Campionati Italiani di Astronomia 2023
Corso di preparazione alla Gara Interregionale

Categoria Junior 2 - Lezione 1

1. Svolgete i seguenti calcoli esprimendo i risultati con il corretto numero di cifre significative:

$10^3 \cdot 10^5 =$ $\quad (10^3)^3 =$ $\quad 10^8 + 10^2 =$ $\quad 25.764 + 113.22 =$

$2.347 + 3.15 =$ $\quad 3.2576 \cdot 10^3 + 1.1322 \cdot 10^2 =$ $\quad 3.567 \cdot 10^3 \cdot 2.56 \cdot 10^4 =$

$\frac{10^{20}}{10^{-11} \cdot 10^{24}} =$ $\quad \frac{25.764}{113.22} =$ $\quad \frac{25.764}{13.22} =$ $\quad \frac{3.274 \cdot 10^5}{2.22 \cdot 10^2} =$

Soluzione

$10^3 \cdot 10^5 = 10^8$ $\quad (10^3)^3 = 10^9$ $\quad 10^8 + 10^2 \simeq 10^8$ (poiché 10^2 è trascurabile rispetto a 10^8)

$25.764 + 113.22 \simeq 138.98 = 1.3898 \cdot 10^2$ $\quad 2.347 + 3.15 \simeq 5.50$

$3.2576 \cdot 10^3 + 1.1322 \cdot 10^2 \simeq 3.3708 \cdot 10^3$ $\quad 3.567 \cdot 10^3 \cdot 2.56 \cdot 10^4 \simeq 9.13 \cdot 10^7$

$\frac{10^{20}}{10^{-11} \cdot 10^{24}} = 10^{20-(-11+24)} = 10^7$ $\quad \frac{25.764}{113.22} \simeq 0.22756 = 2.2756 \cdot 10^{-1}$

$\frac{25.764}{13.22} \simeq 1.949$ $\quad \frac{3.274 \cdot 10^5}{2.22 \cdot 10^2} \simeq 1.47 \cdot 10^3$

Nota.
In una somma, o sottrazione, il numero di cifre dopo la virgola da riportare nel risultato, con gli opportuni arrotondamenti, è quello del valore che ne ha un numero minore.
In un prodotto, o divisione, bisogna considerare le "cifre significative". Dalla teoria degli errori sappiamo che possiamo, con buona approssimazione, esprimere il risultato finale di un prodotto (o di un rapporto) con un numero di cifre significative uguale al numero di cifre significative della quantità misurata con precisione minore. Se una misura ha valore 2.576 significa che non si è in grado di apprezzare quantità inferiori al millesimo, l'errore sul dato (a meno di diversa indicazione) è di ± 0.001 e le cifre significative sono 4. Per il valore 113.22 le cifre significative sono 5; per i valori 0.7340 e 0.7304 le cifre significative sono 4, per il valore 0.734 le cifre significative sono 3, per il valore 0.0042 le cifre significative sono 2. Quindi gli zeri a sinistra della prima cifra diversa da zero non sono significativi, mentre lo sono quelli "interni" a un valore o a destra dell'ultima cifra diversa da zero.

2. Considerate un'ellisse con semiasse maggiore pari a 7.02 UA e semiasse minore pari a 5.52 UA. Calcolate l'eccentricità dell'ellisse e la distanza tra i due fuochi.

Soluzione
Detti ***a***, ***b*** ed ***e*** semiasse maggiore e minore ed eccentricità dell'ellisse e ***c*** la distanza di uno dei fuochi dal centro dell'ellisse, si ha:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} \simeq \sqrt{1 - \left(\frac{30.5\ UA^2}{49.3\ UA^2}\right)} \simeq \sqrt{1 - 0.619} \simeq 0.617$$

Detta ***D*** la distanza tra i due fuochi si ha infine:

$$D = 2\,c = 2 \cdot \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{49.3\ UA^2 - 30.5\ UA^2} \simeq 8.67\ UA$$

3. Un asteroide dista dal Sole 2.978 UA al perielio e 9.022 UA all'afelio.

1. Determinate il semiasse maggiore, in UA e in km, e l'eccentricità dell'orbita;
2. calcolate il periodo di rivoluzione dell'asteroide;
3. stimate di quanto cambierebbe il periodo di rivoluzione se l'eccentricità dell'orbita si dimezzasse.

Soluzione

1. Dette $\boldsymbol{D_a}$ e $\boldsymbol{D_p}$ le distanze all'afelio e al perielio, il semiasse maggiore ***a*** dell'orbita è dato da:

$$a = \frac{\mathrm{D_p} + \mathrm{D_a}}{2} = \frac{2.978\ \mathrm{UA} + 9.022\ \mathrm{UA}}{2} = 6.000\ \mathrm{UA} \simeq 897.6 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

Nota $\boldsymbol{D_a}$ l'eccentricità ***e***, ricordando che $D_a = \mathrm{a}\,(1 + \mathrm{e})$, vale:

$$e = \frac{D_a}{a} - 1 = \frac{9.022\ UA}{6.000\ UA} - 1 \simeq 0.5037$$

2. Il periodo di rivoluzione ***T*** in anni si ottiene dalla III legge di Keplero:

$$\mathrm{T} = \sqrt{a^3} \simeq \sqrt{6.000^3} \simeq 14.70\ anni$$

3. Poiché nella formula del calcolo del periodo l'eccentricità non compare, segue che il periodo di rivoluzione non dipende dall'eccentricità dell'orbita, ma solo dal semiasse maggiore.

4. Calcolate il modulo della velocità orbitale della Luna intorno alla Terra e il modulo della velocità orbitale della Terra intorno al Sole nell'approssimazione di orbite circolari con raggio pari al semiasse maggiore.

Soluzione

Detti $\boldsymbol{a_L}$ e $\boldsymbol{O_L}$ il semiasse maggiore e la lunghezza dell'orbita della Luna e $\boldsymbol{T_L}$ il periodo di rivoluzione della Luna attorno alla Terra, il modulo della velocità orbitale della Luna $\boldsymbol{v_L}$ vale:

$$\mathrm{v_L} = \frac{\mathrm{O_L}}{\mathrm{T_L}} = \frac{2\,\pi\, a_L}{\mathrm{T_L}} \simeq \frac{2\,\pi \cdot 384.4 \cdot 10^3\ km}{27.322\ g} \simeq \frac{2.415 \cdot 10^6\ km}{2.3606 \cdot 10^6\ s} \simeq 1.023\ \frac{km}{s}$$

Detti $\boldsymbol{a_T}$ e $\boldsymbol{O_T}$ il semiasse maggiore e la lunghezza dell'orbita della Terra e $\boldsymbol{T_T}$ il periodo di rivoluzione della Terra attorno al Sole, il modulo della velocità orbitale della Terra $\boldsymbol{v_T}$ vale:

$$\mathrm{v_T} = \frac{\mathrm{O_T}}{\mathrm{T_T}} = \frac{2\,\pi\, a_T}{\mathrm{T_T}} \simeq \frac{2\,\pi \cdot 149.6 \cdot 10^6\ km}{365.26\ g} \simeq \frac{940.0 \cdot 10^6\ km}{3.1558 \cdot 10^7\ s} \simeq 29.79\ \frac{km}{s}$$

5. Può una cometa in orbita attorno al Sole avere un periodo di rivoluzione di un anno e una distanza all'afelio maggiore del semiasse maggiore dell'orbita di Marte? Se sì, ricavate il valore minimo dell'eccentricità della sua orbita.

Soluzione

Se il periodo di rivoluzione $\mathbf{T}$ della cometa è pari a un anno, il semiasse maggiore $\mathbf{a_c}$ dell'orbita è pari a 1 UA:

$$a_c = \sqrt[3]{T^2} = 1\ UA$$

Il semiasse maggiore $\boldsymbol{a_M}$ dell'orbita di Marte vale:

$$a_M \simeq 1.523\ UA$$

Detta **e** l'eccentricità dell'orbita, la distanza di un corpo all'afelio $\mathbf{D_A}$ è data dalla relazione:

$$\mathrm{D_A} = a\,(1 + e)$$

Quindi affinché la cometa abbia una distanza all'afelio maggiore del semiasse maggiore dell'orbita di Marte deve essere:

$$a_c\,(1 + e) = 1\ \mathrm{UA}\,(1 + \mathrm{e}) > 1.523\ UA$$

da cui:

$$(1 + e) > 1.523 \qquad e > 1.523 - 1 \qquad e > 0.523$$

6. La cometa di Halley dista dal Sole $8.767 \cdot 10^{10}$ m al perielio e $5.248 \cdot 10^{12}$ m all'afelio. Il modulo della sua velocità orbitale al perielio è di 54.6 km/s. Calcolare la sua velocità all'afelio in km/s e in m/s. Sapendo che l'ultimo passaggio della cometa di Halley al perielio si è verificato il 9 febbraio 1986, calcolate l'anno del più prossimo ritorno al perielio.

Soluzione

Dette $\boldsymbol{D_A}, \boldsymbol{V_A}, \boldsymbol{D_P}$ e $\boldsymbol{V_P}$ le distanze e le velocità della cometa all'afelio e al perielio, dalla II legge di Keplero sappiamo che:

$$V_A \cdot D_A = V_P \cdot D_P$$

quindi:

$$V_a = \frac{D_p}{D_a} V_p = \frac{8.767 \cdot 10^{10}\ \text{m}}{5.248 \cdot 10^{12}\ \text{m}} \cdot 54.6\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \simeq 0.912\ \frac{\text{km}}{\text{s}} = 912\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Note le distanze all'afelio e al perielio ricaviamo il semiasse maggiore $\boldsymbol{a}$ dell'orbita:

$$a = \frac{D_a + D_p}{2} = \frac{8.767 \cdot 10^{10}\ \text{m} + 5.248 \cdot 10^{12}\ \text{m}}{2} \simeq 2.668 \cdot 10^{12}\ \text{m} \simeq 17.83\ \text{UA}$$

Poiché la cometa di Halley orbita intorno al Sole, il suo periodo di rivoluzione $\boldsymbol{T}$ in anni vale:

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{17.83^3} \simeq 75.29\ anni$$

L'anno $\boldsymbol{A}$ del ritorno al perielio (arrotondando all'intero più prossimo) sarà quindi:

$$A = 1986 + 75 = 2061$$

Nota.

Il periodo orbitale della Halley non è perfettamente costante a causa dell'influenza gravitazionale dei pianeti (in particolare Giove). La data attualmente prevista per il prossimo passaggio al perielio è il 29 luglio 2061.

7. L'orbita di un asteroide ha semiasse maggiore e minore rispettivamente pari a 7.143 UA e 2.635 UA. Si determini il periodo orbitale dell'asteroide, l'eccentricità dell'orbita e il valore del rapporto tra le velocità orbitali all'afelio e al perielio. Da quali parametri orbitali dipende il valore di detto rapporto ?

Soluzione

Detto **a** il semiasse maggiore dell'orbita, il periodo orbitale **T** dell'asteroide in anni vale:

$$T = \sqrt{a^3} \simeq \sqrt{364.5} \simeq 19.09\ anni$$

L'eccentricità **e** dell'orbita vale:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{6.943\ UA^2}{51.02\ UA^2}\right)} \simeq 0.9295$$

Dette $\boldsymbol{D_A}, \boldsymbol{V_A}, \boldsymbol{D_P}$ e $\boldsymbol{V_P}$ le distanze e le velocità dell'asteroide all'afelio e al perielio, dalla II legge di Keplero sappiamo che:

$$V_A \cdot D_A = V_P \cdot D_P$$

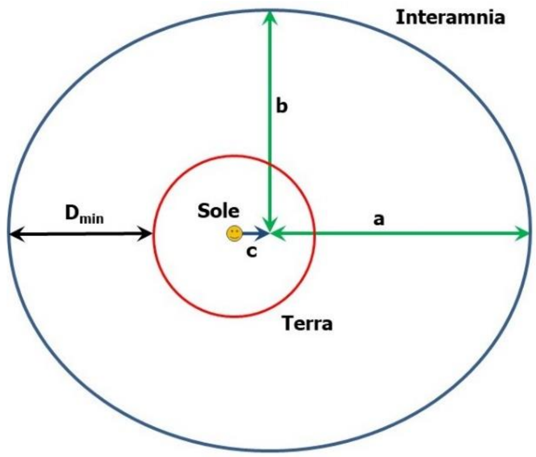
quindi:

$$\frac{V_A}{V_P} = \frac{D_P}{D_A} = \frac{a\,(1-e)}{a\,(1+e)} = \frac{1-e}{1+e} \simeq 0.03654 = 3.654 \cdot 10^{-2}$$

Quindi il rapporto delle velocità dipende unicamente dall'eccentricità dell'orbita.

8. L'Asteroide 704 "Interamnia", scoperto nel 1910, percorre in 5.35 anni un'orbita stabile intorno al Sole, molto prossima al piano dell'eclittica, con eccentricità pari a 0.151. Con l'ausilio di un disegno si dica se l'asteroide costituisce una minaccia per la Terra, ovvero se può collidere con essa. Stimate infine la sua distanza minima dal nostro pianeta.

Soluzione



Detto $\boldsymbol{T}$ il periodo di rivoluzione, il semiasse maggiore $\boldsymbol{a}$ dell'orbita di 704 Interamnia in UA vale:

$$a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{5.35^2} \simeq 3.06\, UA$$

Nota l'eccentricità **e**, il semiasse minore **b** dell'orbita si ricava dalla relazione:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \simeq 3.06\, UA \cdot \sqrt{1 - 0.0228} \simeq 3.02\, UA$$

La distanza **c** del Sole rispetto all'intersezione dei semiassi è data da:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \simeq \sqrt{3.06^2 - 3.02^2} \simeq 0.493\, UA$$

L'orbita dell'asteroide, sul piano dell'eclittica e stabile, si trova ben all'esterno di quella della Terra, come visibile nel disegno qui sopra. Quindi l'asteroide non costituisce una minaccia per il nostro pianeta

La minima distanza possibile $\boldsymbol{D_{min}}$ dalla Terra si ha nel caso in cui si verificano contemporaneamente le tre seguenti circostanze: asteroide in opposizione, asteroide al perielio, Terra all'afelio. In questa configurazione, detti $\boldsymbol{D_{Ap}}$ la distanza dal Sole dell'asteroide al perielio, $\mathbf{a_T}$ ed $\mathbf{e_T}$ semiasse maggiore ed eccentricità dell'orbita della Terra e $\boldsymbol{D_{Ta}}$ la distanza della Terra dal Sole all'afelio, la distanza di Interamnia dalla Terra in UA sarebbe:

$$D_{min} = D_{Ap} - D_{Ta} = a\,(1 - e) - a_T\,(1 + e_T)$$

$$D_{min} \simeq 3.06\, UA\,(1 - 0.151) - 1\, UA\,(1 + 0.0167) \simeq 1.58\, UA$$

9. Un satellite artificiale descrive un'orbita circolare a un'altezza di 400 km dalla superficie terrestre. Calcolate il suo periodo di rivoluzione.

Soluzione

Detta $\mathbf{M_T}$ la massa della Terra e **a** il semiasse maggiore dell'orbita, ricaviamo il periodo **T** di un corpo di massa trascurabile in orbita attorno alla Terra dalla III legge di Keplero:

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M_T}}$$

Detto $\boldsymbol{R_T}$ il raggio della Terra e **h** l'altezza dalla superficie del satellite il semiasse maggiore dell'orbita vale:

$$\mathrm{a} = \mathrm{R_T} + \mathrm{h} = 6378\ \mathrm{km} + 400\ \mathrm{km} = 6778\ \mathrm{km}$$

si avrà quindi:

$$T \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot (6778 \cdot 10^3\, m)^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\, \dfrac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg}} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{3.084 \cdot 10^7\ s^2} \simeq 5.554 \cdot 10^3\, s \simeq 92.57\, m \simeq 1\, h\ 33\, m$$

10. Un satellite artificiale orbita attorno alla Terra su un'orbita ellittica con semiassi maggiore e minore rispettivamente pari a $1.522 \cdot 10^4\ km$ e $1.321 \cdot 10^4\ km$. Calcolate la distanza minima del satellite al perigeo e all'apogeo rispetto alla superficie della Terra e il suo periodo di rivoluzione.

Soluzione
Detti **a** e **b** la lunghezza dei due semiassi, l'eccentricità **e** dell'orbita del satellite è data dalla relazione:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} \simeq \sqrt{1 - \left(\frac{1.745 \cdot 10^8\ km^2}{2.316 \cdot 10^8\ km^2}\right)} \simeq 0.4965$$

Le distanze del satellite dal centro della Terra al perigeo $\mathbf{D_P}$ e all'apogeo $\mathbf{D_A}$ valgono quindi:

$$D_P = a\,(1 - e) \simeq 7663\ \text{km} \qquad D_A = a\,(1 + e) \simeq 2.278\ \cdot 10^4\ \text{km}$$

La distanza minima di un satellite dalla superficie terrestre si ha quando un osservatore lo vede transitare allo zenith. Quindi per ottenere la distanza minima nei due casi ($\boldsymbol{H_P}$ e $\boldsymbol{H_A}$) basta sottrarre il raggio della Terra alle distanze all'afelio e al perielio:

$$H_P = D_p - R_T \simeq 1285\ \text{km} \qquad H_A = D_A - R_T \simeq 1.640\ \cdot 10^4\ \text{km}$$

Applicando la III legge di Keplero generalizzata e considerando che la massa del satellite è ovviamente trascurabile rispetto a quella della Terra, il periodo di rivoluzione **T** è dato da:

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M_T}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.526 \cdot 10^{21}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{3.493 \cdot 10^8\ s^2} \simeq 1.869 \cdot 10^4\ s \simeq 311.5\ minuti \simeq 5\ h\ \ 12\ minuti$$

11. Calcolate, supponendo che la vostra massa sia di 50.0 kg, il vostro peso sulla superficie della Luna. Supponete di raddoppiare il raggio della Luna a parità di massa, quanto diventerebbe il vostro peso?

Soluzione
Detti $\mathbf{M_L}$ e $\mathbf{R_L}$ la massa e il raggio della Luna, l'accelerazione di gravità $\mathbf{g_L}$ sulla superficie lunare vale:

$$g_L = \frac{G\,M_L}{{R_L}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 7.342 \cdot 10^{22}\ kg}{(1738 \cdot 10^3\ m)^2} \simeq 1.622\ \frac{m}{s^2}$$

Quindi il peso **P** sulla Luna di una persona con una massa **m** pari a 50.0 kg è:

$$P = m \cdot g_L \simeq 50.0\ kg \cdot 1.623\ \frac{m}{s^2} \simeq 81.2\ N$$

Se la Luna avesse stessa massa ma raggio doppio, l'accelerazione di gravità $\mathbf{g_{L\text{-}2R}}$ sulla superficie varrebbe:

$$g_{L-2R} = \frac{G\,M_L}{(2\,R_L)^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 7.342 \cdot 10^{22}\ kg}{(3476 \cdot 10^3\ m)^2} \simeq 0.4055\ \frac{m}{s^2}$$

L'accelerazione di gravità sarebbe quindi un quarto di quella attuale e il peso $\mathbf{P_{2R}}$ di una persona con una massa **m** pari a 50.0 kg sarebbe:

$$P_{2R} = m \cdot g_{L-2R} \simeq 50.0\ \text{kg} \cdot 0.4058\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \simeq 20.3\ \text{N}$$

12. Un asteroide di forma sferica ha un raggio di 200 km e la sua densità media è pari a quella di Mercurio. Calcolate il valore dell'accelerazione di gravità alla superficie dell'asteroide in m/s^2.

Soluzione

La massa **M** di un corpo, nota la sua densità media $\boldsymbol{\rho}$ e il volume **V** vale:

$$M = \rho V$$

In particolare, per un asteroide sferico di raggio $\mathbf{R_a}$, la sua massa $\mathbf{M_a}$ vale:

$$M_a = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R_a{}^3$$

Il problema si può quindi risolvere calcolando la densità $\boldsymbol{\rho}$ di Mercurio e inserendo il valore ottenuto nella formula per il calcolo della massa dell'asteroide.

In alternativa, detti $\mathbf{R_M}$ e $\mathbf{M_M}$ il raggio e la massa di Mercurio e $\boldsymbol{\rho_a}$ e $\boldsymbol{\rho_M}$ le densità dell'asteroide e di Mercurio, consideriamo il rapporto tra la massa dell'asteroide e quella di Mercurio:

$$\frac{M_a}{M_M} = \frac{\rho_a \frac{4}{3} \pi R_a{}^3}{\rho_M \frac{4}{3} \pi R_M{}^3}$$

Poiché le densità dei due corpi sono uguali avremo infine:

$$M_a = M_M \left(\frac{R_a}{R_M}\right)^3$$

$$M_a \simeq 3.301 \cdot 10^{23} kg \left(\frac{200\ km}{2440\ km}\right)^3 \simeq 3.301 \cdot 10^{23} kg \cdot 5.51 \cdot 10^{-4} \simeq 1.82 \cdot 10^{20} kg$$

Nota la massa possiamo calcolare l'accelerazione di gravità $\mathbf{g_a}$ sulla superficie dell'asteroide:

$$g_a = \frac{G \cdot M_a}{R_a{}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 1.82 \cdot 10^{20}\ kg}{(200 \cdot 10^3\ m)^2} \simeq 0.304\ \frac{m}{s^2}$$

13. La forza di gravità che si esercita tra due corpi di forma sferica vale $10^4\ N$. Il primo corpo ha un raggio di 30.20 km e una densità di $1.420\ g/cm^3$, il secondo corpo ha un raggio di 15.10 km e una densità di $3.440\ g/cm^3$. A che distanza si trovano i centri dei due corpi?

Soluzione

Esprimiamo le densità dei due corpi in kg/m^3 utilizzando il fattore di conversione:

$$\frac{g}{cm^3} = \frac{10^{-3}}{10^{-6}} \frac{kg}{m^3} = 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

Le densità $\boldsymbol{\rho_1}$ e $\boldsymbol{\rho_2}$ dei due corpi valgono quindi:

$$\rho_1 = 1.420 \frac{g}{cm^3} = 1.420 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \qquad \rho_2 = 3.440 \frac{g}{cm^3} = 3.440 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

Essendo i due corpi sferici con raggi $\mathbf{R_1} = 3.020 \cdot 10^4\ m$ e $\mathbf{R_2} = 1.510 \cdot 10^4\ m$, per le masse $\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$ otteniamo:

$$M_1 = \rho \frac{4}{3} \pi R_1{}^3 \simeq 1.420 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2.754 \cdot 10^{13}\ m^3 \simeq 1.638 \cdot 10^{17}\ kg$$

$$M_2 = \rho \frac{4}{3} \pi R_2{}^3 \simeq 3.440 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3.443 \cdot 10^{12}\ m^3 \simeq 4.961 \cdot 10^{16}\ kg$$

Detta **F** la forza tra i due corpi, ricaviamo infine la distanza **d** tra i loro centri dalla legge di Gravitazione Universale:

$$d = \sqrt{\frac{G\, M_1\, M_2}{F}}$$

$$d \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 1.638 \cdot 10^{17}\ \mathrm{kg} \cdot 4.961 \cdot 10^{16}\ \mathrm{kg}}{10^4\ \frac{kg\, m}{s^2}}} \simeq 7.364 \cdot 10^9\, m = 7.364 \cdot 10^6\, km$$

14. Calcolare il periodo sinodico di Nettuno osservato dalla Terra, in anni e in giorni.

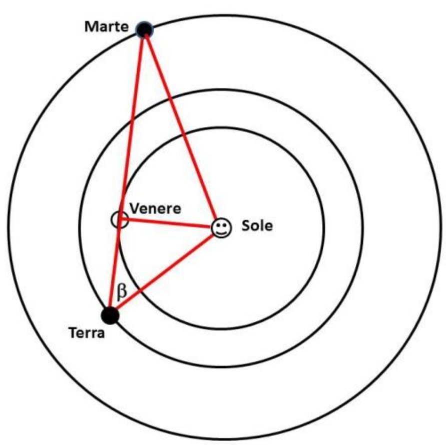
Soluzione

Il periodo sinodico $\boldsymbol{S}$ è il tempo che impiega un corpo, osservato in questo caso dalla Terra, per tornare nella stessa posizione rispetto al Sole (per esempio l'intervallo tra due opposizioni consecutive). Detto $\boldsymbol{E}$ il periodo siderale della Terra e $\boldsymbol{P}$ il periodo siderale di Nettuno vale la relazione:

$$S = \frac{E \cdot P}{|\,E - P\,|} \simeq \frac{1\, anno \cdot 164.79\, anni}{|1\, anno - 164.79\, anni|} \simeq \frac{164.79\, anni^2}{163.79\, anni} \simeq 1.0061\, anni \simeq 367.49\, giorni$$

15. Osservate una configurazione planetaria molto particolare, con Venere visibile al tramonto alla massima elongazione est e angolarmente vicinissimo (in congiunzione) con Marte. Calcolate la distanza Terra-Marte in quel momento, assumendo tutte le orbite circolari e trascurando le loro inclinazioni sull'eclittica. Suggerimento: realizzate un disegno (in scala) dell'orbita dei tre pianeti attorno al Sole. Posizionate i pianeti assumendo che Venere e Marte siano angolarmente così vicini da poter essere collocati sulla stessa retta.

Soluzione



Quando Venere è a una massima elongazione, la retta Terra-Venere è tangente all'orbita di Venere. Con le approssimazioni usate possiamo assumere che Sole, Terra, Venere e Marte si trovino ai vertici di due triangoli rettangoli, con il lato Venere-Sole in comune. Per una massima elongazione est otteniamo il disegno a sinistra. Detti **VT** la distanza Terra-Venere, **MV** la distanza Marte-Venere, **VS** la distanza Venere-Sole, **MS** la distanza Marte-Sole, **TS** la distanza Terra-Sole e **MT** la distanza Marte-Terra possiamo risolvere il problema con il teorema di Pitagora.

$$\mathrm{VT} = \sqrt{\mathrm{TS}^2 - \mathrm{VS}^2} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{2.238 \cdot 10^{16}\ \mathrm{km}^2 - 1.171 \cdot 10^{16}\ \mathrm{km}^2} \simeq 103.3 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

$$\mathrm{MV} = \sqrt{\mathrm{MS}^2 - \mathrm{VS}^2} \simeq \sqrt{5.194 \cdot 10^{16}\ \mathrm{km}^2 - 1.171 \cdot 10^{16}\ \mathrm{km}^2} \simeq 200.6 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

$$\mathrm{MT} = \mathrm{VT} + \mathrm{MV} \simeq 103.3 \cdot 10^6\ \mathrm{km} + 200.6 \cdot 10^6\ \mathrm{km} \simeq 303.9 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

16. Considerate un ipotetico osservatore posto al centro della Terra e calcolate le dimensioni angolari (diametro apparente) che misurerebbe per il Sole quando la Terra si trova all'afelio e al perielio. Confrontate questi valori con quelli che misurerebbe per le dimensioni angolari della Luna al perigeo e all'apogeo.

Soluzione

Detti $\mathbf{a_T}$ il semiasse maggiore ed $\mathbf{e_T}$ l'eccentricità dell'orbita della Terra, le distanze dell'osservatore dal Sole all'afelio $\mathbf{d_{A\odot}}$ e al perielio $\mathbf{d_{P\odot}}$ valgono:

$$d_{A\odot} = a_T\,(1 + e_T) \simeq 152.1 \cdot 10^6\, km \qquad\qquad d_{P\odot} = a_T\,(1 - e_T) \simeq 147.1 \cdot 10^6\, km$$

Quindi, detto $\mathbf{R_\odot}$ il raggio del Sole, per un osservatore al centro della Terra le dimensioni angolari minime $\mathbf{D_{A\odot}}$ (Terra all'afelio) e massime $\mathbf{D_{P\odot}}$ (Terra al perielio) del Sole valgono:

$$\mathrm{D}_{A\odot} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R}_\odot}{\mathrm{d}_{A\odot}}\right) \simeq 31'.44 \qquad\qquad \mathrm{D}_{P\odot} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R}_\odot}{\mathrm{d}_{P\odot}}\right) \simeq 32'.51$$

Detti $\mathbf{a_L}$ il semiasse maggiore ed $\mathbf{e_L}$ l'eccentricità dell'orbita della Luna, le distanze dell'osservatore dalla Luna all'apogeo $\mathbf{d_{AL}}$ e al perigeo $\mathbf{d_{PL}}$ valgono:

$$d_{AL} = a_L\,(1 + e_L) \simeq 405.5 \cdot 10^3\ km \qquad\qquad d_{PL} = a_L\,(1 - e_L) \simeq 363.3 \cdot 10^3\ km$$

Quindi, detto $\boldsymbol{R}_{\mathbf{L}}$ il raggio della Luna, per un osservatore al centro della Terra le dimensioni angolari minime $\mathbf{D}_{\boldsymbol{AL}}$ (Luna all'apogeo) e massime $\mathbf{D}_{\boldsymbol{PL}}$ (Luna al perigeo) della Luna valgono:

$$\mathrm{D}_{\mathrm{AL}} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_L}}{\mathrm{d}_{AL}}\right) \simeq 29'.47 \qquad\qquad \mathrm{D}_{\mathrm{PL}} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_L}}{\mathrm{d}_{PL}}\right) \simeq 32'.89$$

Notiamo che quando la Luna si trova all'apogeo la sua dimensione angolare è minore di quella del Sole anche quanto la Terra è all'afelio, mentre quando la Luna si trova al perigeo la sua dimensione angolare è maggiore di quella del Sole anche quando la Terra è al perielio.