



# Leggi di Keplero e Gravitazione

**Giuseppe Cutispoto**

INAF – Osservatorio Astrofisico di Catania

giuseppe.cutispoto@inaf.it

Versione: 22 gennaio 2023

Questa dispensa, distribuita gratuitamente, non vuole rappresentare un testo organico, ma più semplicemente presentare alcune informazioni utili alla risoluzione dei problemi di Campionati Italiani di Astronomia.

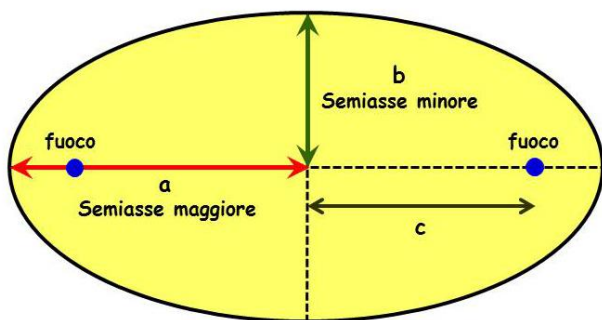
Nella dispensa non si fa distinzione né tra categorie dei partecipanti né tra le tre fasi della competizione. Un'indicazione su quali parti ogni studente deve considerare per la propria preparazione può essere ricavata incrociando i contenuti della dispensa con il syllabus (<http://www.campionatiastromia.it/syllabus/>).

La dispensa contiene immagini e informazioni prelevate da siti web pubblici. L'autore ritiene che nessuna immagine sia protetta da copyright, in caso contrario saranno prontamente rimosse e/o le fonti correttamente citate.

## Indice

Caratteristiche delle ellissi	2
Le Leggi di Keplero	3
III Legge di Keplero generalizzata	4
Orbite planetarie	5
Periodo Siderale e Periodo Sinodico	6
Leggi della meccanica classica	6
Legge di Gravitazione Universale	7
Moti di particolare importanza	7
Accelerazione e forza centrifuga	8
Moto con accelerazione variabile	8
Principio di conservazione dell'energia meccanica	9
Velocità cosmiche e velocità lungo l'orbita	9
Limite di Roche	10
Sfera di Hill	11
Punti di Lagrange	11
Appendice 1 - Triangoli: relazioni tra lati e angoli	12
Appendice 2 - Parallasse annua, parsec, anno luce	13
Appendice 3 - Dimensioni angolari di una sorgente estesa	13

## Caratteristiche delle ellissi



L'ellisse è una sezione conica e può essere definita come il luogo dei punti di un piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, rimane costante

$a$  = semiasse maggiore;

$b$  = semiasse minore;

$c$  = distanza di un fuoco dall'intersezione degli assi.

I vertici di un'ellisse sono i quattro punti di intersezione dell'ellisse con i suoi assi.

Equazione di un'ellisse con centro nell'origine degli assi cartesiani:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Coordinate dei fuochi:  $(-c,0)$ ,  $(c,0)$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

L'eccentricità  $e$  di un'ellisse è un indice del suo "schiacciamento", ovvero di quanto differisce da una circonferenza:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \frac{c}{a} \quad 0 \leq e < 1$$

$$b = a \sqrt{1 - e^2} \quad a = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Se  $e = 0$  l'ellisse si riduce a una circonferenza.

Se  $e = 1$  l'ellisse si riduce a un segmento di lunghezza pari a  $2a$ , i cui estremi coincidono con i fuochi

L'area  $A$  di un'ellisse è data dalla relazione:

$$A = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

Il calcolo esatto della lunghezza  $L$  di una ellisse è molto complesso. Una semplice relazione, approssimata per eccesso, è:

$$L \approx \pi \sqrt{2(a^2 + b^2)} = a \pi \sqrt{4 - 2e^2}$$

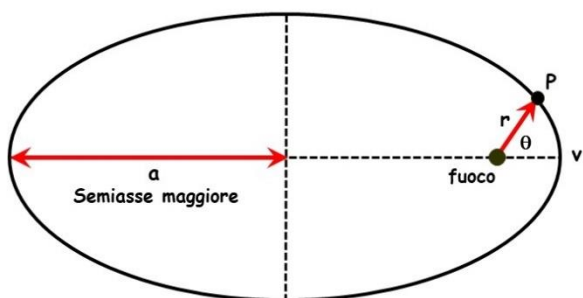
che può essere utilizzata per piccoli valori dell'eccentricità; infatti la formula fornisce il valore  $L \approx 4.44 a$  nel caso in cui  $e = 1$ , mentre il valore esatto è  $L = 4a$ .

Una relazione più complessa ma più accurata, in particolare per alti valori dell'eccentricità, è:

$$L \approx \pi \left[ 3(a + b) - \sqrt{(3a + b)(a + 3b)} \right]$$

che fornisce il valore  $L \approx 3.98 a$  nel caso in cui  $e = 1$

Con riferimento alla seguente figura la distanza  $r$  di un punto  $P$  dell'ellisse dal fuoco indicato è data dalla relazione:



$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

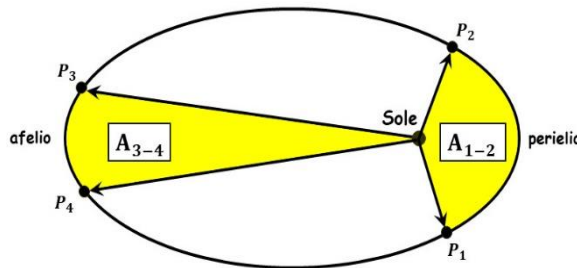
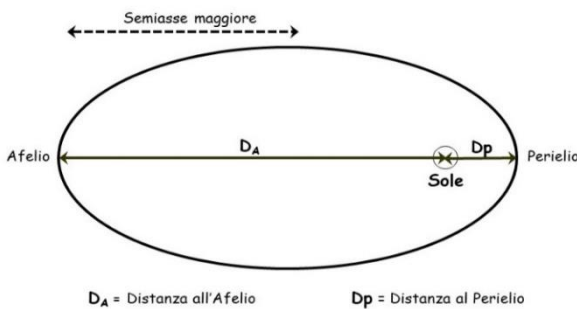
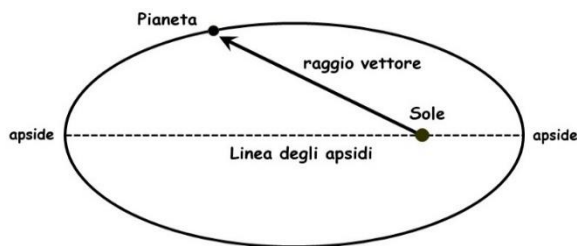
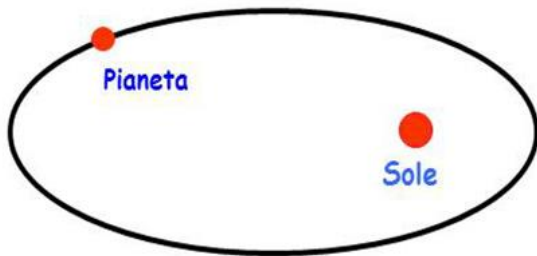
Dove l'angolo  $\theta$  si conta in direzione antioraria dal vertice  $v$  dell'ellisse più vicino al fuoco considerato.

Nel caso di orbite planetarie se il fuoco indicato è occupato dal Sole, l'angolo  $\theta$  prende il nome di "anomalia vera".

**Nota:** la distanza di  $P$  dall'altro fuoco, contando l'angolo  $\theta$  dallo stesso vertice, è data dalla relazione:  $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}$

## Le leggi di Keplero

Sono tre leggi che descrivono il moto dei pianeti del Sistema Solare. Keplero le derivò in modo empirico dalle osservazioni di Tycho Brahe. Successivamente, Isaac Newton dimostrò che sono una diretta conseguenza della legge di gravitazione universale. Seppur originariamente formulate per i corpi in orbita attorno al Sole, le leggi di Keplero valgono anche per i satelliti, naturali o artificiali, che orbitano attorno ai pianeti e, più in generale, per il moto di tutti i corpi su cui agisce la sola forza di gravità.



### ➤ I legge (legge delle orbite)

“Le orbite descritte dai pianeti sono delle ellissi, con il Sole in uno dei due fuochi”.

Il moto dei pianeti attorno al Sole si svolge quindi su un piano, detto piano orbitale. Per la Terra tale piano è chiamato **eclittica**. Le orbite dei pianeti hanno tutte eccentricità bassa (per la Terra è pari a 0.0167). Nel sistema solare le eccentricità maggiori si osservano per asteroidi e comete.

Per un'orbita ellittica definiamo:

**Raggio Vettore:** è il vettore che unisce il Sole a un pianeta. Ha modulo e direzione variabili; il suo verso è sempre dal Sole al pianeta.

**Linea degli apside:** è il segmento passante per i due fuochi e per due dei vertici dell'ellisse; coincide con l'asse maggiore dell'orbita e i due vertici sono detti apside.

Per corpi in orbita attorno al Sole si definiscono inoltre:

**Afelio:** apside dell'orbita alla massima distanza dal Sole;

**Perielio:** apside dell'orbita alla minima distanza dal Sole.

Per corpi in orbita attorno alla Terra i termini corrispondenti sono Apogeo e Perigeo.

In generale, per un corpo celeste in orbita attorno a un altro i termini corrispondenti sono Apoastro (o Apastro) e Periaastro.

### ➤ II Legge (legge delle aree)

“Il raggio vettore che unisce un pianeta al Sole spazza aree uguali in tempi uguali”.

Con riferimento alla figura a sinistra, se il tempo  $T_{1-2}$  impiegato dal pianeta a spostarsi da  $P_1$  a  $P_2$  è uguale al tempo  $T_{3-4}$  impiegato per spostarsi da  $P_3$  a  $P_4$  allora:

$$A_{1-2} = A_{3-4}$$

Quindi la velocità di un pianeta lungo l'orbita è maggiore al perielio e minore all'afelio, mentre è costante la velocità areolare. In generale, dette  $A_1$  e  $A_2$  due qualsiasi aree spazzate nei tempi  $T_1$  e  $T_2$ , vale la relazione:

$$A_1 : T_1 = A_2 : T_2$$

**Nota:** le prime due leggi sono deducibili dalle leggi di conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto.

### ➤ III Legge (legge dei periodi)

“Il quadrato del periodo di rivoluzione  $T$  di un pianeta attorno al Sole è proporzionale al cubo del semiasse maggiore  $a$  della sua orbita”:

$$\frac{a^3}{T^2} = K$$

Ne segue che maggiore è la distanza dal Sole di un pianeta maggiore è il suo periodo di rivoluzione.

Detti  $M_{\odot}$  e  $M_P$  le masse del Sole e di un pianeta e  $G$  la Costante di Gravitazione Universale, si dimostra che:

$$K = \frac{G \cdot (M_{\odot} + M_P)}{4 \pi^2}$$

ma poiché la massa del Sole è molto maggiore quella di qualsiasi corpo del Sistema Solare, per tutti i corpi in orbita attorno al Sole vale l'approssimazione:

$$\frac{a^3}{T^2} = K \approx \frac{G \cdot M_{\odot}}{4 \pi^2} (\approx 3.36 \cdot 10^{18} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2})$$

Il valore della costante  $K$  dipende dalla massa del corpo centrale, ed è la stessa per tutti i corpi di massa trascurabile in orbita attorno ad esso.

Dati due corpi, che indichiamo con 1 e 2, in orbita intorno al Sole vale la relazione:

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}$$

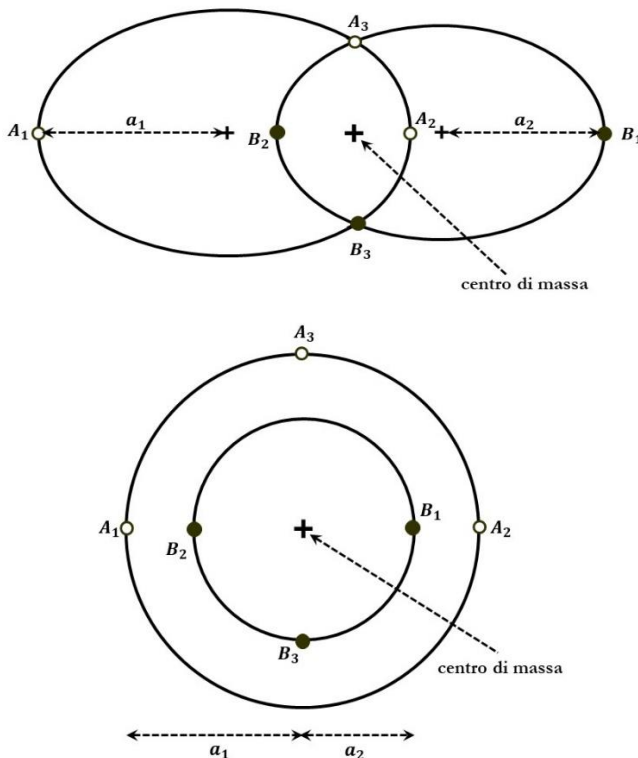
Poiché i periodi orbitali possono essere ricavati indipendentemente dalla conoscenza della distanza dal Sole (misurando il cosiddetto periodo sinodico), la III Legge fornisce un modello in scala del Sistema Solare; nota la distanza di un pianeta dal Sole si possono ricavare tutte le altre distanze.

Assumiamo che uno dei due corpi del paragrafo precedente sia la Terra, esprimendo il semiasse maggiore dell'orbita in Unità Astronomiche (UA) e il periodo di rivoluzione in anni siderali, per l'altro corpo si ottiene la semplice relazione:

$$a \text{ (UA)}^3 = T \text{ (anni)}^2$$

**Attenzione:** questa relazione è valida UNICAMENTE per corpi in orbita attorno al Sole e fornisce il loro semiasse maggiore e periodo orbitale in unità di quelli della Terra.

### III Legge di Keplero generalizzata



Nel caso di due corpi con massa  $m_1$  e  $m_2$  non molto diverse tra di loro il moto avviene intorno al centro di massa e la III Legge di Keplero va utilizzata nella cosiddetta forma generalizzata:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G (m_1 + m_2)}{4 \pi^2}$$

Dove  $a$  è la somma dei semiassi maggiori  $a_1$  e  $a_2$  delle due orbite.

Il centro di massa del sistema si trova nel fuoco comune alle due ellissi.

Vale la relazione:

$$a_1 \cdot m_1 = a_2 \cdot m_2$$

Nel caso di orbite circolari la distanza tra i due corpi resta costante durante il moto.

Durante il moto sulle orbite i due corpi si trovano in ogni istante nei punti opposti del segmento che li congiunge passante per il centro di massa.

Con riferimento alle due figure a sinistra negli istanti  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  i due corpi si trovano, rispettivamente, nelle posizioni  $A_1$  e  $B_1$ ,  $A_2$  e  $B_2$ ,  $A_3$  e  $B_3$ .

**Nota:** in tutte le precedenti considerazioni si è assunto che:

- i corpi coinvolti possono essere considerati come punti materiali;
- si possono trascurare le interazioni dei due corpi in esame con altri corpi dello stesso sistema (ad esempio le interazioni tra i pianeti del sistema solare o quelle tra i satelliti di un pianeta);
- si possano trascurare gli effetti della teoria della relatività generale.

## Orbite planetarie

Dalla relazione:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

possiamo ricavare le distanze  $D_A$  all'afelio (dove  $\theta = 180^\circ$ ) e  $D_P$  al perielio (dove  $\theta = 0^\circ$ )

$$D_A = a(1 + e) \quad D_P = a(1 - e)$$

da cui seguono le relazioni:

$$a = \frac{D_A + D_P}{2} \quad c = \frac{D_A - D_P}{2} \quad e = \frac{D_A - D_P}{D_A + D_P}$$

Indicando con  $V_A$  la velocità di un corpo all'afelio e con  $V_P$  la sua velocità al perielio, dalla II legge di Keplero ricaviamo la relazione:

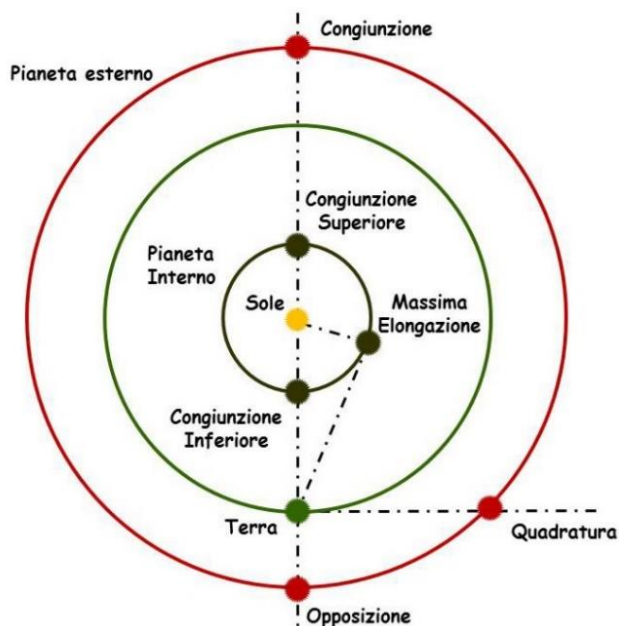
$$V_A \cdot D_A = V_P \cdot D_P$$

**Nota:** indicando con  $V$  e con  $D$  il vettore velocità e il raggio vettore in una posizione generica sull'orbita e con  $\alpha$  l'angolo tra le loro direzioni, dalla legge di conservazione del momento della quantità di moto sappiamo che:

$$V \times D = V \cdot D \cdot \sin \alpha = \text{costante}$$

Per due generiche posizioni sull'orbita vale quindi la relazione:  $V_1 \cdot D_1 \cdot \sin \alpha_1 = V_2 \cdot D_2 \cdot \sin \alpha_2$ , in quanto solo al perielio e all'afelio il vettore velocità e il raggio vettore sono perpendicolari.

### Configurazioni



#### Pianeti esterni

- **Opposizione:** il pianeta è in direzione opposta al Sole
- **Congiunzione:** il pianeta è nella stessa direzione del Sole
- **Quadratura:** l'angolo Sole-Terra-Pianeta è di  $90^\circ$
- **Grande Opposizione:** il pianeta è in opposizione e nello stesso istante la Terra si trova all'afelio e il pianeta al perielio

#### Pianeti interni

- **Congiunzione inferiore:** il pianeta è nella stessa direzione del Sole nel punto più vicino alla Terra
- **Congiunzione superiore:** il pianeta è nella stessa direzione del Sole nel punto più lontano dalla Terra
- **Massima elongazione:** è la configurazione in cui la distanza angolare Sole-Pianeta visti dalla Terra è massima. Si ha quando la congiungente Terra-Pianeta è tangente all'orbita del pianeta. L'angolo osservato risulta sempre minore di  $90^\circ$ .

La massima elongazione può essere est (il pianeta è visibile dopo il tramonto e apparirà esattamente in fase di "primo quarto") o ovest (il pianeta è visibile prima dell'alba e apparirà esattamente in fase di "ultimo quarto").

**Nota:** Quando la Luna si trova in quadratura la sua fase sarà prossima, ma NON esattamente uguale, a quella di "primo quarto" (sarà in effetti leggermente oltre) o "di "ultimo quarto" (sarà in effetti leggermente prima).

## Periodo Siderale e Periodo Sinodico

Il **Periodo Siderale** è il tempo che un corpo impiega per completare un'orbita, ovvero il tempo necessario per ritornare nello stesso punto rispetto alle stelle fisse. La Terra completa un'orbita intorno al Sole in 365.25636 giorni (anno siderale); la Luna completa un'orbita intorno alla Terra in 27.32166 giorni (mese siderale). Normalmente per "Periodo di Rivoluzione" si intende il periodo siderale.

Il **Periodo Sinodico** è il tempo che impiega un corpo del Sistema Solare, osservato dalla Terra, per tornare nella stessa posizione rispetto al Sole. Per esempio è il tempo tra due opposizioni consecutive di un pianeta. Il periodo sinodico differisce da quello siderale perché anche la Terra ruota intorno al Sole. Per un dato corpo, da ogni pianeta del Sistema Solare si misureranno periodi sinodici diversi. Per un satellite, per esempio la Luna osservata dalla Terra, il periodo sinodico è la durata di un ciclo completo di fasi.

Per un osservatore posto sulla Terra e per un corpo che ruota intorno al Sole nella stessa direzione della Terra, il Periodo Sinodico **S** del corpo è legato al suo Periodo Siderale **P** e al Periodo Siderale della Terra **E** dalle relazioni:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P} \quad \text{se } P > E$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{E} \quad \text{se } P < E$$

Se è noto **P**, detto  $|E - P|$  il valore assoluto di  $E - P$ , otteniamo in entrambi i casi:

$$S = \frac{E \cdot P}{|E - P|}$$

Se è noto **S** si hanno due casi:

$$P = \frac{E \cdot S}{S - E} \quad \text{se } P > E$$

$$P = \frac{E \cdot S}{S + E} \quad \text{se } P < E$$

Se  $E = P$  il periodo sinodico non è definito e il corpo appare in posizione fissa nel cielo.

Per un corpo che ruota attorno al Sole in direzione opposta a quella della Terra valgono le relazioni:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} + \frac{1}{P} \quad S = \frac{E \cdot P}{E + P} \quad P = \frac{E \cdot S}{E - S}$$

Il concetto di periodo sinodico si può estendere al moto di due qualsiasi corpi intorno a un centro comune. (Paragrafo realizzato con la collaborazione di Daniele Spiga dell'INAF-Osservatorio Astronomico di Brera).

## Leggi della meccanica classica

Descrivono in modo molto accurato i moti che avvengono a velocità piccole rispetto a quelle della luce per corpi con dimensioni e distanze reciproche molto maggiori di quelle atomiche. Sono applicabili, con ottima approssimazione, alla maggior parte dei moti dei corpi nell'Universo e si basano sui tre principi fondamentali della dinamica (detti anche leggi di Newton):

### ➤ Primo principio (o di inerzia):

Un corpo non soggetto a forze (o per cui la sommatoria delle forze applicate è nulla) o sta fermo o si muove di moto rettilineo uniforme. Quindi detta **F** la forza applicata e **a** l'accelerazione del corpo:

$$F = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

### ➤ Secondo principio (o di proporzionalità):

Se a un corpo è applicata una forza **F** esso subirà un'accelerazione **a** nella stessa direzione e verso della forza e a essa proporzionale:

$$F = m \cdot a$$

la costante di proporzionalità **m** è la massa inerziale del corpo.

### ➤ Terzo principio (o di azione e reazione):

A ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria. Ovvero, se un corpo **A** esercita una forza **F<sub>AB</sub>** su un corpo **B** allora il corpo **B** esercita una forza **F<sub>BA</sub>** sul corpo **A** tale che:

$$F_{AB} = -F_{BA}$$

Le due forze hanno pari modulo, stessa direzione, ma verso opposto.

Le leggi così formulate sono valide nei cosiddetti **sistemi di riferimento inerziali**, ovvero in tutti quei sistemi di riferimento che si muovono l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme. In modo del tutto equivalente possiamo definire un sistema inerziale come un sistema in cui sono valide le leggi di Newton.

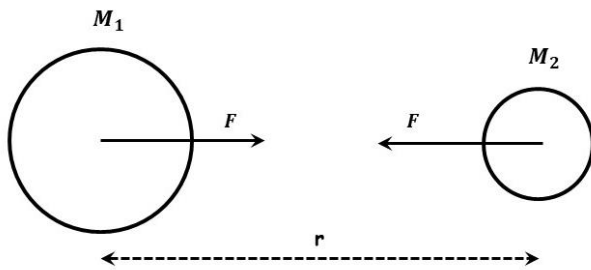
## Legge di Gravitazione Universale

Formulata da Isaac Newton descrive l'interazione tra corpi dotati di massa e stabilisce che tra due qualsiasi punti materiali di massa  $M_1$  e  $M_2$  posti a distanza  $r$  si esercita una forza  $F$  lungo la retta che li congiunge pari a:

$$F = G \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2}$$

dove  $G$  è la costante di Gravitazione Universale.

La forza gravitazionale è sempre attrattiva, si esercita a distanza e non richiede la presenza di un mezzo che metta a contatto i corpi. Inoltre non dipende dalla natura dei corpi ma unicamente dalla loro massa ed è istantanea.



Nel caso di corpi non puntiformi ma sferici e omogenei, o con distribuzione della massa simmetrica rispetto al centro, si dimostra che ai fini del calcolo della forza sono equivalenti a punti materiali con tutta la massa situata nel centro.

**Nota:** in questo caso la distanza  $r$  da considerare nel calcolo della forza è quella tra i due centri e non tra le due superfici.

La legge di gravitazione di Newton perde via via validità quando si considera il moto in prossimità di masse molto grandi e va sostituita con la teoria della relatività generale di Einstein.

## Accelerazione di gravità

è l'accelerazione  $a_g$  a cui è soggetto un corpo di massa  $m$  a causa della forza di gravitazione esercitata su di esso da un corpo di massa  $M$ . Dalla relazione che lega la forza di gravitazione alla seconda legge di Newton:

$$F = G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot a$$

ricaviamo:

$$a_g = G \frac{M}{r^2}$$

## Massa inerziale e massa gravitazionale

La massa inerziale è definita dal secondo principio della dinamica e rappresenta la tendenza di un corpo a mantenere il proprio stato di moto o di quiete. La massa gravitazionale è presente nella legge di gravitazione universale e rappresenta la capacità di un corpo di attrarre altri. Pur essendo grandezze concettualmente diverse si è dimostrato sperimentalmente che differiscono per meno di un fattore  $10^{-12}$ . Nella meccanica classica non esiste una spiegazione per l'uguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale, che invece rientra nel "principio di equivalenza" di Einstein.

## Moti di particolare importanza

**Moto rettilineo uniforme:** è il moto di un corpo con velocità costante lungo una retta. Indicando con  $v$  la velocità, con  $\Delta s$  la distanza percorsa e con  $\Delta t$  il tempo impiegato a percorrerla vale la relazione:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

**Moto rettilineo uniformemente accelerato:** è il moto di un corpo con accelerazione costante lungo una retta. Indicando con  $a$  l'accelerazione e con  $v_0$  la velocità iniziale del corpo valgono le relazioni:

$$v = v_0 + a \Delta t \quad \Delta s = \frac{1}{2} a \Delta t^2 \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2 a \Delta s}$$

**Moto circolare uniforme:** è il moto di un corpo con velocità costante lungo una circonferenza. Il vettore velocità è sempre tangente alla circonferenza e il suo modulo (velocità tangenziale) è costante. Indicando con  $r$  il raggio

della circonferenza e con  $\mathbf{T}$  il tempo (periodo) di una rotazione completa, per le quantità velocità angolare  $\omega$ , velocità tangenziale  $\mathbf{v}_T$ , accelerazione centripeta  $\mathbf{a}_c$  e frequenza  $\mathbf{f}$  valgono le relazioni:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{\text{radianti}}{s} = \frac{1}{s} \right] = \frac{360^\circ}{T} \left[ \frac{\text{gradi}}{s} \right]$$

$$v_T = \frac{2\pi r}{T} = \omega r \quad a_c = \frac{v_T^2}{r} = \omega^2 r \quad T = \frac{1}{f} \left[ \frac{1}{s} = \text{Hertz} \right]$$

Affinché un corpo si muova di moto circolare uniforme occorre che in ogni istante venga esercitata su di esso una forza  $\mathbf{F}_{ce}$ , detta centripeta, lungo la direzione che lo unisce al centro della circonferenza e con verso in direzione del centro. Un caso particolarmente interessante è quando la forza centripeta è la forza gravitazionale esercitata da un corpo di massa  $\mathbf{M}$  su un corpo di piccola massa  $\mathbf{m}$ . In tal caso avremo:

$$F_{CE} = G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v_T^2}{r} \quad \Rightarrow \quad G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2 \cdot r}$$

da cui si ricava la III legge di Keplero:

$$\frac{r^3}{T^2} = G \frac{M}{4\pi^2}$$

### Accelerazione e forza centrifuga

La forza centrifuga è una forza apparente, che viene percepita dagli osservatori solidali a un sistema di riferimento non inerziale in moto circolare. Per lo stesso moto gli osservatori inerziali rilevano solo l'azione della forza centripeta, che è quella effettivamente applicata a un corpo in moto circolare.

La forza centrifuga  $\mathbf{F}_{cn}$  ha modulo uguale a quello della forza centripeta  $\mathbf{F}_{ce}$ , stessa direzione, ma verso opposto. Per un corpo di massa  $\mathbf{m}$  in moto circolare uniforme vale la relazione:

$$F_{cn} = -F_{ce} = -m \frac{v_T^2}{r}$$

**Nota:** all'interno di una navicella in orbita intorno alla Terra, come ad esempio la Stazione Spaziale Internazionale, l'accelerazione di gravità percepita è quasi nulla (condizione di "microgravità") non perché l'accelerazione di gravità della Terra sia nulla a quell'altezza, ma perché la forza centrifuga bilancia l'attrazione gravitazionale.

### Moto con accelerazione variabile

La relazione  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} \Delta t$  si può applicare solo nei casi in cui l'accelerazione non varia in modo significativo lungo il percorso del corpo in moto, per esempio per la caduta libera di un piccolo corpo da un'altezza molto minore del raggio di un pianeta.

Consideriamo invece il caso in cui un corpo di piccola massa  $\mathbf{m}$  cade su un corpo di massa  $\mathbf{M}$  (con  $\mathbf{m} \ll \mathbf{M}$ ) da una distanza  $\mathbf{d}$  tale da non poter considerare costante l'accelerazione di gravità. Se le dimensioni del corpo di massa  $\mathbf{M}$  sono piccole rispetto a  $\mathbf{d}$ , una soluzione approssimata per il tempo di caduta  $\mathbf{t}$  può essere ricavata dalla III legge di Keplero, considerando la traiettoria come un'ellisse estremamente schiacciata ( $e \approx 1$ ) con il corpo di massa  $\mathbf{M}$  in uno dei fuochi. In questo caso il semiasse maggiore dell'orbita  $\mathbf{a}$  e il periodo di rivoluzione  $\mathbf{T}$  valgono:

$$a = \frac{d}{2} \quad T = 2t$$

possiamo quindi ricavare il tempo di caduta se è nota la distanza di partenza, o la distanza di partenza se è noto il tempo di caduta:

$$t = \sqrt{\frac{\pi^2 d^3}{8GM}} \quad d = \sqrt[3]{\frac{8GMt^2}{\pi^2}}$$



## Principio di conservazione dell'energia meccanica

L'energia meccanica totale  $E$  di un corpo è la somma della sua energia cinetica  $K$  e della sua energia potenziale  $U$ . In presenza di sole forze conservative l'energia meccanica totale di un corpo si conserva. Per un corpo di massa  $m$  che si muove alla velocità  $v$  l'energia cinetica è data dalla relazione:

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Il valore dell'energia potenziale dipende dalla forza conservativa. Nel caso del campo gravitazionale di una grande massa  $M$ , per una massa  $m$  (con  $m \ll M$ ) posta a una distanza  $r$  si ha:

$$U = - \frac{G M m}{r}$$

e quindi in questo caso:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r}$$

Per due qualsiasi configurazioni "a" e "b" vale la relazione:

$$\frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{G M m}{r_a} = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{G M m}{r_b}$$

**Energia meccanica e orbite:** per un corpo di piccola massa che si muove nel campo gravitazionale di una grande massa (approssimazione valida per tutti i corpi in orbita attorno al Sole) si può dimostrare che: se  $E < 0$  l'orbita è ellittica (o circolare); se  $E = 0$  l'orbita è parabolica, se  $E > 0$  l'orbita è iperbolica.

## Velocità cosmiche e velocità lungo l'orbita

Considereremo due corpi di massa  $m$  e  $M$  (con  $m \ll M$ ). Si definisce **prima velocità cosmica** la velocità  $v_1$  che il corpo di massa  $m$  deve possedere per entrare in orbita circolare a una distanza  $r$  dal centro del corpo di massa  $M$ . Dalle relazioni del moto circolare uniforme si ricava che:

$$v_1 = \sqrt{\frac{G M}{r}}$$

Si definisce **seconda velocità cosmica** o **velocità di fuga** la velocità minima iniziale  $v_f$  che il corpo di massa  $m$  deve possedere per allontanarsi a distanza infinita con velocità residua nulla dal corpo di massa  $M$  e raggio  $R$ . Dal principio di conservazione dell'energia meccanica si ottiene:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{G M m}{R} = 0$$

e quindi:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 G M}{R}}$$

fissata quindi una qualsiasi distanza  $r \geq R$  vale la relazione:

$$v_f = \sqrt{2} v_1$$

**Nota:** la velocità di fuga così calcolata vale se il corpo non è dotato di ulteriore propulsione (per esempio un proiettile). Le navicelle spaziali dotate di un sistema di propulsione possono allontanarsi dalla Terra, o dal Sole, senza raggiungere mai la velocità di fuga.

**Orbite intorno alla Terra:** si può facilmente calcolare che la velocità di fuga dalla Terra  $v_{fT}$  vale circa 11.2 km/s. Se un corpo è dotato di una velocità  $v$ , detta  $v_{1r}$  la velocità di fuga alla distanza  $r$  dal centro della Terra, possono verificarsi le seguenti condizioni:

$v < v_{1r}$  : il corpo cadrà sulla Terra con moto parabolico;

$v = v_{1r}$  : il corpo entrerà in orbita circolare alla distanza  $r$  dal centro della Terra;

$v_{1r} < v < v_{fT}$ : il corpo entrerà in orbita ellittica con eccentricità tanto maggiore quanto più  $v$  è prossima a  $v_{fT}$ .

**Velocità lungo un'orbita ellittica:** per un'orbita ellittica attorno al Sole con semiasse maggiore  $a$ , la velocità  $v_r$  a una distanza  $r$  dal Sole è data dalla relazione:

$$v_r = \sqrt{G M_{\odot} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

per un'orbita circolare la velocità  $v_m$  è costante e, come si può facilmente ricavare dalle relazioni sul moto circolare uniforme, vale:

$$v_m = \sqrt{\frac{G M_{\odot}}{a}}$$

Per un'orbita con eccentricità  $e$  le velocità all'afelio  $v_a$  e al perielio  $v_p$  valgono:

$$v_a = v_m \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad v_p = v_m \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

**Nota:** per un'orbita ellittica  $v_m$  è ricavabile con la stessa relazione usata per le orbite circolari, ma rappresenta in questo caso la media di tutte le velocità del corpo lungo l'orbita.

Si possono infine ricavare le seguenti relazioni:

$$\frac{v_a}{v_p} = \frac{1-e}{1+e} \quad e = \frac{1 - \frac{v_a}{v_p}}{1 + \frac{v_a}{v_p}} \quad v_a \cdot v_p = \frac{G M_{\odot}}{a} \quad T = \frac{2 \pi a}{\sqrt{v_a \cdot v_p}}$$

**Velocità lungo un'orbita parabolica:** in ogni punto di un'orbita parabolica l'energia meccanica pari a zero:

$$\frac{1}{2} m v_r^2 - \frac{G M_{\odot} m}{r} = 0$$

Quindi la velocità  $v_{par-r}$  su ogni punto dell'orbita a distanza  $r$  dal Sole è:

$$v_{par} = \sqrt{\frac{2 G M_{\odot}}{r}}$$

ne ricaviamo che un corpo in orbita parabolica ha in ogni istante, ovvero a ogni distanza, una velocità pari alla velocità di fuga, che risulta maggiore di un fattore  $\sqrt{2}$  rispetto alla velocità che avrebbe a quella distanza su un'orbita circolare.

## Limite di Roche

Consideriamo due corpi, che si mantengono compatti unicamente grazie alla propria forza di gravità, di massa  $m$  e  $M$  (con  $m \ll M$ ) e con raggi e densità pari a  $r_m, R_M, \rho_m, \rho_M$ . Il **Limite di Roche** (o Raggio di Roche dal nome dell'astronomo che lo calcolò per primo nel 1848) è la distanza minima  $d$  dal centro del corpo di massa  $M$  all'interno della quale il corpo di massa  $m$  viene disgregato a causa delle forze mareali (la differenza di forza di gravità sulla parte più vicina rispetto a quella più lontana) esercitate su di esso dal corpo di massa  $M$ . Per corpi rigidi con alte densità valgono le relazioni:

$$d \approx R_M \sqrt[3]{\frac{3 \rho_M}{\rho_m}} \approx r_m \sqrt[3]{\frac{3 M}{m}} \approx \sqrt[3]{\frac{9 M}{4 \pi \rho_m}}$$

Nel caso di corpi fluidi o con bassa densità che si avvicinano a corpi più compatti (ad esempio comete e la maggior parte degli asteroidi che si avvicinano al Sole o a un pianeta), il limite è maggiore e si possono applicare le relazioni:

$$d \approx 2.44 R_M \sqrt[3]{\frac{\rho_M}{\rho_m}} \approx 2.44 r_m \sqrt[3]{\frac{M}{m}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{M}{\rho_m}}$$

Del materiale in orbita intorno a un pianeta all'interno del limite di Roche non può concentrarsi in un satellite e formerà degli anelli. D'altra parte si può facilmente verificare che gran parte dei satelliti artificiali della Terra orbitano a distanze inferiori al limite di Roche, ciò è reso possibile dal fatto che questi manufatti sono tenuti insieme da altre forze oltre a quella della propria gravità.

## Sfera di Hill

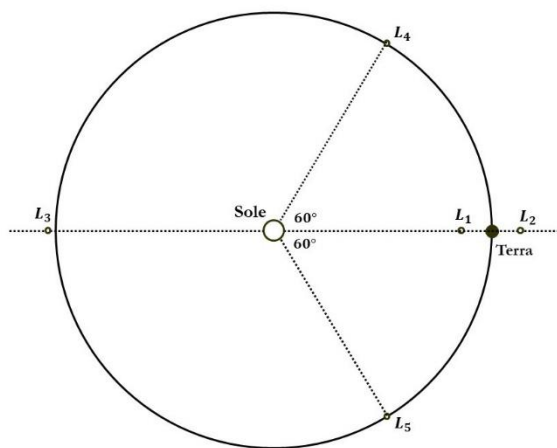
Consideriamo un corpo di massa  $m$  in orbita ellittica con semiasse maggiore  $a$  ed eccentricità  $e$  attorno a un corpo di massa  $M$  con  $m \ll M$ . Il raggio della **Sfera di Hill** (dal nome dell'astronomo americano che lo derivò) del corpo di massa  $m$  è la massima distanza  $r_H$  entro la quale il corpo può trattenere un satellite (ovvero un terzo corpo di massa  $k \ll m$ ) vincendo la gravità del corpo di massa  $M$ . Vale la relazione:

$$r_H \approx a (1 - e) \sqrt[3]{\frac{m}{3M}}$$

Nel caso del Sistema Solare ogni pianeta ha una propria sfera di Hill, all'interno della quale deve interamente ricadere l'orbita di un corpo affinché questo risulti un satellite stabile del pianeta. Se una parte dell'orbita cade al di fuori della sfera di Hill del pianeta, il corpo subirà successive perturbazioni, che lo porteranno infine a orbitare attorno al Sole. Ovviamente ogni satellite stabile ha a sua volta una propria sfera di Hill.

## Punti di Lagrange

Consideriamo un corpo di massa  $m$  in orbita attorno a un corpo di massa  $M$  con  $m \ll M$ . Consideriamo inoltre un terzo corpo con massa trascurabile rispetto ai primi due. Come dimostrato dal matematico J.L. Lagrange nel 1772, esistono cinque punti sul piano dell'orbita di  $m$ , detti punti di Lagrange, dove collocando il terzo corpo questo mantiene inalterata nel tempo la sua posizione rispetto ai corpi di massa  $m$  e  $M$ . Ciò avviene perché nei punti in questione la risultante delle accelerazioni gravitazionali impresses dai due corpi maggiori è esattamente uguale all'accelerazione centripeta che serve per mantenere il piccolo corpo in orbita attorno al corpo di massa  $M$  con distanza, e quindi periodo orbitale, pari a quello di massa  $m$ .



Per il sistema Sole-Terra la posizione dei punti lagrangiani è mostrata nella figura a sinistra. La figura è del tutto generica ed è quindi valida per qualsiasi coppia di corpi di massa  $m$  ed  $M$ .

Indicando con  $M_\odot$  la massa del Sole, con  $M_T$  la massa della Terra e con  $a$  il semiasse maggiore dell'orbita terrestre, si dimostra che la distanza  $r$  dal centro della Terra dei punti  $L_1$  e  $L_2$  è la stessa e vale:

$$r \approx a \sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_\odot}} (\approx 0.01 \text{ UA})$$

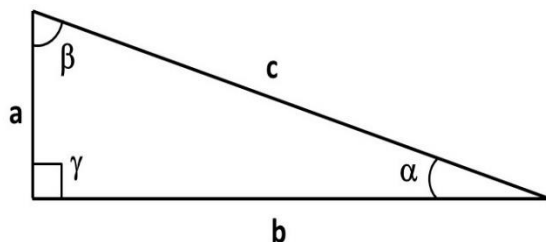
ovvero è pari al raggio della sfera di Hill della Terra.

In astronomia i punti  $L_1$  e  $L_2$  sono molto usati per collocare telescopi spaziali in orbite stabili, che possono così effettuare osservazioni ininterrotte di vari oggetti celesti. Il punto  $L_1$  è ideale per l'osservazione del Sole (vi è stato collocato ad esempio il satellite SOHO). Il punto  $L_2$  è invece ideale per l'osservazione di oggetti molto lontani dal Sole (tra gli altri sono in tale posizione il satellite GAIA e il JWST).

**Nota:** in realtà  $L_1$  e  $L_2$  sono punti di "equilibrio instabile", quindi una qualsiasi piccola perturbazione farebbe allontanare sempre di più un telescopio dal punto considerato. Esistono però, sia attorno a  $L_1$  che a  $L_2$ , delle orbite tridimensionali quasi-periodiche, chiamate orbite di Lissajous, che garantiscono la permanenza per tempi molto lunghi di telescopi spaziali in loro prossimità.

## Appendice 1 - Triangoli: relazioni tra lati e angoli

### Triangolo rettangolo



#### Teorema di Pitagora

$$c^2 = a^2 + b^2$$

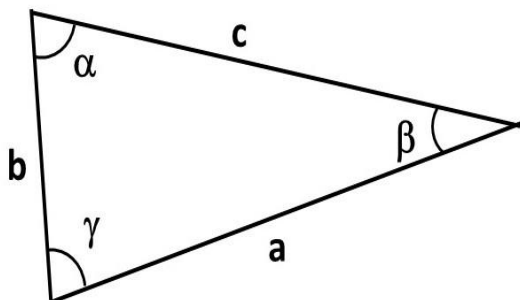
#### Relazioni con funzioni trigonometriche

$$a = c \cdot \sin \alpha$$

$$a = c \cdot \cos \beta$$

$$a = b \cdot \tan \alpha$$

### Triangolo generico



**Teorema dei seni.** Il rapporto tra la misura di un lato e il seno dell'angolo opposto è costante:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

**Teorema del coseno (o di Carnot).** Il quadrato di un lato è dato dalla somma dei quadrati degli altri due lati, meno il doppio prodotto degli altri due lati per il coseno dell'angolo tra essi compresi (ovvero l'angolo opposto al lato che si sta calcolando):

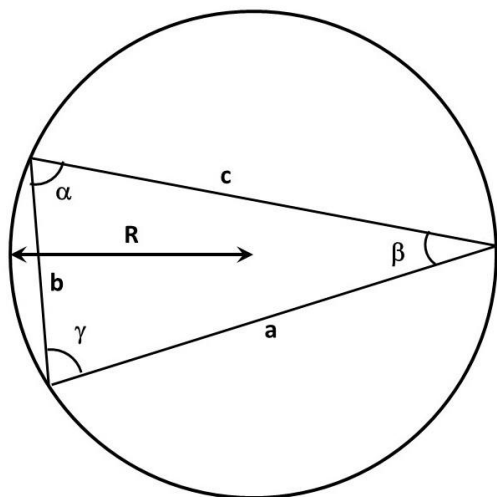
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

**Nota:** Il teorema del coseno è una generalizzazione del teorema di Pitagora applicabile a un triangolo qualsiasi. Infatti nella precedente relazione se  $\gamma = 90^\circ$  otteniamo:  $c^2 = a^2 + b^2$

**Teorema delle proiezioni.** In un triangolo un lato è dato dalla somma degli altri due lati per il coseno dell'angolo che essi formano con il primo:

$$c = b \cos \alpha + a \cos \beta$$

### Raggio della circonferenza circoscritta e teorema della corda



È sempre possibile inscrivere un triangolo in una circonferenza, con ogni lato del triangolo che risulterà una corda della circonferenza stessa.

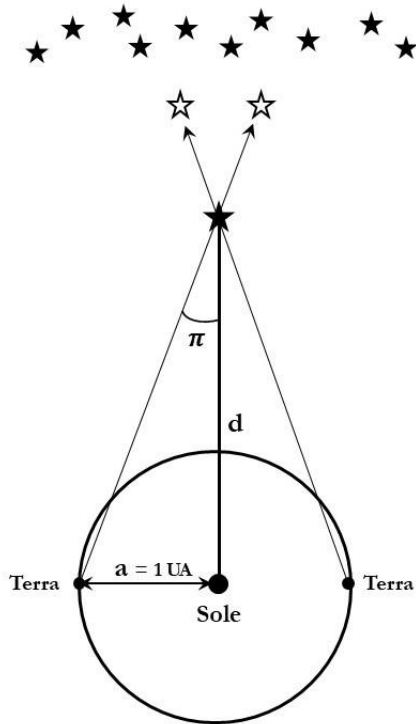
Detto **R** il raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo vale la relazione:

$$R = \frac{c}{2 \sin \gamma} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

che è la diretta conseguenza del **Teorema della corda** (dal quale si arriva facilmente al teorema dei seni), che afferma che in una circonferenza la misura di una corda è data dal diametro per il seno di un qualsiasi angolo che insiste sulla corda, in particolare quindi:

$$\begin{aligned} a &= 2R \sin \alpha & b &= 2R \sin \beta \\ c &= 2R \sin \gamma \end{aligned}$$

## Appendice 2 - Parallasse annua, parsec, anno luce



Si definisce **Parallasse Annuale** ( $\pi$ ) di una stella la metà del suo spostamento angolare apparente, rispetto a stelle molto più lontane, causato dal moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole. Poiché l'UA, ovvero il semiasse maggiore  $a$  dell'orbita della Terra, è molto piccola rispetto alla distanza delle stelle, l'angolo  $\pi$  è molto piccolo e risulta sempre minore di  $1''$ .

Si definisce **Parsec (pc)** la distanza  $d$  dalla quale 1 UA sottende un angolo  $\pi = 1''$ .

Poiché  $a = d \cdot \tan \pi$ , si ricava che:

$$1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ UA}}{\tan 1''} \approx 206265 \text{ UA} \approx 3.0857 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

La distanza di una stella in pc è pari all'inverso della sua parallasse espressa in secondi d'arco.

Un **Anno Luce (al)** è la distanza che la luce percorre nel vuoto in un anno giuliano (= 365.25 giorni). Poiché in un anno giuliano ci sono  $365.25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$  secondi, si ha:

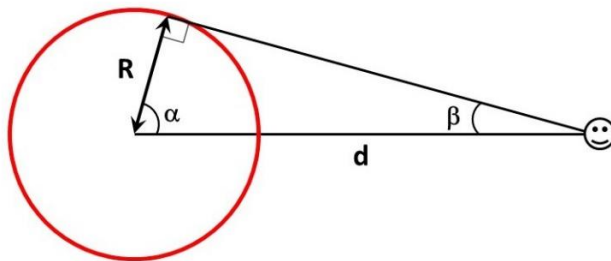
$$1 \text{ al} = 3.1558 \cdot 10^7 \text{ s} \cdot 299792 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 9.4607 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

$$1 \text{ al} \approx 62240 \text{ UA} \approx 0.3066 \text{ pc}$$

$$1 \text{ pc} \approx 3.2616 \approx \text{al}$$

**Nota storica:** solo nel 1838 F.W. Bessel fu in grado di misurare la prima parallasse stellare, quella di 61 Cyg ( $\pi = 0''.293$ , pari alle dimensioni angolari di una moneta da 1€ a una distanza di 16 km). Da Terra hanno consentito misure di parallasse fino a circa 100 pc. Il satellite Hipparcos ha esteso le misure fino a circa 1000 pc. Il satellite GAIA sta effettuando misure estremamente accurate per quasi due miliardi di stelle fino a circa 10000 pc.

## Appendice 3 - Dimensioni angolari di una sorgente estesa



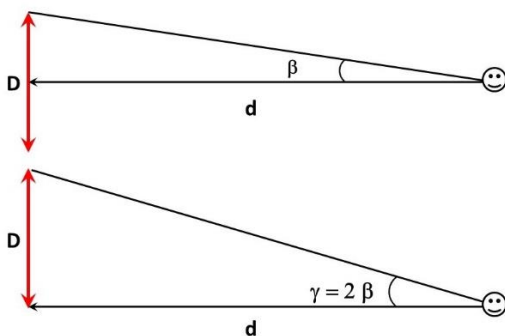
Consideriamo una sorgente estesa di forma sferica con diametro  $D = 2R$ , osservata da una distanza  $d$ . Detta  $\beta$  la dimensione angolare del raggio della sorgente estesa, vedere disegno a sinistra, valgono le relazioni:

$$R = d \cdot \sin \beta$$

$$D = 2 \cdot d \cdot \sin \beta$$

Vediamo che non è mai possibile osservare un intero emisfero di una sorgente estesa sferica, che da una data distanza  $d$  risulterà visibile per un intervallo di latitudine  $\theta$  pari a:

$$\theta = 2 \alpha = 2 \cdot \arcsin \frac{R}{d} < 180^\circ$$



Per quasi tutte le sorgenti astronomiche risulta  $d \gg D$ , con l'angolo  $\beta$  molto piccolo. Si può quindi usare la relazione:

$$D = 2 \cdot d \cdot \tan \beta = d \cdot \tan \gamma$$

Nella pratica già per  $d \approx 100 D$  la relazione che usa il seno dell'angolo e quella che usa la tangente forniscono lo stesso risultato fino alla quarta cifra significativa.

L'angolo  $\gamma$  è solo la dimensione angolare di una sorgente astronomica perpendicolarmente alla linea di vista e non fornisce informazioni sulla vera forma della sorgente.