Campionati Italiani di Astronomia 2023
Corso di preparazione alla Finale Nazionale
Categoria Junior 1 - Lezione 1

1. Sapendo che tre rivoluzioni di Nettuno corrispondono esattamente a due rivoluzioni di Plutone (i due corpi si trovano in quella che viene chiamata "risonanza orbitale"), determinare il periodo di rivoluzione di Plutone e il semiasse maggiore della sua orbita in UA.

Soluzione

Detto $\boldsymbol{T_N}$ il periodo orbitale di Nettuno e $\boldsymbol{T_P}$ il periodo orbitale di Plutone, sappiamo che:

$$3 \cdot \mathrm{T_N} = 2 \cdot \mathrm{T_P}$$

da cui:

$$\mathrm{T_P} = \frac{3 \cdot \mathrm{T_N}}{2} \simeq \frac{3 \cdot 164.79 \text{ anni}}{2} \simeq 247.19 \text{ anni}$$

Sappiamo che per tutti i corpi in orbita attorno al Sole vale la relazione:

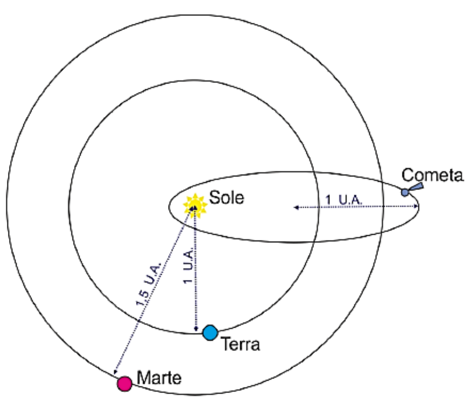
$$T^2\ (anni) = a^3\ (UA)$$

detto quindi $\boldsymbol{a_P}$ il semiasse maggiore dell'orbita di Plutone avremo:

$$a_P = \sqrt[3]{T^2} \simeq \sqrt[3]{(247.19)^2} \simeq 39.387\ UA$$

2. Una cometa percorre un'orbita che la porta molto vicina al Sole al perielio e poco oltre l'orbita di Marte all'afelio. Il semiasse maggiore dell'orbita è di 1 UA. Disegnate le orbite di Terra e Marte in scala e includete una rappresentazione realistica dell'orbita della cometa. Quanto vale il periodo orbitale della cometa?

Soluzione



Una rappresentazione in scala delle orbite della Terra e di Marte è mostrata nella figura a sinistra.
Sapendo che la cometa si avvicina molto al Sole al perielio e si trova poco oltre l'orbita di Marte all'afelio, possiamo includere una rappresentazione realistica della sua orbita.

Poiché la cometa ha un semiasse maggiore pari a 1 UA, il suo periodo di rivoluzione è ovviamente pari a un anno:

$$T^2\ (anni) = a^3\ (UA)$$

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{1} = 1\ anno$$

3. Un satellite artificiale viene inserito su un'orbita equatoriale ellittica attorno alla Terra con semiasse maggiore pari a $1.522 \cdot 10^4$ km e semiasse minore $1.332 \cdot 10^4$ km. Determinate l'altezza minima del satellite sulla superfice della Terra all'apogeo e al perigeo.

Soluzione

Detti $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ i semiassi maggiore e minore dell'orbita del satellite, l'eccentricità $\mathbf{e}$ si ottiene dalla relazione:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1.332 \cdot 10^4 \text{ km}}{1.522 \cdot 10^4 \text{ km}}\right)^2} \simeq 0.4838$$

Le distanze dal centro della Terra del satellite all'apogeo $\mathbf{D_A}$ al perigeo $\mathbf{D_P}$ valgono:

$$D_A = a\,(1+e) \simeq 1.522 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot 1.4838 \simeq 2.258 \cdot 10^4 \text{ km}$$
$$D_P = a\,(1-e) \simeq 1.522 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot 0.5162 \simeq 7.857 \cdot 10^3 \text{ km}$$

L'altezza minima di un satellite dalla superficie si ha quando il satellite è visto transitare allo zenith. In tale circostanza l'altezza è data dalla distanza del satellite dal centro della Terra, meno il raggio della Terra. Nel nostro caso dette $\mathbf{H_{Min-A}}$ e $\mathbf{H_{Min-P}}$ le distanze dalla superficie all'apogeo e al perigeo e $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra, si ha:

$$\mathrm{H_{Min-A}} = \mathrm{D_A} - \mathrm{R_T} \simeq 2.258 \cdot 10^4 \text{ km} - 6378 \text{ km} \simeq 1.620 \cdot 10^4 \text{ km}$$
$$\mathrm{H_{Min-P}} = \mathrm{D_P} - \mathrm{R_T} \simeq 7.857 \cdot 10^3 \text{ km} - 6378 \text{ km} \simeq 1.479 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Soluzione alternativa
Detta **c** la distanza dei fuochi dall'intersezione degli assi nell'ellisse, se ne può ricavare il valore dalla formula nota:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(1.522 \cdot 10^4 \text{ km})^2 - (1.332 \cdot 10^4 \text{ km})^2} \simeq 7.364 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Utilizzando **c** si può ricavare $\mathbf{H_{Min-P}}$:

$$\mathrm{H_{Min-P}} = \mathrm{a} - \mathrm{c} - \mathrm{R_T} \simeq 1.522 \cdot 10^4 \text{ km} - 7.364 \cdot 10^3 \text{ km} - 6378 \text{ km} \simeq 1.478 \cdot 10^3 \text{ km}$$

e da questa si può ricavare $\mathbf{H_{Min-A}}$:

$$\mathrm{H_{Min-A}} = 2\mathrm{a} - \mathrm{H_{Min-P}} - 2\,\mathrm{R_T} \simeq 2 \cdot 1.522 \cdot 10^4 \text{ km} - 1.478 \cdot 10^3 \text{ km} - 2 \cdot 6378 \text{ km} \simeq 1.621 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Le differenze sull'ultima cifra decimale rispetto ai risultati ottenuti con il primo metodo sono dovute alle approssimazioni numeriche fatte.

4. Il raggio vettore che unisce una cometa periodica al Sole spazza 1/15 dell'area totale racchiusa dall'orbita in otto mesi. Determinare il periodo di rivoluzione della cometa.

Soluzione
Detti $\mathbf{A_1}$ l'area spazzata dal raggio vettore nel tempo $\mathbf{t_1}$ pari a 8 mesi e **A** l'area totale spazzata dal raggio vettore nell'intero periodo di rivoluzione **T**, dalla II Legge di Keplero si ha:

$$\mathrm{A_1} : \mathrm{t_1} = \mathrm{A} : \mathrm{T}$$

ed essendo:

$$\mathrm{A} = 15 \cdot \mathrm{A_1}$$

ricaviamo:

$$\mathrm{T} = \frac{A \cdot t_1}{A_1} = \frac{15\,A_1 \cdot t_1}{A_1} \simeq 15 \cdot 8\,mesi \simeq 120\,mesi = 10\,anni$$

5. Il Telescopio Spaziale Hubble (HST) orbita attorno alla Terra dalle ore 12:00 UT del 25 aprile 1990 a un'altezza sulla superficie di 539 km. Quante orbite attorno alla Terra ha completato HST alle ore 12:00 UT del 25 aprile 2020?

Soluzione
Detti $\boldsymbol{R_T}$ e $\boldsymbol{M_T}$ raggio e massa della Terra e $\mathbf{h_{HST}}$ l'altezza sulla superficie della Terra di HST, il suo periodo orbitale $\mathbf{T_{HST}}$ si ottiene dalla III legge di Keplero:

$$T_{HST} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_T + h_{HST})^3}{G\, M_T}}$$

$$\simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.309 \cdot 10^{20}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m}{s^2 \cdot kg} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}} \simeq 5725\ s \simeq 95.42\ \text{minuti}$$

Dalle 12:00 UT del 25 aprile 1990 alle 12:00 UT del 25 aprile 2020 sono trascorsi un numero di giorni $\boldsymbol{\Delta T}$ pari a:

$$\Delta T = 365 \cdot 30 + 8 = 10958$$

in quanto dobbiamo considerare che gli anni 1992, 1996, 2000, 2004, 2008, 2012, 2016 e 2020 sono stati bisestili. Il numero di orbite $\boldsymbol{N_{HST}}$ di HST sarà stato quindi:

$$N_{HST} = \frac{\Delta T}{T_{HST}} \simeq \frac{10958\ \text{giorni} \cdot 86400 \frac{s}{\text{giorno}}}{5725\ s} \simeq 165.4 \cdot 10^3$$

6. Calcolate il minimo periodo di rivoluzione di un piccolo corpo di massa trascurabile che si muove:

1. su un'orbita circolare attorno al Sole;
2. su un'orbita circolare attorno alla Terra.

Assumete il Sole e la Terra perfettamente sferici e trascurate la presenza dell'atmosfera terrestre.

Soluzione

In entrambi i casi il periodo minimo si ha quando il semiasse maggiore (raggio) **a** dell'orbita del corpo è praticamente coincidente con il raggio del Sole $\boldsymbol{R_\odot}$ e della Terra $\boldsymbol{R_T}$.

1. Il periodo minimo $\boldsymbol{T_{Min\odot}}$ di rivoluzione attorno al Sole si può ricavare dalla relazione:

$$T_{Min\odot}{}^2\ (anni) = R_\odot{}^3\ (UA)$$

$$T_{Min\odot} = \sqrt{\left(\frac{R_\odot}{1\ UA}\right)^3} \simeq \sqrt{\left(\frac{6.955 \cdot 10^5\ km}{149.6 \cdot 10^6\ km}\right)^3} \simeq 3.170 \cdot 10^{-4}\ anni \simeq 2h\ 46.7m$$

oppure, detta $\boldsymbol{M_\odot}$ la massa del Sole, dalla relazione:

$$T_{Min\odot} = \sqrt{\frac{4\,\pi^2\, R_\odot{}^3}{G\ M_\odot}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.364 \cdot 10^{26}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ kg}} \simeq 10^4\ s \simeq 2h\ 46.7\ m$$

2. Il periodo minimo $\boldsymbol{T_{Min-T}}$ di rivoluzione attorno alla Terra, detta $\boldsymbol{M_T}$ la sua massa, si può ricavare dalla relazione:

$$T_{Min-T} = \sqrt{\frac{4\,\pi^2\, R_T{}^3}{G\ M_T}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 2.595 \cdot 10^{20}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}} \simeq 5070\ s \simeq 1h\ 24.5\ m$$

7. Il pianeta "Papalla" ruota, su un'orbita circolare, attorno a una stella esattamente uguale al Sole. La sua distanza dalla stella è di $230.7 \cdot 10^6$ km. Gli astronomi di Papalla misurano il tempo e le distanze con unità di misura fondamentali (il secondo e il metro) identiche a quelle degli astronomi della Terra e anche loro chiamano "anno" il tempo impiegato dal loro pianeta per compiere una rivoluzione completa attorno alla loro stella. Quanto vale, in km, un anno luce per gli astronomi del pianeta Papalla?

Soluzione
Poiché la stella attorno a cui ruota Papalla è esattamente uguale al Sole, detto ***a*** il semiasse maggiore (ovvero il raggio) dell'orbita e ***T*** il periodo di rivoluzione, vale la relazione:

$$a^3\ (UA) = T^2\ (anni)$$

da cui ricaviamo:

$$T \simeq \sqrt{\left(\frac{230.7 \cdot 10^6\ km}{149.6 \cdot 10^6\ km}\right)^3} \simeq \sqrt{1.542^3} \simeq 1.915\ anni\ terrestri$$

La velocità della luce è una costante universale, mentre l'anno luce è la distanza che la luce percorre in un anno. Poiché l'anno di Papalla è 1.915 volte più lungo di quello terrestre, l'anno luce per gli astronomi di Papalla $\boldsymbol{al_{Papalla}}$ sarà più lungo della stessa quantità e varrà quindi:

$$al_{Papalla} \simeq 9460.7 \cdot 10^9\ km \cdot 1.915 \simeq 1.812 \cdot 10^{13}\ km$$

8. Supponete di raddoppiare la massa del Sole. Mantenendo inalterato il valore dell'UA, quanto varrebbe il nuovo periodo di rivoluzione della Terra? Se invece, mantenendo invariata la massa del Sole, raddoppiasse la massa di Mercurio, quale sarebbe il suo nuovo periodo di rivoluzione supponendo invariato il semiasse maggiore dell'orbita?

Soluzione
Scriviamo la III Legge di Keplero indicando con ***a*** e ***T*** i valori attuali del semiasse maggiore dell'orbita e del periodo di rivoluzione della Terra e con $\boldsymbol{M_\odot}$ e $\boldsymbol{M_T}$ le masse del Sole e della Terra. Poiché $M_\odot \gg M_T$ avremo:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\,(M_\odot + M_T)}{4\,\pi^2} \simeq \frac{G\,M_\odot}{4\,\pi^2}$$

Raddoppiando la massa del Sole e detto $\boldsymbol{T_1}$ il nuovo periodo di rivoluzione della Terra si ha:

$$\frac{a^3}{{T_1}^2} = \frac{G\,(2\,M_\odot + M_T)}{4\,\pi^2} \simeq \frac{2\,G\,M_\odot}{4\,\pi^2} = \frac{G\,M_\odot}{2\,\pi^2}$$

Dividendo membro a membro queste due relazioni si ottiene il nuovo periodo di rivoluzione della Terra:

$$\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{1}{2} = 0.5 \qquad \text{da cui:} \qquad T_1 = T\,\sqrt{0.5} \simeq 0.7071\ anni \simeq 258.3\ g$$

Ovviamente si può arrivare alla soluzione calcolando direttamente il nuovo periodo di rivoluzione:

$$T_1 = \sqrt{\frac{2\,\pi^2\,a^3}{G\ M_\odot}} \simeq \sqrt{\frac{19.74 \cdot 3.348 \cdot 10^{33}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}} \simeq 2.231 \cdot 10^7\ \mathrm{s} \simeq 258.3\ \mathrm{g}$$

Detti $\boldsymbol{a_M}$, $\boldsymbol{T_M}$, e $\boldsymbol{M_M}$ i valori attuali del semiasse maggiore dell'orbita, del periodo di rivoluzione e della massa di Mercurio, raddoppiando la massa il periodo di rivoluzione $\boldsymbol{T_{1M}}$ resterebbe invariato, in quanto:

$$\frac{{a_M}^3}{{T_M}^2} = \frac{G\,(M_\odot + M_M)}{4\,\pi^2} \simeq \frac{G\,M_\odot}{4\,\pi^2}$$

$$\frac{{a_M}^3}{{T_1}^2} = \frac{G\,(M_\odot + 2\,M_M)}{4\,\pi^2} \simeq \frac{G\,M_\odot}{4\,\pi^2}$$

9. L'asteroide Pallas ha un raggio medio di 512 km; l'accelerazione di gravità in superficie vale: 0.210 m/s^2. Calcolare la densità dell'asteroide in kg/m^3 e in g/cm^3 e la velocità di fuga sulla superficie.

Soluzione

Detto **R** il raggio, l'asteroide ha un volume **V** pari a:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 5.62 \cdot 10^8 \text{ km}^3 = 5.62 \cdot 10^8 \cdot (10^3 \text{ m})^3 = 5.62 \cdot 10^{17} \text{ m}^3$$

Nota l'accelerazione di gravità alla sua superficie ricaviamo la massa **M** e la densità **ρ** di Pallas:

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G} \simeq \frac{0.210 \frac{m}{s^2} \cdot 2.62 \cdot 10^{11} m^2}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}} \simeq 8.24 \cdot 10^{20} \text{ kg}$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{8.25 \cdot 10^{20} \text{ kg}}{5.62 \cdot 10^{17} \text{ m}^3} \simeq 1.47 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1.47 \cdot 10^3 \cdot \frac{10^3 \text{ g}}{10^6 \text{ cm}^3} = 1.47 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

La velocità di fuga $\mathbf{v_f}$ dall'asteroide vale:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20} \text{ kg}}{512 \cdot 10^3 \text{ m}}} \simeq 463 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.463 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

10. La stazione spaziale Endurance del film Interstellar, che si trova nello spazio a grande distanza dalle stelle più vicine, ruota su sé stessa a velocità costante per creare, nella sua parte più esterna, una gravità pari a un terzo di quella presente sulla superficie della Terra. Sapendo che il raggio dell'Endurance è di 298.0 m, calcolate quanti giri su sé stessa effettua ogni ora e quanto vale l'accelerazione di gravità nella sala motori, posta al centro della stazione spaziale.

Soluzione

Per la Endurance possiamo trascurare gli effetti della gravità dovuta alle stelle. Detta $\boldsymbol{g_T}$ l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra, l'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g_E}$ nella parte più esterna dell'Endurance vale:

$$g_E = \frac{g_T}{3} \simeq \frac{9.807 \frac{m}{s^2}}{3} \simeq 3.269 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Detti **ω** la velocità angolare, $\mathbf{V_T}$ la velocità tangenziale e **r** il raggio della stazione spaziale, il modulo dell'accelerazione centrifuga $\mathbf{a_c}$ dovuta alla rotazione vale:

$$a_c = g_E = \omega^2 \cdot r = \frac{{V_T}^2}{r}$$

da cui ricaviamo:

$$V_T = \sqrt{g_E \cdot r} \simeq \sqrt{3.269 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 298.0 \text{ m}} \simeq 31.21 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Il periodo di rotazione **T** vale:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{V_T} \simeq \frac{2 \cdot \pi \cdot 298.0 \text{ m}}{31.21 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \simeq 60 \text{ s} \simeq 1 \text{ m}$$

Quindi in un'ora l'Endurance effettua un numero di giri **N** su sé stessa pari a:

$$N = \frac{3600 \text{ s}}{60 \text{ s}} = \frac{60 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 60 \text{ giri}$$

Poiché a parità di velocità angolare l'accelerazione centrifuga diminuisce con il raggio, al centro dell'Endurance il raggio da considerare è nullo e avremo quindi:

$$g_E = \omega^2 \cdot r = 0$$

11. Un'astronave si trova tra la Terra e il Sole nel punto in cui l'attrazione gravitazionale della Terra è un centesimo di quella del Sole. A che distanza dalla Terra si trova e quanto tempo impiegherà un segnale radio per raggiungere i radiotelescopi terrestri? Trascurate gli effetti dovuti al moto di rivoluzione della Terra, gli effetti gravitazionali della Luna e degli altri pianeti, le dimensioni della Terra e considerate la sua orbita circolare.

Soluzione

Detta **d** la distanza a cui si trova l'astronave dalla Terra, $\boldsymbol{M_T}$, $\boldsymbol{M_S}$ e $\boldsymbol{m_a}$ le masse della Terra, del Sole e dell'astronave e **D** la distanza Terra-Sole, poiché l'astronave si trova tra la Terra e il Sole nel punto in cui l'attrazione gravitazionale della Terra è 1/100 di quella del Sole si ha:

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m_a}{d^2} = \frac{1}{100} \cdot \frac{G \cdot M_S \cdot m_a}{(D-d)^2}$$

da cui ricaviamo:

$$\frac{D-d}{d} = \sqrt{\frac{M_S}{100\, M_T}} \qquad\qquad \frac{D}{d} - 1 = \sqrt{\frac{M_S}{100\, M_T}}$$

e infine:

$$d = \frac{D}{\sqrt{\frac{M_S}{100\, M_T}} + 1} \simeq \frac{149.6 \cdot 10^6 \text{ km}}{\sqrt{\frac{1.989 \cdot 10^{30}\text{ kg}}{5.972 \cdot 10^{26}\text{ kg}}} + 1} \simeq 2.548 \cdot 10^6 \text{ km}\,.$$

Per calcolare il tempo **t** che un segnale radio impiega per raggiungere i radiotelescopi terrestri, dobbiamo ricordare che i segnali radio sono onde elettromagnetiche e pertanto viaggiano alla velocità della luce **c**:

$$t = \frac{d}{c} \simeq \frac{2.548 \cdot 10^6 \text{ km}}{299792\ \frac{\text{km}}{\text{s}}} \simeq 8.499 \text{ s}$$

12. La Stazione Spaziale Internazionale (ISS) orbita intorno alla Terra su un'orbita circolare a un'altezza sulla superficie di 412 km. Calcolate il valore dell'accelerazione di gravità della Terra a quell'altezza. Perché vediamo gli astronauti a bordo della IIS "fluttuare" come se l'accelerazione di gravità fosse circa zero?

Soluzione

Detta $\boldsymbol{M}$ la massa della Terra ed $\boldsymbol{R}$ il suo raggio, il valore $\boldsymbol{g_h}$ dell'accelerazione di gravità a un'altezza $\boldsymbol{h}$ dalla superficie è dato dalla relazione:

$$g_h = \frac{G \cdot M}{(R+h)^2}$$

In particolare, per h = 412 km avremo:

$$g_{h-412} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6378 \cdot 10^3 \text{ m} + 412 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \simeq 8.65\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Questo valore è solo del 12% circa minore dell'accelerazione di gravità al suolo. L'apparente assenza di gravità deriva dal fatto che tanto la ISS quanto gli astronauti al suo interno sono in orbita ognuno per conto proprio intorno alla Terra, soggetti alla forza di gravità, ma poiché l'accelerazione di gravità non dipende dalla massa dei corpi, essa li costringe a muoversi tutti con la stessa velocità lungo la stessa orbita circolare, e pertanto le loro posizioni reciproche non cambiano. Inoltre, per mantenere la stazione spaziale in orbita senza dover tenere sempre accesi i motori, bisogna darle una opportuna velocità di rivoluzione, che dal punto di vista della stazione spaziale si traduce nell'equilibrio tra la forza centripeta dovuta alla gravità e quella centrifuga dovuta alla rotazione, e la stessa cosa varrà per gli astronauti all'interno. Allora, sempre dal punto di vista della stazione spaziale, gli astronauti risultano fermi in mezzo all'aria (mentre dal punto di vista della Terra, supposta ferma per semplicità, ruotano appunto insieme alla ISS, e l'unica forza agente su tutti è quella centripeta).

13. Un pianeta di massa $\mathbf{M_P} = 1.6 \cdot 10^{26}$ kg si muove attorno a una stella su un'orbita il cui semiasse maggiore è di 9.00 UA con un periodo di 20.0 anni. Trovare la massa (in kg e in unità di masse solari) e il raggio (in km e in unità del raggio solare) della stella, sapendo che l'accelerazione di gravità sulla fotosfera della stella è 54 volte quella che si ha sulla superficie della Terra.

Soluzione

Detti **a** il semiasse maggiore dell'orbita e **T** il periodo di rivoluzione, trascurando la massa del pianeta (vedere nota alla fine), ricaviamo la massa della stella $\mathbf{M_s}$ dalla III legge di Keplero:

$$\mathrm{M_s} = \frac{4\,\pi^2\,a^3}{G\,T^2} \simeq \frac{39.48\ \cdot 2.44\ \cdot 10^{36}\ m^3}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\dfrac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot 3.98\ \cdot\ 10^{17}\ s^2} \simeq 3.63\ \cdot\ 10^{30}\ kg \simeq 1.82\ M_{\odot}$$

Detta $\mathbf{g_S}$ l'accelerazione di gravità sulla fotosfera della stella e $\mathbf{g_T}$ l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra, possiamo ricavare il raggio della stella $\mathbf{R_s}$ dalla relazione:

$$R_S = \sqrt{\frac{G\ \cdot M_S}{g_S}} = \sqrt{\frac{G\ \cdot M_S}{54\ \cdot\ g_T}}$$

$$R_S \simeq \sqrt{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\dfrac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot\ 3.63\ \cdot\ 10^{30}\ kg}{54\ \cdot 9.807\ \dfrac{m}{s^2}}} \simeq 6.76\ \cdot\ 10^5\ km \simeq 0.973\ R_{\odot}$$

Nota.

Dallo studio della struttura ed evoluzione stellare sappiamo che la massa minima di una stella che "brucia" idrogeno nel nucleo è: $\mathrm{M_{S-minima}} \simeq 0.08\ \cdot \mathrm{M_{\odot}} \simeq 1.59\ \cdot\ 10^{29}\ \mathrm{kg} \simeq 24\ \cdot 10^3\ \mathrm{M_p}$. Esistono anche degli oggetti molto particolari, le "Brown Dwarf", una sorta di "stelle mancate" che bruciano deuterio nel loro nucleo, la cui massa minima è di circa: $\mathrm{M_{BD}} \simeq 0.012\ \cdot\ \mathrm{M_{\odot}} \simeq 2.4\ \cdot\ 10^{28}\ \mathrm{kg} \simeq 3.7\ \cdot\ 10^3\ \mathrm{M_P}$. Quale che sia la natura dell'oggetto attorno a cui è stato scoperto il pianeta, l'approssimazione $\mathrm{M_S} + \mathrm{M_P} \simeq \mathrm{M_s}$ risulta giustificata.

14. La stella Kepler-101 ha due pianeti, Kepler-101b e Kepler-101c. Kepler-101b ha un raggio 0.520 volte quello di Giove e una massa 51.0 volte quella della Terra. Kepler-101c ha un raggio 1.23 volte quello della Terra e una massa $1.20\ \cdot\ 10^{-2}$ volte quella di Giove. Calcolare:

1. l'accelerazione di gravità alla superficie dei due pianeti;
2. a quale altezza dalla superficie di Kepler-101c si avrà un'accelerazione di gravità pari a quella sulla superficie di Kepler-101b;
3. la densità dei due pianeti, valutando se sono rocciosi o gassosi.

Soluzione

1. Detti $\boldsymbol{M_T}$, $\boldsymbol{M_G}$, $\boldsymbol{R_T}$, e $\boldsymbol{R_G}$ le masse e i raggi della Terra e di Giove, l'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g_b}$ e $\boldsymbol{g_c}$ alla superficie dei due pianeti vale:

$$g_b = \frac{G\ \cdot 51.0 \cdot\ M_T}{(0.520\ \cdot\ R_G\,)^2} \simeq \frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\dfrac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot 51.0\ \cdot 5.972\ \cdot\ 10^{24}\ kg}{(0.520\ \cdot 71490\ \cdot\ 10^3\ m)^2} \simeq 14.7\ \frac{m}{s^2}$$

$$g_c = \frac{G\ \cdot 1.20\ \cdot\ 10^{-2} \cdot\ M_G}{(1.23\ \cdot\ R_T\,)^2} \simeq \frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\dfrac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot 1.20\ \cdot\ 10^{-2}\ \cdot 1.899\ \cdot\ 10^{27}\ kg}{(1.23\ \cdot 6378\ \cdot\ 10^3\ m)^2} \simeq 24.7\ \frac{m}{s^2}$$

2. L'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g_{ch}}$ a un'altezza $\boldsymbol{h}$ sulla superficie di Kepler-101c vale:

$$g_{ch} = \frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{(1.23 \cdot R_T + h)^2}$$

relazione dalla quale, ponendo $g_{ch} = g_b$, otteniamo il valore di $\boldsymbol{h}$ richiesto:

$$h = \sqrt{\frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{g_b}} - 1.23 \cdot R_T$$

$$h \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27}\, kg}{14.7\, \frac{m}{s^2}}} - 7.84 \cdot 10^6\, m \simeq 2.33 \cdot 10^6\, m$$

3. La densità media $\boldsymbol{\rho_b}$ e $\boldsymbol{\rho_c}$ dei due pianeti è data dal rapporto tra la loro massa e il loro volume:

$$\boldsymbol{\rho_b} = \frac{3 \cdot 51.0 \cdot M_T}{4\,\pi \cdot (0.520 \cdot R_G)^3} \simeq \frac{3 \cdot 51.0 \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg}{4\,\pi \cdot (0.520 \cdot 71490 \cdot 10^3\, m)^3} \simeq 1.42 \cdot 10^3\, \frac{kg}{m^3}$$

$$\boldsymbol{\rho_c} = \frac{3 \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{4\,\pi \cdot (1.23 \cdot R_T)^3} \simeq \frac{3 \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27}\, kg}{4\,\pi \cdot (1.23 \cdot 6378 \cdot 10^3\, m)^3} \simeq 1.13 \cdot 10^4\, \frac{kg}{m^3}$$

Dalle densità ottenute si deduce che il pianeta Kepler-101b è di tipo gassoso, mentre Kepler-101c è di tipo roccioso. Si consideri infatti che Giove ha una densità media di $1.33 \cdot 10^3\ kg/m^3$, mentre la densità media della Terra è di $5.51 \cdot 10^3\ kg/m^3$.

15. A che distanza dalla Terra sulla congiungente Terra-Sole le forze di gravità esercitate su un corpo di piccola massa dalla Terra e dal Sole sono uguali in modulo? Trascurate gli effetti dovuti alla rivoluzione della Terra.

Soluzione

Dette $\boldsymbol{m_s}$, $\boldsymbol{M_\odot}$, e $\boldsymbol{M_T}$ le masse del piccolo corpo, del Sole e della Terra, $\boldsymbol{d_{\odot s}}$ la distanza del corpo dal Sole e $\boldsymbol{d_{Ts}}$ la distanza del corpo dalla Terra, quando le due forze sono uguali in modulo (e quindi avendo stessa direzione ma verso opposto si equilibrano) si ha:

$$G\, \frac{M_\odot \cdot m_s}{{d_{\odot s}}^2} = G\, \frac{M_T \cdot m_s}{{d_{Ts}}^2}$$

da cui ricaviamo:

$$d_{Ts} = d_{\odot s} \sqrt{\frac{M_T}{M_\odot}} \qquad \text{ed essendo:} \qquad d_{\odot s} = 1UA - d_{Ts}$$

si ricava infine:

$$d_{Ts} = \frac{1\, UA \cdot \sqrt{\frac{M_T}{M_\odot}}}{1 + \sqrt{\frac{M_T}{M_\odot}}} \simeq \frac{149.6 \cdot 10^6\, km \cdot \sqrt{\frac{5.972 \cdot 10^{24}\, kg}{1.989 \cdot 10^{30}\, kg}}}{1 + \sqrt{\frac{5.972 \cdot 10^{24}\, kg}{1.989 \cdot 10^{30}\, kg}}} \simeq 2.588 \cdot 10^5\, km$$

Nota.

Questa posizione di equilibrio non va confusa con il punto lagrangiano ***L1*** del sistema Sole-Terra. La posizione del punto ***L1*** è quella dove la risultante delle accelerazioni gravitazionali dovute al Sole e alla Terra è uguale all'accelerazione centripeta necessaria a mantenere in orbita il corpo di piccola massa a quella particolare distanza dal Sole con lo stesso periodo orbitale della Terra. Il punto ***L1*** si trova sulla congiungente Sole-Terra a circa 1.5 milioni di km dalla Terra in direzione del Sole.