$

Quindi la magnitudine apparente $\boldsymbol{m_{SN}}$ della SN al massimo di luminosità è:

$$\mathrm{m_{SN}} = \mathrm{M_{SN}} - 5 + 5\log \mathrm{d\ (pc)} \simeq -21.0 - 5 + 5\log\ (18.4 \cdot 10^6) \simeq 10.3$$

e il modulo di distanza della galassia, definito come la differenza tra la magnitudine apparente e quella assoluta, che ovviamente coincide con quello della SN vale:

$$\mathrm{m_{SN}} - \mathrm{M_{SN}} \simeq 31.3$$

2. L'area **A** della galassia, in $arcsec^2$ vale:

$$A = \pi\, a\, b = \pi\, \frac{9'.50 \cdot 60}{2} \cdot \frac{4'.50 \cdot 60}{2} \simeq 121 \cdot 10^3 \text{ arcsec}^2$$

Detta $\boldsymbol{m_{sup}}$ la magnitudine media superficiale di M90, la sua magnitudine apparente integrata $\boldsymbol{m_{GAL}}$ è:

$$m_{GAL} = m_{sup} - 2.5 \log A \simeq 22.0 - 2.5 \log\,(121 \cdot 10^3) \simeq 9.3$$

Quindi poiché

$$m_{GAL} < m_{SN}$$

la supernova non diventa, neppure al massimo di luminosità, più brillante dell'intera galassia.

3. La magnitudine complessiva $\mathbf{m_{TOT}}$ galassia + supernova al massimo si può ottenere con la relazione:

$$m_{TOT} = -2.5 \log(10^{-0.4\, m_{SN}} + 10^{-0.4\, m_{GAL}}) \simeq 8.9$$

9. La Luna si allontana dalla Terra a una velocità di circa 3.8 cm/anno. Tra quanto tempo non sarà più possibile osservare dalla Terra eclissi totali di Sole?

Soluzione

Le eclissi totali di Sole non avranno più luogo quando da un qualsiasi punto sulla superficie della Terra il diametro apparente della Luna al perigeo sarà minore del diametro apparente del Sole all'afelio $\mathbf{D_{\odot A}}$. Detta $\mathbf{d_{TA}}$ la distanza della Terra dal Sole all'afelio e $\mathbf{R_{\odot}}$ il raggio del Sole, il diametro angolare del Sole all'afelio vale:

$$D_{\odot A} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_{\odot}}{d_{TA}}\right) \simeq 2 \cdot sin^{-1}\left(\frac{6.955 \cdot 10^5\ km}{152.1 \cdot 10^6\ km}\right) \simeq 0°.5240 \simeq 31'.44$$

Detto $\mathbf{R_L}$ il raggio della Luna, la distanza di fine eclissi $\mathbf{d_{FE}}$ è quella dalla quale il disco lunare sottende un angolo pari a $\boldsymbol{D_{\odot A}}$ ed è data da:

$$d_{FE} = \frac{2\, R_{Luna}}{\sin \boldsymbol{D_{\odot A}}} \simeq \frac{3476 \text{ km}}{\sin 0°.5240} \simeq 380.1 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Detti $\mathbf{a_L}$ ed $\mathbf{e_L}$ il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita lunare, la distanza attuale del centro della Luna al perigeo $\mathbf{d_{LP}}$ dal centro della Terra vale:

$$d_{LP} = a_L\,(1 - e_L) \simeq 363.3 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Detto $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra, la distanza minima di un punto sulla superficie della Terra dal centro della Luna $\mathbf{d_{TP}}$ si ha quando la Luna è al perigeo ed è vista allo zenith (circostanza che può verificarsi solo per la fascia di latitudini tra circa +28° e -28°) e attualmente vale:

$$d_{TP} = d_{LP} - R_T \simeq 356.9 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Quindi il tempo **T** necessario affinché la distanza della Luna al perigeo diventi uguale a $\mathbf{d_{FE}}$ è dato da:

$$T = \frac{d_{FE} - d_{TP}}{V_a} \simeq \frac{380.1 \cdot 10^8 \text{cm} - 356.9 \cdot 10^8 \text{ cm}}{3.8\ \frac{cm}{anno}} \simeq 61 \cdot 10^7 \text{ anni}$$

Nota.

Nella soluzione si assume che la velocità di allontanamento, le eccentricità dell'orbita lunare e dell'orbita della Terra e il raggio del Sole rimangano costanti. Anche considerando le loro variazioni, si stima comunque un tempo di fine eclissi simile a quello calcolato.

10. La stella ε Eri si trova a 10.5 anni luce dal Sole e intorno a essa ruota un pianeta, ε Eri b, che percorre un'orbita circolare il cui raggio vale 3.39 UA e il cui piano risulta perpendicolare alla direzione di osservazione. Calcolate la parallasse annua di ε Eri osservata dalla Terra, la parallasse annua del Sole osservato da ε Eri b e a quanto corrisponde un pc misurato da ε Eri b.

Soluzione
La parallasse annua, in secondi d'arco, è pari all'inverso della distanza in parsec. Dalla Terra 1 parsec è pari a circa 3.2616 anni luce. Quindi, detta $\boldsymbol{d}$ la distanza dal Sole in anni luce, ε Eri si trova a una distanza $\boldsymbol{D_{\varepsilon-Eri}}$ in parsec:

$$\mathrm{D}_{\varepsilon-\mathrm{Eri}} = \frac{\mathrm{d}}{3.2616} \simeq \frac{10.5 \text{ anni luce}}{3.2616 \text{ anni} \frac{\text{luce}}{\text{parsec}}} \simeq 3.22 \text{ parsec} \simeq 664 \cdot 10^3\, UA$$

e quindi la sua parallasse $\boldsymbol{\pi_{\varepsilon-\mathrm{Eri}}}$ vale:

$$\pi_{\varepsilon-\mathrm{Eri}} = \frac{1}{3.22\, parsec} \simeq 0''.311$$

Per calcolare la parallasse del Sole visto da ε Eri b, dobbiamo considerare che il suo valore dipende dalle dimensioni della "base", ovvero dal semiasse maggiore dell'orbita. Tanto maggiore è la base, tanto maggiore, a parità di distanza di una stella, sarà la sua parallasse. Detto $\boldsymbol{\pi_\odot}$ l'angolo di parallasse del Sole visto da ε Eri b e $\boldsymbol{\mathrm{a}_{\varepsilon-\mathrm{Eri\,b}}}$ il raggio dell'orbita di ε Eri b avremo:

$$\pi_\odot = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{a}_{\varepsilon-\mathrm{Eri\,b}}}{\mathrm{D}_{\varepsilon-\mathrm{Eri}}}\right) \simeq \tan^{-1}\left(\frac{3.39\, UA}{664 \cdot 10^3\, UA}\right) \simeq 2^\circ.93 \cdot 10^{-4} \simeq 1''.05$$

Si noti che questo valore corrisponde a 3.39 volte la parallasse misurata dalla Terra per ε Eri, ovvero al rapporto tra il semiasse maggiore dell'orbita di ε Eri b e quello della Terra. La conversione tra parsec definiti con osservazioni dalla Terra e da ε Eri b segue la stessa correzione, quindi:

1 parsec di ε Eri b ≃ 3.39 parsec terrestri

11. Una nebulosa planetaria si espande in modo isotropo (cioè allo stesso modo in tutte le direzioni) con una velocità costante pari a 17.0 km/s. Dal febbraio 1972 al febbraio 2017 le dimensioni angolari $\boldsymbol{\alpha}$ del suo raggio sono aumentate da $\alpha_{1972} = 34''.0$ a $\alpha_{2017} = 40''.0$. Calcolate la distanza, in anni luce e in parsec, della nebulosa e il suo diametro lineare nel febbraio 2017 in km e in UA.

Soluzione
Il tempo $\mathbf{t}$ tra la prima e la seconda osservazione vale:

$$t = 45 \text{ anni} \simeq 45 \cdot 365.256 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \simeq 1.42 \cdot 10^9\, s$$

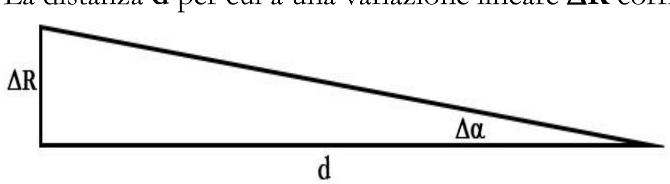
Poiché l'espansione è isotropa e con velocità $\boldsymbol{v}$ costante, l'aumento $\boldsymbol{\Delta R}$ del raggio della nebulosa planetaria è stato di:

$$\Delta\mathrm{R} = v \cdot t \simeq 17.0\, \frac{km}{s} \cdot 1.42 \cdot 10^9\, s \simeq 2.41 \cdot 10^{10}\, km$$

Nello stesso tempo l'aumento di dimensioni angolari $\boldsymbol{\Delta\alpha}$ è stato di:

$$\Delta\alpha = \alpha_{2017} - \alpha_{1972} \simeq 40''.0 - 34''.0 \simeq 6''.0 \simeq 1^\circ.7 \cdot 10^{-3}$$

La distanza **d** per cui a una variazione lineare **ΔR** corrisponde una variazione angolare **Δα** è:



$$\mathrm{d} = \frac{\Delta\mathrm{R}}{\tan\Delta\boldsymbol{\alpha}} \simeq \frac{2.41 \cdot 10^{10}\, km}{\tan 1^\circ.7 \cdot 10^{-3}}$$

$$\mathrm{d} \simeq 8.0 \cdot 10^{14}\, km \simeq 85\, a.l. \simeq 26\, parsec$$

Poiché le dimensioni angolari del raggio della nebulosa nel 2017 valevano:

$$\alpha_{2017} = 40''.0 \simeq 1^\circ.11 \cdot 10^{-2}$$

nota la distanza della nebulosa ne ricaviamo il diametro **D** nel 2017 dalla relazione:

$$D_{2017} = 2 \cdot d \cdot \tan\alpha \simeq 2 \cdot 8.0 \cdot 10^{14}\ \text{km} \cdot \tan 1^\circ.11 \cdot 10^{-2} \simeq 3.1 \cdot 10^{11}\ \text{km} \simeq 2.1 \cdot 10^{3}\ \text{UA}$$

12. La stazione spaziale Internazionale (ISS) orbita intorno alla Terra su un'orbita circolare con una velocità di 7.66 km/s. La ISS diventa ben visibile a occhio nudo anche nei centri abitati (magnitudine ≤ 0) quando la sua altezza sull'orizzonte è maggiore di 10°. Considerando un osservatore posto al livello del mare che vede passare la ISS allo zenith, quanto vale la distanza tra la ISS e l'osservatore nel momento in cui la ISS si trova 10° sopra l'orizzonte? Quanto dura la visibilità della ISS per un'altezza sull'orizzonte maggiore di 10°? Si trascuri la rotazione della Terra.

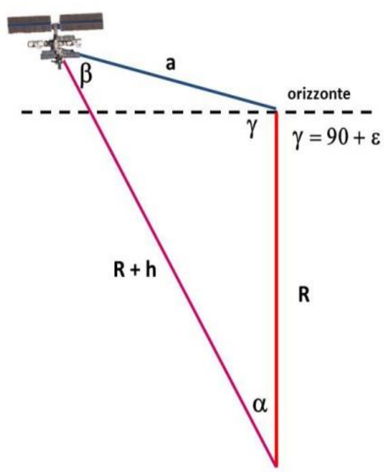
Soluzione

Poiché la ISS è in orbita circolare stabile, la sua velocità è pari alla prima velocità cosmica. Detti $\mathbf{V_{ISS}}$ il modulo della velocità orbitale, $\boldsymbol{h}$ l'altezza sulla superficie, $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{R}$ la massa e il raggio della Terra, si ha:

$$V_{ISS} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R+h}}$$

da cui ricaviamo:

$$h = \frac{G \cdot M}{{V_{ISS}}^2} - R \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}{5.87 \cdot 10^{7}\ \frac{m^2}{s^2}} - 6378\ \text{km} \simeq 415\ \text{km}$$



La configurazione descritta nel problema è schematizzata nella figura a sinistra, dove $\boldsymbol{a}$ è la distanza della ISS dall'osservatore quando la sua altezza sull'orizzonte è di 10°. Poiché a 10° sull'orizzonte la rifrazione è di circa 5', detta $\boldsymbol{\varepsilon}$ l'altezza sull'orizzonte della ISS, si osserverà la ISS ad un valore di 10° quando:

$$\varepsilon = 10^\circ - 5' \simeq 9^\circ\, 55' = 9^\circ.92$$

da cui:

$$\gamma = 90^\circ + \varepsilon = 99^\circ.92$$

Dal teorema dei seni sappiamo che:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{R+h}{\sin\gamma} = \frac{R}{\sin\beta}$$

Considerando il secondo e il terzo termine si ha:

$$\beta = \arcsin\frac{R \cdot \sin 99^\circ.92}{R+h} \simeq \arcsin\frac{6283}{6793} \simeq 67^\circ.65$$

e quindi:

$$\alpha = 180^\circ - 67^\circ.65 - 99^\circ.92 \simeq 12^\circ.43$$

Possiamo ricavare il valore della distanza $\boldsymbol{a}$:

$$a = \frac{R \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} \simeq 1480\ \text{km}$$

Il periodo di rivoluzione $\boldsymbol{T}$ della ISS è dato dalla relazione:

$$T = \frac{2\,\pi\,(R+h)}{V_{ISS}} \simeq \frac{2\,\pi \cdot 6793 \cdot 10^{3}\ m}{7.66 \cdot 10^{3}\ \frac{m}{s}} \simeq 5570\ s \simeq 1h\ 32.8\ m$$

Detto $\boldsymbol{T_{10}}$ il tempo per cui la ISS rimane visibile 10° sopra l'orizzonte, per un passaggio zenitale vale la proporzione:

$$T : 360° = T_{10} : 2\alpha$$

da cui si ricava:

$$T_{10} = \frac{2\alpha \cdot T}{360°} \simeq \frac{24°.86 \cdot 5570\ s}{360°} \simeq 385\ s \simeq 6\ m\ 25s$$

13. Volete costruire un telescopio, dotato di un sistema di ottica adattiva per osservazioni a 5500 Å, per fotografare sulla superficie della Luna i resti dei moduli di allunaggio (LEM) utilizzati dagli astronauti delle missioni Apollo. La parte inferiore dei LEM aveva un diametro di circa 4.5 m. Che diametro dovrà avere il vostro telescopio? Sapete suggerire una soluzione più "economica" per realizzare queste foto?

Soluzione

L'ottica adattiva permette di annullare quasi completamente gli effetti della turbolenza dell'atmosfera terrestre, permettendo quindi di sfruttare il potere risolutivo teorico di un telescopio. Nel nostro caso, detto $\boldsymbol{d}$ il diametro dei LEM e $\boldsymbol{a_L}$ il semiasse maggiore dell'orbita della Luna, il potere risolutivo $\boldsymbol{\alpha}$ dovrà essere almeno pari a:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{d}{a_L}\right) = \arctan\left(\frac{4.5\ m}{384.4 \cdot 10^6\ m}\right) \simeq 6°.7 \cdot 10^{-7} \simeq 2''.4 \cdot 10^{-3}$$

La relazione che fornisce il potere risolutivo $\boldsymbol{\alpha}$ in secondi d'arco di un telescopio con apertura **D** che osserva alla lunghezza d'onda $\boldsymbol{\lambda}$ è:

$$\alpha = 1.22\,\frac{\lambda}{D}\,206265''$$

E quindi ponendo $\boldsymbol{\alpha} = 2''.4 \cdot 10^{-3}$ ricaviamo l'apertura minima del telescopio:

$$D = 1.22\,\frac{\lambda}{\alpha}\,206265'' \simeq \frac{1.22 \cdot 5500 \cdot 10^{-10} m \cdot 206265''}{2''.4 \cdot 10^{-3}} \simeq 58\ m$$

Si tratterebbe del più grande telescopio mai realizzato, assai più grande del telescopio ELT dell'ESO attualmente in fase di costruzione (https://elt.eso.org/) e il cui costo finale si stima dell'ordine di 1.3 miliardi di euro. Per fotografare i resti delle missioni Apollo è molto più economico inviare dei satelliti in orbita bassa attorno alla Luna, come il Lunar Reconnaissance Orbiter della NASA, il cui costo è stato circa un terzo rispetto a quello di ELT, che ha fotografato con grande dettaglio i siti degli allunaggi (con tanti saluti ai teorici del complotto...).

14. ζ Boötis è una binaria visuale, situata alla distanza di 180 anni luce dal Sistema Solare, composta da 2 stelle identiche. La magnitudine apparente totale della binaria è 3.79, la separazione angolare tra le due componenti viste dalla Terra è 1.2". Questo sistema è osservato alla lunghezza d'onda λ = 5500 Å.

1. Che diametro minimo deve avere un telescopio per riuscire a risolvere il sistema binario?
2. Se la lunghezza focale del telescopio è 1 m e il potere risolutivo dell'occhio umano è 2', calcolare il valore massimo e minimo della lunghezza focale degli oculari che permettono di distinguere le due componenti;
3. Quanto vale la magnitudine assoluta di ciascuna delle due stelle del sistema binario?

Soluzione.

1. Poiché la separazione angolare tra le due stelle è maggiore del valore medio del seeing (circa 1") che si registra in buona parte delle località sulla superficie della Terra, possiamo affermare che le due stelle possono essere "risolte". La risoluzione $\boldsymbol{\theta}$ in secondi d'arco di un telescopio di apertura **D** per osservazioni alla lunghezza d'onda $\boldsymbol{\lambda}$ vale:

$$\theta = 1.22\,\frac{\lambda}{D} \cdot 206265''$$

Il telescopio dovrà avere quindi un diametro minimo $\boldsymbol{D_{Min}}$ pari a:

$$D_{Min} = 1.22\ \frac{\lambda}{\theta}\ 206265'' = \frac{1.22\ \cdot\ 5500 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}\ \cdot\ 206265''}{1.2''}\ \simeq 0.12\ \mathrm{m} = 12\ \mathrm{cm}$$

2. Il rapporto tra la focale $\boldsymbol{F}$ del telescopio e quella $\boldsymbol{f}$ dell'oculare utilizzato, fornisce l'ingrandimento **I**:

$$I = \frac{F}{f}$$

Il minimo ingrandimento $\boldsymbol{I_{min}}$ dell'immagine del sistema binario che permette al nostro occhio di risolvere le due componenti è dato dalla relazione:

$$I_{min} = \frac{\text{risoluzione occhio}}{\text{separazione angolare}} = \frac{2'}{1.2''} = \frac{120''}{1.2''} = 100$$

Per ottenere tale ingrandimento la focale massima $\boldsymbol{f_{max}}$ dell'oculare da utilizzare deve quindi essere pari a:

$$f_{max} = \frac{F}{I_{min}} = \frac{1000\ \mathrm{mm}}{100} = 10\ \mathrm{mm}$$

Con oculari di focale minore otteniamo ingrandimenti maggiori, ma occorre ricordare che nella pratica delle osservazioni visuali non è mai conveniente utilizzare un ingrandimento maggiore di un valore all'incirca pari all'apertura del telescopio espressa in mm, che nel caso in esame vale quindi circa 120. Detto quindi $\boldsymbol{I_{max}}$ il massimo ingrandimento utilizzabile, otteniamo il valore minimo $\boldsymbol{f_{min}}$ per la focale dell'oculare:

$$f_{min} \simeq \frac{F}{I_{max}} \simeq \frac{1000\ \mathrm{mm}}{120} \simeq 8.3\ \mathrm{mm}$$

3. Poiché le due componenti di ζ Boötis hanno magnitudini apparenti $\boldsymbol{m}$ identiche, dalla relazione che fornisce la magnitudine totale di un sistema, detta $\boldsymbol{m_{tot}}$ la magnitudine della binaria otteniamo:

$$m_{tot} = -2.5 \cdot \log\ (10^{-0.4m} + 10^{-0.4m}) = -2.5 \cdot \log\ (2 \cdot 10^{-0.4m}) =$$

$$= -2.5 \cdot \log\ 2 - 2.5 \cdot \log\ (10^{-0.4m})$$

$$m_{tot} + 2.5 \cdot \log\ 2 = m$$

$$m \simeq m_{tot} + 0.75\ \simeq 3.79 + 0.75\ \simeq 4.54$$

Data la magnitudine apparente di ciascuna delle due componenti, calcoliamo la loro magnitudine assoluta **M**, esprimendo la distanza **d** in parsec, dalla relazione:

$$M = m + 5\ - 5 \log d\ \simeq 4.54 + 5\ - 5 \log \left(\frac{180\ anni\ luce}{3.2616\ \frac{anni\ luce}{parsec}} \right) \simeq 0.83$$

15. Osservate Marte in "Grande Opposizione" con un telescopio riflettore f/8 con apertura 40.0 cm. Quanto valgono il diametro angolare apparente di Marte e le sue dimensioni lineari sul piano focale del telescopio?

Soluzione.

La caratteristica $\boldsymbol{f/n}$ di un telescopio indica che la focale $\boldsymbol{F}$ del telescopio è $\boldsymbol{n}$ volte maggiore dell'apertura $\boldsymbol{D}$, quindi per il telescopio utilizzato sarà:

$$F = D\ \cdot n = 40.0\ \mathrm{cm}\ \cdot 8 = 320\ \mathrm{cm} = 3.20\ \mathrm{m}$$

Una "Grande Opposizione" è un'opposizione in cui la Terra si trova in prossimità dell'afelio e contemporaneamente Marte si trova in prossimità del perielio. Dette $\boldsymbol{D_{TA}}$ e $\boldsymbol{D_{MP}}$ le distanze dal Sole della

Terra all'afelio e di Marte al perielio e $\boldsymbol{a_T}$, $\boldsymbol{e_T}$, $\boldsymbol{a_M}$ ed $\boldsymbol{e_M}$ i semiassi maggiori e le eccentricità delle orbite della Terra e di Marte, per la distanza $\boldsymbol{D_{TM-GO}}$ Terra-Marte in una Grande Opposizione otteniamo:

$$\mathrm{D_{TM-GO}} = \mathrm{D_{MP}} - \mathrm{D_{TA}} = \mathrm{a_M}\,(1 - \mathrm{e_M}) - \mathrm{a_T}\,(1 + \mathrm{e_T})$$

$$\mathrm{D_{TM-GO}} \simeq 227.9 \cdot 10^6\ \mathrm{km} \cdot (1 - 0.09337) - 149.6 \cdot 10^6\ \mathrm{km} \cdot (1 + 0.01673) \simeq 5.452 \cdot 10^7\ \mathrm{km}$$

A questa distanza, detto $\boldsymbol{R_M}$ il suo raggio, il diametro apparente di Marte $\boldsymbol{\alpha}$ sarà dato dalla relazione:

$$\alpha = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_{Marte}}}{\mathrm{D_{TM-GO}}}\right) \simeq 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{3397\ \mathrm{km}}{5.452 \cdot 10^7}\right) \simeq 7°.140 \cdot 10^{-3} \simeq 25''.70$$

Le sue dimensioni lineari **d** sul piano focale del telescopio saranno:

$$\mathrm{d} = \mathrm{F} \cdot \tan\alpha \simeq 320\ \mathrm{cm} \cdot \tan\ (7°.140 \cdot 10^{-3}) \simeq 0.40\ \mathrm{mm}$$

Nota: la circostanza descritta nella soluzione richiede l'allineamento tra le linee degli apsidi dei due pianeti. Attualmente le linee degli apsidi di Marte e della Terra formano un angolo di circa 24° e quindi non si può avere una opposizione di Marte con la Terra all'afelio e Marte contemporaneamente al perielio. Tuttavia, poiché le linee degli apsidi precedono con periodi diversi, la situazione descritta nel problema potrà verificarsi in futuro.

16. Il Telescopio Spaziale Hubble ha uno specchio con diametro di 2.4 m e orbita attorno alla Terra a un'altezza sulla superficie di 539 km. Stimate le dimensioni minime di un corpo che HST è capace di distinguere sulla superficie della Terra osservando alla lunghezza d'onda di 5500 Å.

Soluzione

Detto $\boldsymbol{D_{HST}}$ il diametro del suo specchio, il potere risolutivo teorico $\boldsymbol{\alpha_{HST}}$ di HST in secondi d'arco alla lunghezza d'onda $\boldsymbol{\lambda}$ è dato dalla relazione:

$$\alpha_{\mathrm{HST}} = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{\mathrm{D_{HST}}} \cdot 206265'' \simeq 1.22 \cdot \frac{5500 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}}{2.4\ \mathrm{m}} \cdot 206265'' \simeq 0''.058 \simeq 1°.6 \cdot 10^{-5}$$

Questo potere risolutivo consentirebbe a HST, che orbita all'altezza $\boldsymbol{h_{HST}} = 539$ km, di distinguere sulla superficie della Terra oggetti con dimensioni minime $\boldsymbol{d_t}$:

$$\mathrm{d_t} = \mathrm{h_{HST}} \cdot \tan\alpha_{\mathrm{HST}} = 539\ \mathrm{km} \cdot \tan\ (1°.6 \cdot 10^{-5}) \simeq 15\ \mathrm{cm}$$

Tuttavia, se puntato verso la superficie della Terra HST subirà gli effetti dell'atmosfera, proprio come se osservasse verso lo spazio dalla superfice. Quindi il suo potere risolutivo effettivo $\boldsymbol{\alpha_{eff}}$ sarà limitato dagli effetti dell'atmosfera terrestre e sarà dell'ordine di 1'', consentendogli quindi di distinguere oggetti con dimensioni minime $\mathbf{d_{eff}}$:

$$\mathrm{d_{eff}} = \mathrm{h_{HST}} \cdot \tan\alpha_{\mathrm{eff}} = 539\ \mathrm{km} \cdot \tan\ (2°.8 \cdot 10^{-4}) \simeq 2.6\ \mathrm{m}$$

17. È stato osservato il transito di un pianeta extrasolare in orbita attorno a una stella di tipo solare. La variazione massima di magnitudine è stata di 0.010. Sapendo che la massa del pianeta è di $1.80 \cdot 10^{27}\ kg$, stimate il raggio del pianeta, la sua densità e deducete se è di tipo gassoso o roccioso. Considerando che le migliori misure fotometriche da Terra hanno una precisione dell'ordine di 0.002 magnitudini, stimate le dimensioni del più piccolo pianeta extrasolare osservabile dalla Terra attorno a una stella di tipo solare.

Soluzione

Detto $\boldsymbol{R_p}$ il raggio di un pianeta che transita davanti a una stella di raggio $\mathbf{R_s}$, $\mathbf{L_s}$ la luminosità della stella e $\mathbf{L_{tr}}$ la luminosità del sistema stella-pianeta durante il transito, per la variazione massima di magnitudine $\boldsymbol{\Delta m}$ vale la relazione:

$$\Delta\mathrm{m} = -2.5\log\frac{L_{tr}}{L_s} = -2.5\log\frac{R_s^2 - R_p^2}{R_s^2} = -2.5\log\left(1 - \frac{R_p^2}{R_s^2}\right)$$

$$\frac{R_p^2}{R_S^2} = 1 - 10^{-\frac{\Delta m}{2.5}} \qquad R_P = R_S \cdot \sqrt{1 - 10^{-\frac{\Delta m}{2.5}}}$$

Quindi nel caso in esame, poiché il raggio della stella è pari a quello $\boldsymbol{R_\odot}$ del Sole, avremo:

$$R_P \simeq R_\odot \cdot \sqrt{1 - 10^{-\frac{0.010}{2.5}}} \simeq 6.955 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \sqrt{0.0092} \simeq 6.7 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Si tratta quindi di un pianeta con dimensioni paragonabili a quelle di Giove.
Detti **M** la massa e **V** il volume del pianeta, la sua densità $\boldsymbol{\rho}$ è pari a:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3\,M}{4\,\pi\,R_P{}^3} \simeq \frac{3 \cdot 1.80 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{4\,\pi \cdot 3.0 \cdot 10^{23} \text{ m}^3} \simeq 1.4 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \simeq 1.4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Poiché massa, raggio e densità sono molto simili a quelle di Giove ($\rho_{\text{Giove}} \simeq 1.33\ g/cm^3$) possiamo dedurre che si tratta di un pianeta gassoso.
Il raggio del più piccolo pianeta osservabile dalla superficie della Terra con il metodo dei transiti $\boldsymbol{R_{min}}$ si può ricavare dalla relazione trovata per $\boldsymbol{R_p}$, assumendo $\Delta m = \Delta m_{min} \simeq 0.002$.
Il valore dipende dal raggio della stella e per una stella con raggio pari a quello del Sole si ha:

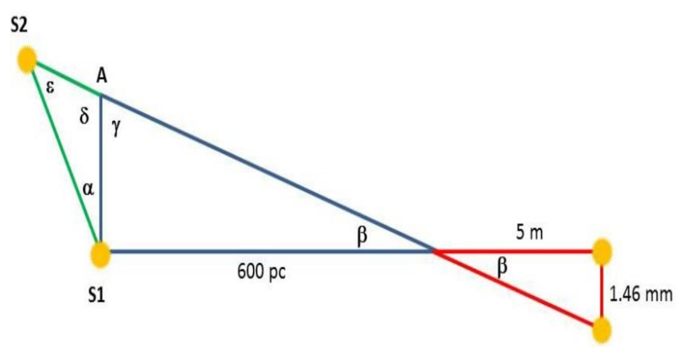
$$R_{min} = R_\odot \cdot \sqrt{1 - 10^{-\frac{\Delta m_{min}}{2.5}}} \simeq R_\odot \cdot \sqrt{0.002} \cdot 6.955 \cdot 10^5 \text{ km} \simeq 3 \cdot 10^4 \text{ km}$$

ovvero un pianeta poco più grande di Urano.

Nota: per valori di $\Delta m < 0.010$ l'espressione esatta per il calcolo del raggio del raggio utilizzata in questo problema viene spesso sostituita con la più semplice relazione approssimata: $R_P = R_S \cdot \sqrt{\Delta m}$.

18. Sul piano focale di un telescopio con focale di 500 cm, le due componenti di una binaria visuale distano tra di loro 1.46 mm. Sappiamo che una delle due stelle dista dal Sole 600 pc e che il piano orbitale della binaria forma un angolo di 30° (con la seconda stella a distanza maggiore della prima) con la perpendicolare alla direzione di osservazione. Calcolare la distanza tra le due stelle della binaria.

Soluzione



La configurazione descritta nel problema è rappresentata nella figura (non in scala) qui a sinistra, dove le due stelle sono indicate con **S1** e **S2**. Detta **F** la focale del telescopio e **d** la distanza delle due stelle sul piano focale, la distanza angolare $\boldsymbol{\beta}$ osservata è data dalla relazione:

$$\boldsymbol{\beta} = \text{arctg}\,\frac{d}{F} \simeq arctg\,\frac{1.46 \text{ mm}}{5000 \text{ mm}} \simeq$$
$$\simeq 1^\circ.67 \cdot 10^{-2} \simeq 60''.2$$

Detta **D** la distanza della stella S1, la distanza S1-A vale:

$$S1 - A = D \cdot \tan\beta \simeq$$
$$\simeq 600 \text{ pc} \cdot \tan(1^\circ.67 \cdot 10^{-2}) \simeq 600\,pc \cdot 2.92 \cdot 10^{-4} \simeq 0.175\,pc \simeq 5.41 \cdot 10^{12}\,km$$

Per ricavare la distanza S1-S2, il triangolo S1-S2-A si può risolvere con il teorema dei seni, ma essendo:

$$\delta = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 180^\circ + 90^\circ + \beta \simeq 90^\circ\,1'$$

possiamo approssimarlo a un triangolo rettangolo (il disegno non è in scala) per cui:

$$S1 - S2 = \frac{S1 - A}{\cos\alpha} \simeq \frac{5.41 \cdot 10^{12}\,km}{\cos 30^\circ} \simeq 6.25 \cdot 10^{12}\,km \simeq 4.17 \cdot 10^4\,UA$$

19. Il VLT dell'ESO è formato da quattro telescopi, ognuno con uno specchio con diametro di 8.2m, che possono inviare la luce raccolta a un fuoco comune. Supponete che il VLT fotografi una stella di magnitudine 23.0. Quanti fotoni provenienti da questa stella vengono raccolti in totale dai quattro telescopi del VLT ogni secondo? Assumete per i fotoni un'energia media $E = 4.8 \cdot 10^{-19}$ J ($J = kg \cdot m^2/s^2 = W \cdot s$).

Soluzione

Consideriamo la differenza tra la magnitudine apparente della stella $\boldsymbol{m_S}$ e quella del Sole $\boldsymbol{m_\odot}$ e ricaviamo il flusso proveniente dalla stella $\boldsymbol{F_S}$ in unità di quello proveniente dal Sole $\boldsymbol{F_\odot}$:

$$m_S - m_\odot = -2.5 \log \frac{F_S}{F_\odot}$$

da cui si ha:

$$F_s = 10^{\left(\frac{m_\odot - m_s}{2.5}\right)} \cdot F_\odot = 10^{\left(\frac{-26.74 - 23.0}{2.5}\right)} \cdot F_\odot \simeq 1.27 \cdot 10^{-20} \cdot F_\odot$$

Detti $\boldsymbol{D}$ la distanza media Terra-Sole, $\boldsymbol{R_\odot}$ e $\boldsymbol{T_\odot}$ il raggio e la temperatura della fotosfera solare, la quantità media di energia $\boldsymbol{F_\odot}$ proveniente dal Sole che arriva ogni secondo su un metro quadrato alla sommità dell'atmosfera della Terra (costante solare) è data dalla relazione:

$$F_\odot = \frac{4\,\pi \cdot R_\odot^2 \cdot \sigma \cdot T_\odot^4}{4\,\pi \cdot D^2} \simeq$$

$$\simeq \frac{4.837 \cdot 10^{17} m^2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4} \cdot 1.115 \cdot 10^{15}\, K^4}{2.238 \cdot 10^{22}\, m^2} \simeq 1366 \frac{W}{m^2}$$

e quindi otteniamo:

$$F_s \simeq 1.27 \cdot 10^{-20} \cdot F_\odot \simeq 1.73 \cdot 10^{-17} \frac{W}{m^2}$$

Poiché l'energia media dei fotoni della stella è $E = 4.8 \cdot 10^{-19}\ W \cdot s$, otteniamo che il numero **n** di fotoni in arrivo ogni secondo su una superficie di un metro quadrato è:

$$n = \frac{F_s}{E} \simeq \frac{1.73 \cdot 10^{-17} \frac{W}{m^2}}{\frac{4.8 \cdot 10^{-19}\ W \cdot s}{fotone}} \simeq 36 \frac{fotoni}{m^2 \cdot s}$$

L'area complessiva **A** di raccolta del VLT è data dalla somma delle aree dei quattro specchi con diametro $\boldsymbol{d}$ pari a 8.2 m (ed è equivalente a quella di un singolo specchio con diametro di 16.4 m):

$$A = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \simeq 211\, m^2$$

Il numero totale **N** dei fotoni raccolti dal VLT sarà quindi:

$$N = n \cdot A \simeq 36 \frac{fotoni}{m^2 \cdot s} \cdot 211\, m^2 \simeq 7600 \frac{fotoni}{s}$$

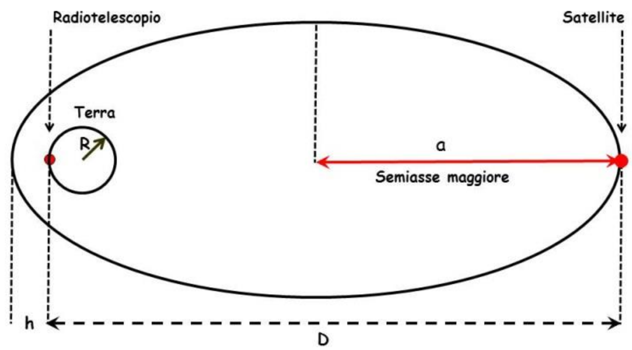
20. Un satellite con a bordo un radiotelescopio da 10.0 m di diametro è stato inserito su un'orbita ellittica intorno alla Terra con periodo di 8.302 giorni e altezza sulla superficie al perigeo di 600 km. Insieme con alcuni radiotelescopi sulla Terra, lavora come un interferometro alla lunghezza d'onda di 1.19 cm. Stimare quale configurazione "satellite + radiotelescopio sulla Terra" permette di ottiene il massimo potere risolutivo e calcolarne il valore. Stimare inoltre il massimo potere risolutivo ottenibile se un oggetto viene osservato nella direzione della linea degli apsidi dell'orbita del satellite.

Soluzione

Per osservazioni interferometriche alla lunghezza d'onda $\boldsymbol{\lambda}$ il potere risolutivo in secondi d'arco $\boldsymbol{\alpha}\,('')$ è dato dalla relazione:

$$\alpha\,('') \simeq \frac{\lambda}{D} \cdot 206265''$$

dove **D** è la componente della distanza tra i due telescopi più lontani perpendicolare alla direzione di osservazione.



La configurazione che permette la risoluzione massima si ha osservando oggetti in direzione perpendicolare al piano orbitale del satellite, quando il satellite si trova all'apogeo e si ha un radiotelescopio a Terra dalla parte opposta al satellite lungo la linea degli apsidi (vedere il disegno, non in scala, a sinistra). In questo caso la distanza **D** tra i due strumenti coincide con la componente perpendicolare alla direzione di osservazione ed è data da: $D = 2\,a - h$, dove $\boldsymbol{a}$ è il semiasse maggiore dell'orbita e **h** è l'altezza del satellite sulla superficie terrestre al perigeo.

Detta $\boldsymbol{M_T}$ la massa della Terra e $\boldsymbol{P}$ il periodo di rivoluzione del satellite, il semiasse maggiore $\boldsymbol{a}$ dell'orbita del satellite si ricava dalla relazione:

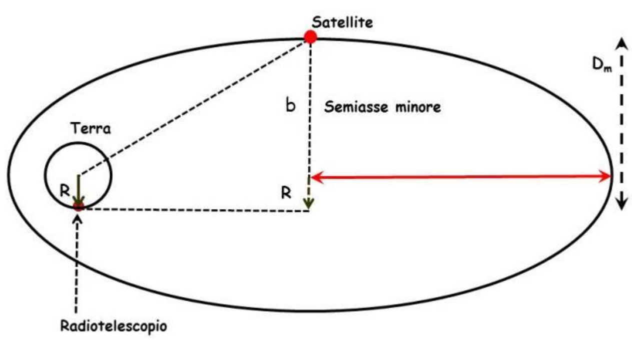
$$a = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot P^2}{4\,\pi^2}} \simeq \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\, \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg \cdot 5.145 \cdot 10^{11}\, s^2}{39.48}} \simeq 173.2 \cdot 10^3\, km$$

quindi:

$$D = 2\,a - h \simeq 346.6 \cdot 10^3\, km - 600\, km \simeq 345.8 \cdot 10^3\, km \simeq 345.8 \cdot 10^6\, m$$

e il potere risolutivo vale:

$$\alpha \simeq \frac{1.19 \cdot 10^{-2}}{345.8 \cdot 10^6\, m} \cdot 206265'' \simeq 7''.10 \cdot 10^{-6} = 7.10\, \mu arcsec$$



Osservando lungo la linea degli apsidi, la configurazione che permette la risoluzione massima (vedere il disegno, non in scala, a sinistra) si ha quando il satellite si trova nel punto di intersezione tra il semiasse minore e l'orbita e si ha un radiotelescopio nel punto individuato dalla retta perpendicolare al semiasse maggiore passante per il centro della Terra, dalla parte opposta al satellite. In questo caso le componenti del semiasse minore dell'orbita e del raggio della Terra perpendicolarmente alla linea di osservazione sono entrambe massime.

Detta $\mathbf{D_m}$ la distanza tra i due strumenti, si ha: $D_m = b + R$

La distanza $\mathbf{d_P}$ del satellite al perigeo vale: $d_P = h + R \simeq 600\, km + 6378\, km \simeq 6978\, km$

Dalle proprietà dell'ellisse sappiamo che la distanza tra il fuoco e il punto di intersezione tra il semiasse maggiore e l'orbita è pari al semiasse maggiore (ricordiamo che il disegno mostrato non è in scala) e quindi:

$$b = \sqrt{a^2 - (a - d_P)^2} = \sqrt{2\,a\,d_P - {d_p}^2} \simeq 4.867 \cdot 10^4\, km \simeq 48670\, km$$

e il potere risolutivo $\boldsymbol{\alpha_1}$ in questa configurazione vale:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{D_m}\, 206265'' \simeq \frac{1.19 \cdot 10^{-2}}{55.05 \cdot 10^6\, m}\, 206265'' \simeq 4''.46 \cdot 10^{-5} = 44.6\, \mu arcsec$$