Nozioni elementari di Trigonometria

A cura di:
Angela Misiano (Società Astronomica Italiana)
Mauro Dolci (INAF – Osservatorio Astronomico d'Abruzzo

1) <u>Triangoli simili</u>

Due figure geometriche sono dette ***simili*** se è possibile far corrispondere punti dell'una a punti dell'altra, in modo che gli angoli corrispondenti siano uguali e i segmenti corrispondenti siano proporzionali.
Consideriamo i due triangoli simili in figura 1. Indichiamo con a, b, c i lati del primo triangolo; con a', b', c' i lati del secondo triangolo; con α, β, γ gli angoli interni del primo triangolo e con α', β', γ' gli angoli interni del secondo triangolo, si ha:

$$a : a' = b : b' = c : c' \qquad (1)$$

$$\alpha = \alpha' \qquad \beta = \beta' \qquad \gamma = \gamma' \qquad (2)$$

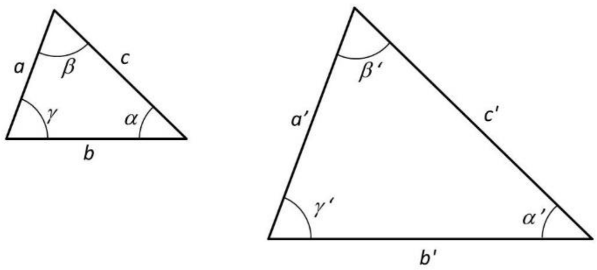


Figura 1 - Triangoli simili

Queste due condizioni generali danno luogo ai noti criteri di similitudine:

Primo criterio: *se due triangoli hanno ordinatamente uguali gli angoli* (cioè, se esiste una corrispondenza tra gli angoli tale che angoli corrispondenti siano uguali) *allora sono simili.*
Secondo criterio: *se due triangoli hanno un angolo uguale e i lati che lo comprendono proporzionali allora sono simili.*
Terzo criterio: *se due triangoli hanno i lati ordinatamente proporzionali allora sono simili*.

I tre criteri sono conseguenza del **teorema di Talete**.

Per i nostri scopi è però qui importante un'altra relazione, che si ricava dalle proporzioni (1). Scriviamole separatamente come tre proporzioni:

$$\begin{cases} a : a' = b : b' \\ a : a' = c : c' \\ b : b' = c : c' \end{cases} \qquad (3)$$

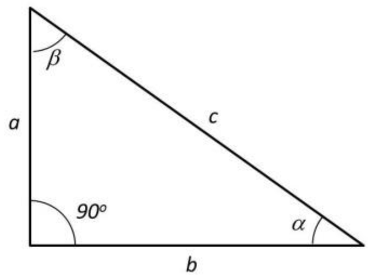
Per la proprietà commutativa, che permette di conservare la proporzionalità scambiando ad esempio i termini interni, ricaviamo:

$$\begin{cases} a : b = a' : b' \\ a : c = a' : c' \\ b : c = b' : c' \end{cases} \qquad (4)$$

Vediamo che otteniamo un'altra fondamentale proprietà dei triangoli simili, e cioè il fatto che **in due triangoli simili il rapporto tra coppie di lati corrispondenti è lo stesso**.

2) La similitudine nei triangoli rettangoli

Per determinare completamente un triangolo rettangolo, come quello nella figura 2 qui a destra, è sufficiente conoscere la lunghezza di due qualsiasi dei lati e l'ampiezza di uno dei due angoli acuti. Il terzo lato si ricava infatti dal Teorema di Pitagora, se ad esempio conosciamo i due cateti *a*, *b* si ricava:



$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (5)$$

mentre il secondo angolo acuto è semplicemente il complementare del primo:

$$\beta = 90° - \alpha \qquad (6)$$

Queste considerazioni hanno due conseguenze fondamentali.

La prima è che **tutti i triangoli rettangoli che hanno lo stesso angolo acuto α sono simili**. Essi possono essere pensati come triangoli rettangoli costruiti tra due semirette che delimitano un angolo pari ad α (figura 3).

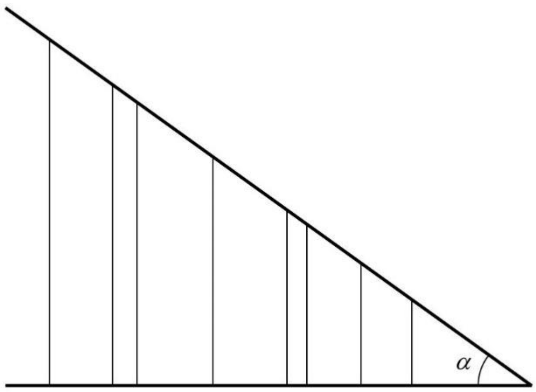


Figura 3 - Gli infiniti triangoli rettangoli che si possono costruire a partire da due semirette, semplicemente tracciando la perpendicolare ad una delle due semirette, sono simili. La similitudine è dovuta al fatto che hanno tutti lo stesso angolo α in comune.

La seconda conseguenza, ricordando le proporzioni espresse dalla relazione (4), è che **in un triangolo rettangolo il rapporto tra le lunghezze di due lati qualsiasi dipende esclusivamente dall'angolo acuto considerato** (che abbiamo chiamato α).

3) La trigonometria

Da quanto abbiamo visto, triangoli aventi angoli uguali hanno la stessa forma (e solo nel caso particolare della congruenza essi hanno anche la stessa misura): in generale, qualsiasi insieme di triangoli simili ha la proprietà invariante della proporzionalità, cioè i rapporti di coppie di lati corrispondenti hanno lo stesso valore. Ogni triangolo è l'ingrandimento o la riduzione di un altro, ossia può essere trasformato in un altro per applicazione dello stesso fattore di scala a ogni parte del triangolo stesso (si ha un ingrandimento se il fattore di scala è maggiore di 1, altrimenti si ha una riduzione).
I princìpi della trigonometria vengono usati al fine di minimizzare il numero di misurazioni necessarie a determinare un triangolo, e si basano su questi concetti di ingrandimento e di similitudine. La base per la misura dei triangoli è naturalmente il triangolo rettangolo.

La trigonometria (che significa letteralmente "misura di trigoni", cioè di triangoli) si serve della circostanza che i rapporti di coppie di lati di un triangolo sono funzioni <u>esclusivamente</u> degli angoli.
Questi rapporti tra coppie di lati definiscono le funzioni trigonometriche nel modo seguente:

1) **Il rapporto tra il cateto opposto all'angolo α e l'ipotenusa** (ovvero a : c) **è chiamato seno dell'angolo α e si indica con sen(α) o sin(α)**:
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

2) **Il rapporto tra il cateto adiacente all'angolo α e l'ipotenusa** (ovvero b : c) **è chiamato coseno dell'angolo α e si indica con cos(α)**:
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

3) **Il rapporto tra il cateto opposto all'angolo α ed il cateto adiacente all'angolo α** (ovvero a : b) **è chiamato tangente dell'angolo α e si indica con tan(α) o tg(α)**:
$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

In un triangolo rettangolo, data l'ipotenusa c ed un angolo acuto α, si possono ricavare i cateti a (opposto ad α) e b (adiacente ad α) dalle seguenti semplici relazioni:

$$a = c \sin(\alpha) \qquad (7)$$

$$b = c \cos(\alpha) \qquad (8)$$

Oppure, dato lo stesso angolo α ed il cateto adiacente b, si può ricavare il cateto opposto a dalla semplice relazione

$$a = b \tan(\alpha) \qquad (9)$$

4) <u>Tre proprietà elementari delle funzioni seno, coseno e tangente</u>

i) Il seno e il coseno di un angolo non possono mai essere maggiori di 1. Dal Teorema di Pitagora discende infatti che l'ipotenusa ha una lunghezza sempre maggiore della lunghezza di ciascuno dei cateti:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} > a, b$$

Ne segue che:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} < 1$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} < 1$$

Verificate con la vostra calcolatrice, calcolando seno e coseno di valori di α scelti a caso !

ii) La somma dei quadrati di seno e coseno (dello stesso angolo) è sempre uguale a 1. Infatti se nella formula del Teorema di Pitagora sostituiamo ad *a* e *b* i valori calcolati con le espressioni (7) e (8), ricaviamo:

$$c^2 = a^2 + b^2 = [c\sin(\alpha)]^2 + [c\cos(\alpha)]^2 = c^2[sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha)]$$

da cui si ricava:

$$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

Verificate con la vostra calcolatrice, calcolando dapprima il seno e il coseno di un angolo ogni volta scelto a caso, e poi la somma dei loro quadrati.

iii) La tangente è uguale al rapporto tra seno e coseno. Dalle definizioni di seno, coseno e tangente, dividendo ambo i membri dell'espressione della tangente per l'ipotenusa c, si ricava:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a/_c}{b/_c} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Verificate con la vostra calcolatrice, calcolando dapprima il seno e il coseno di un angolo ogni volta scelto a caso, quindi il loro rapporto ed infine confrontate il risultato con la tangente dello stesso angolo.

5) <u>Alcuni casi particolari</u>

Il seno vale zero, e il coseno vale 1, quando l'angolo è zero:
sin(0°) = 0 cos(0°) = 1

Il seno vale 1, e il coseno vale zero, quando l'angolo è di 90°:
sin(90°) = 1 cos(90°) = 0

Seno e coseno sono uguali quando l'angolo è di 45°:
sin(45°) = cos(45°) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Verificate tutto questo sulla vostra calcolatrice !

<u>State sempre attenti a impostare la calcolatrice in modo che l'angolo sia correttamente espresso in gradi o nell'unità che voi volete.</u>
Ad esempio, per calcolare il sin (90°) è necessario che sulla calcolatrice siano impostati i gradi ([deg]). Se gli angoli fossero impostati i radianti, il risultato sarebbe completamente errato sin(90 [rad]) = 0.8939966… Infatti il valore dell'angolo retto, in radianti, è π/2. Provate con la calcolatrice a verificare che sin(π/2 [rad]) = 1
Attenzione inoltre a non confondere l'impostazione "gradi" (che è [deg]) con quella dei "gradienti" (o gradi centesimali) che è [gra], per la quale un angolo retto non vale 90, ma 100.
In definitiva: sin (90 [deg]) = sin(π/2 [rad]) = sin (100 [gra]) = 1
Le impostazioni [deg], [rad] e [gra] sono normalmente visibili nella parte alta del display delle calcolatrici e si può passare dall'una all'atra premendo un apposito tasto (verificate il manuale della vostra calcolatrice).