CAMPIONATI ITALIANI DI ASTRONOMIA 2023

Gara interregionale – 15 febbraio

Categoria Junior 2

1. La cometa ZTF

In questi giorni si assiste al passaggio ravvicinato della cometa C/2022 E3 (ZTF), il cui periodo di rivoluzione è di $5.20 \cdot 10^4$ anni, e che al perielio si è trovata a una distanza di 162 milioni di km dal Sole. Calcolate:

1. il semiasse maggiore dell'orbita in unità astronomiche e in km;
2. l'eccentricità dell'orbita;
3. la distanza della cometa ZTF dal Sole all'afelio in unità astronomiche.

Soluzione.

1. Detti **a** il semiasse maggiore dell'orbita in UA e **T** il periodo di rivoluzione della cometa ZTF in anni, vale la relazione:

$$a = \sqrt[3]{T^2} \simeq \sqrt[3]{(5.20 \cdot 10^4)^2} \simeq 1390\ UA \simeq 2.08 \cdot 10^{11}\ km$$

2. Detti $\mathbf{D_P}$ la distanza della cometa al perielio ed **e** l'eccentricità dell'orbita, vale la relazione:

$$\mathrm{D_P} = a\,(1-e)$$

da cui si ricava:

$$e = 1 - \frac{D_P}{a} \simeq 1 - \frac{162 \cdot 10^6\ km}{2.08 \cdot 10^{11}\ km} \simeq 0.999$$

3. Infine la distanza $\mathbf{D_A}$ della cometa all'afelio vale:

$$\mathrm{D_A} = a\,(1+e) \simeq 1390\ UA \cdot 1.999 \simeq 2780\ UA$$

Nota. Questo problema è stato sviluppato utilizzando i parametri orbitali della cometa noti alla fine del mese di gennaio 2023. Per un oggetto con eccentricità così elevata e periodo così lungo ulteriori osservazioni porteranno a un sensibile miglioramento nella conoscenza dei parametri orbitali.

2. Transito sul Sole

Immaginate di osservare il transito della Terra sul disco del Sole da un pianeta extrasolare molto lontano. Assumete l'orbita della Terra circolare e che il transito avvenga lungo il diametro del Sole a velocità costante. Calcolate la durata del transito trascurando le dimensioni della Terra.

Soluzione.

Assumendo l'orbita circolare, la Terra ha una velocità di:

$$\mathrm{v} = \frac{2\pi \mathrm{a}}{\mathrm{T}} = \frac{2\pi \cdot 149.6 \cdot 10^6\ \mathrm{km}}{365.256\ \mathrm{giorni} \cdot 86400\mathrm{s}} \simeq 29.79\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Il percorso compiuto dalla Terra intorno al Sole, osservato dal pianeta extrasolare, quindi da un osservatore molto distante, è approssimabile a un segmento con lunghezza pari al diametro del Sole. Detto $\mathbf{R_\odot}$ il raggio del Sole, la durata **t** del transito sarà:

$$t = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{v}} = \frac{2\,\mathrm{R_\odot}}{\mathrm{v}} = \frac{2 \cdot 6.955 \cdot 10^5\ \mathrm{km}}{29.79\ \frac{km}{s}} \simeq 4.669 \cdot 10^4\ \mathrm{s} \simeq 12\,h\,58m\,10s$$

3. La Terra spostata

Supponete di raddoppiare il semiasse maggiore dell'orbita della Terra.

1. Quanto durerebbe il periodo di rivoluzione della Terra attorno al Sole? Esprimete il risultato in giorni.
2. Quanto dovrebbe valere la massa del Sole affinché la durata del periodo di rivoluzione della Terra non cambi?

Soluzione:

1. Per un corpo in orbita attorno al Sole, esprimendo il semiasse maggiore dell'orbita **a** in UA e il periodo di rivoluzione **T** in anni, la III legge di Keplero assume la forma:

$$a^3 = T^2$$

Se il semiasse dell'orbita della Terra raddoppia il suo valore sarà di 2 UA e per il periodo di rivoluzione otterremo:

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{8} \simeq 2.8284\ anni \simeq 1033.10\ giorni$$

2. Calcoliamo adesso il periodo di rivoluzione dall'espressione generale della III legge di Keplero, trascurando la massa della Terra rispetto a quella, indicata con $\mathbf{M_{\odot}}$, del Sole:

$$\mathrm{T}^2 = \frac{4\,\pi^2\,\mathrm{a}^3}{G \cdot M_{\odot}}$$

Indichiamo con $\mathbf{M_S}$ la massa che dovrebbe avere il Sole affinché raddoppiando il semiasse maggiore il periodo resti invariato. Avremo che:

$$\frac{4\,\pi^2\,\mathrm{a}^3}{\mathrm{G} \cdot \mathrm{M}_{\odot}} = \frac{4\,\pi^2 \cdot 8\,\mathrm{a}^3}{\mathrm{G} \cdot \mathrm{M_S}}$$

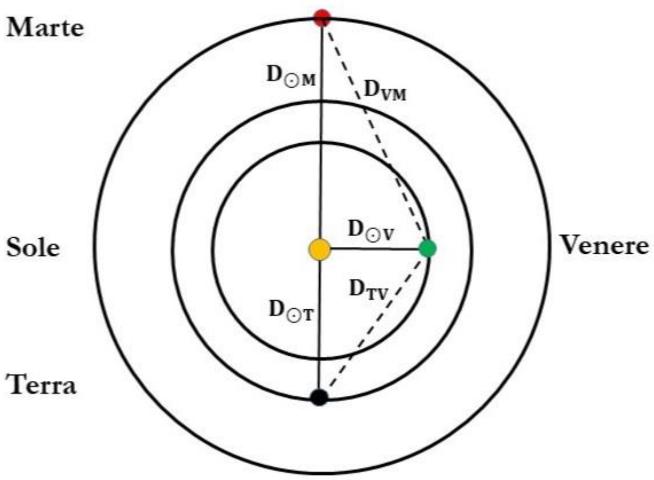
da cui si ricava:

$$\mathrm{M_S} = 8\,\mathrm{M}_{\odot}$$

4. Triangolazione planetaria

Un segnale radio deve essere immediatamente inviato al rover Perseverance su Marte, che purtroppo è in congiunzione con il Sole e non può essere raggiunto direttamente. Si decide di inviare il segnale verso il ripetitore VRR (Venus Radio Repeater) posto sulla superficie di Venere. L'angolo Terra - Sole - Venere è retto e il VRR, ricevuto il segnale, lo ritrasmette istantaneamente verso Marte. Quanto tempo impiega il segnale per essere trasmesso dalla Terra a Marte? Assumete tutte le orbite circolari e sullo stesso piano e trascurate lo spostamento dei pianeti durante la trasmissione del segnale.

Soluzione.



Per raggiungere Marte il segnale, che viaggia alla velocità della luce **c**, dovrà percorrere il tragitto Terra-Venere e poi quello Venere-Marte. Nella configurazione descritta dal problema, visibile nella figura a sinistra, indichiamo con $\mathbf{D_{\odot T}}$ la distanza Sole-Terra, con $\mathbf{D_{\odot V}}$ la distanza Sole-Venere, con $\mathbf{D_{\odot M}}$ la distanza Sole-Marte, con $\mathbf{D_{TV}}$ la distanza Terra-Venere e con $\mathbf{D_{VM}}$ la distanza Venere-Marte.

Nell'ipotesi di orbite circolari, se l'angolo Terra-Sole- Venere è di 90° si ha:

$$\mathrm{D_{TV}} = \sqrt{\mathrm{D_{\odot T}}^2 + \mathrm{D_{\odot V}}^2}$$

$$\mathrm{D_{TV}} \simeq \sqrt{(149.6 \cdot 10^6\ km)^2 + (108.2 \cdot 10^6\ km)^2} \simeq 184.6 \cdot 10^6\ km$$

Se Marte è in congiunzione anche l'angolo Marte-Sole-Venere è di 90° e nell'ipotesi di orbite circolari si ha:

$$\mathrm{D_{VM}} = \sqrt{\mathrm{D_{\odot M}}^2 + \mathrm{D_{\odot V}}^2} \simeq \sqrt{(227.9 \cdot 10^6\ km)^2 + (108.2 \cdot 10^6\ km)^2} \simeq 252.3 \cdot 10^6\ km$$

La distanza totale $\mathbf{D_{TM}}$ che il segnale dovrà percorrere per andare dalla Terra a Marte sarà quindi:

$$\mathrm{D_{TM}} = \mathrm{D_{TV}} + \mathrm{D_{VM}} \simeq 184.6 \cdot 10^6\ km + 252.3 \cdot 10^6\ km \simeq 436.9 \cdot 10^6\ km$$

Per percorrere detta distanza la luce impiega un tempo **T** pari a:

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{D_{TM}}}{c} \simeq \frac{436.9 \cdot 10^6\ km}{299792\ \frac{km}{s}} \simeq 1457\ s \simeq 24m\ 17s$$

5. La velocità della cometa

Una cometa di massa $7.15 \cdot 10^{16}$ kg segue un'orbita parabolica con perielio a 4.64 UA dal Sole. Calcolate la sua velocità al perielio.

Soluzione

Se l'orbita è parabolica l'energia meccanica totale, cioè la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale, è sempre pari a zero. Indicando con $\mathbf{M_\odot}$ la massa del Sole, con $\mathbf{m}$ la massa della cometa, con $\mathbf{d_p}$ e $\mathbf{v}$ distanza e velocità della cometa al perielio, si ha:

$$0 = \frac{1}{2}\mathrm{m\,v}^2 - \frac{\mathrm{G\,M_\odot\,m}}{\mathrm{d_p}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{G\,\mathrm{M}_\odot\,m}{d_p}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\;G\,\mathrm{M}_\odot}{d_p}} \simeq \sqrt{\frac{2\,\cdot\,6.674\,\cdot\,10^{-11}\,\dfrac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 1.989\,\cdot\,10^{30}\,kg}{4.64\,\cdot\,149.6\,\cdot\,10^9\,m}} \simeq 19.6\,\cdot\,10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 19.6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$