OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2022

Finale Nazionale Perugia – 27 aprile

Prova teorica - Senior

1. La specie aliena

Una specie aliena, che possiede un solo occhio capace di osservare alla lunghezza d'onda di 5000 Å e con una pupilla di diametro pari a 3.0 mm, osserva una nebulosa distante 658 pc dal proprio pianeta. Il diametro angolare della nebulosa è di 1' 58". Assumete che la nebulosa si sia espansa con una velocità costante di 13 km/s e calcolate quanto tempo fa essa appariva puntiforme alla specie aliena. L'atmosfera del pianeta della specie aliena ha caratteristiche simili a quelle dell'atmosfera terrestre.

Soluzione:
detti **L** il diametro angolare della nebulosa e **d** la sua distanza, calcoliamo il suo diametro lineare **D**:

$$D = d \cdot \tan(L) \simeq 658 \text{ pc } \cdot \tan\ (3.28\ \cdot\ 10^{-2} \text{ gradi}) \simeq 0.376 \text{ pc} \simeq 1.16 \cdot 10^{13} \text{ km}\,.$$

Detti $\mathbf{D_p}$ il diametro della pupilla e $\boldsymbol{\lambda}$ la lunghezza d'onda della radiazione, il potere risolutivo dell'occhio della specie aliena vale:

$$\theta = 1.22\,\frac{\lambda}{D_p} = \frac{1.22 \cdot 5000 \cdot 10^{-10}\text{ m}}{3.0 \cdot 10^{-3}\text{ m}} \simeq 2.0 \cdot 10^{-4}\text{ rad} \simeq 42''\,.$$

Quindi al di sotto di questo diametro apparente, che è ben maggiore del seeing medio dell'atmosfera del pianeta, la nebulosa appare puntiforme alla specie aliena.
Calcoliamo il diametro lineare della nebulosa $\mathbf{D_0}$ che corrisponde al potere risolutivo:

$$D_0 = d \cdot \tan(\theta) \simeq 658 \text{ pc } \cdot \tan\ (1.17\ \cdot\ 10^{-2} \text{ gradi}) \simeq 0.134 \text{ pc } \simeq 4.13 \cdot 10^{12} \text{ km}\,.$$

Calcoliamo, note la velocità di espansione costante **v** e la differenza dei diametri, il tempo **T** impiegato dalla nebulosa per espandersi da D_0 a D:

$$T = \frac{D - D_0}{2\,v} \simeq \frac{7.5 \cdot 10^{12}\text{ km}}{2 \cdot 13\text{ km} \cdot s^{-1}} \simeq 2.9 \cdot 10^{11}\text{ s}\,,$$

che corrisponde a circa 9140 anni terrestri.

2. La gattina con il contagocce

La gattina extraterrestre Karel-b preleva una goccia di Sole dalla fotosfera e la porta sul suo pianeta come souvenir del Sistema Solare. La goccia è sferica, ha un raggio di 3.15 mm ed è mantenuta alla temperatura a cui è stata estratta. A che distanza dai suoi occhi la gattina deve porre la goccia affinché risulti di magnitudine 8? Assumete che il pianeta su cui abita Karel-b non abbia atmosfera.

Soluzione:
La goccia, essendo stata estratta dal Sole, si troverà a una temperatura $\mathbf{T_\odot}$ pari a quella della fotosfera solare, e irraggerà secondo la legge di Stefan-Boltzmann un'energia:

$$L = 4\pi\, R^2 \cdot \sigma\, {T_\odot}^4\,.$$

Alla distanza d, il flusso misurato **F** sarà:

$$F = \frac{L}{4\pi\, d^2} = \frac{4\pi\, R^2 \cdot \sigma\, {T_\odot}^4}{4\pi\, d^2} = \sigma\, {T_\odot}^4 \left(\frac{R}{d}\right)^2.$$

Detta **m** la magnitudine apparente della goccia, applichiamo la legge di Pogson prendendo come riferimento la magnitudine apparente del Sole $\mathbf{m_\odot}$ e indicando con $\mathbf{F_\odot}$ il flusso che riceviamo dal Sole:

$$m - m_\odot = \ -2.5\log\frac{F}{F_\odot}\,.$$

Detti **a** la distanza media Terra-Sole e $\mathbf{R_\odot}$ il raggio del Sole, si ha:

$$F_\odot = \frac{4\pi\, R_\odot^{\,2} \cdot \sigma\, T_\odot^{\,4}}{4\pi \cdot a^2} = \sigma\, T_\odot^{\,4} \left(\frac{R_\odot}{a}\right)^2 .$$

Ricaviamo infine:

$$m - m_\odot = -2.5 \log\left[\frac{\sigma\, T_\odot^{\,4}}{\sigma\, T_\odot^{\,4}} \cdot \left(\frac{R}{d}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{R_\odot}\right)^2\right] = -2.5 \log\left[\frac{R \cdot a}{d \cdot R_\odot}\right]^2 = -5 \log\left[\frac{R \cdot a}{d \cdot R_\odot}\right]$$

$$\frac{R \cdot a}{d \cdot R_\odot} = 10^{\frac{m_\odot - m}{5}} \quad \rightarrow \quad \frac{d \cdot R_\odot}{R \cdot a} = 10^{\frac{m - m_\odot}{5}} .$$

Ponendo m = 8 otteniamo:

$$d = \frac{R \cdot a}{R_\odot} \cdot 10^{\frac{m - m_\odot}{5}} \simeq \frac{3.15 \cdot 10^{-3}\ m \cdot 149.6 \cdot 10^{9}\ m}{6.955 \cdot 10^{8}\ m} \cdot 10^{\frac{8+26.7}{5}} \simeq 5.90 \cdot 10^{6}\ m \simeq\ 5900\ km\,.$$

Nota: il problema può essere risolto considerando al posto delle magnitudini apparenti quelle assolute della goccia e del Sole; si arriva ai medesimi risultati. In sede di correzione la soluzione con le magnitudini assolute è stata valutata in modo del tutto simile a quella con le magnitudini apparenti.

3. Il satellite PEACE

È stato messo in orbita attorno alla Terra il satellite artificiale PEACE, che ha forma sferica, un diametro di 58.0 cm e un peso di 83.6 N. Il satellite ha un periodo di rivoluzione di 96.2 minuti e la sua orbita, che si trova sul piano dell'equatore terrestre, ha un'eccentricità di 0.0520. La superficie esterna del satellite è di alluminio. Considerando che il satellite diffonde la luce solare in modo uniforme e che l'alluminio ha un'albedo di 0.61, per un osservatore posto sulla superficie della Terra, calcolate:

1. se il satellite potrebbe essere visibile a occhio nudo stimando la sua magnitudine apparente nelle migliori condizioni possibili;
2. le latitudini limite (positiva e negativa) da cui il satellite è osservabile e se da tali latitudini potrebbe essere visibile a occhio nudo.

In entrambi i casi non considerate la possibilità che il satellite si venga a trovare nel cono d'ombra della Terra.

Soluzione:

1. Detta $\mathbf{M_T}$ la massa della Terra, dal periodo di rivoluzione $\mathbf{T}$ ricaviamo il semiasse maggiore **a** dell'orbita del satellite:

$$a = \sqrt[3]{\frac{G\, M_T\, T^2}{4\,\pi^2}} \simeq \sqrt[3]{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ \cdot\ s^2}\ \cdot\ 5.972\ \cdot\ 10^{24}\ kg\ \cdot 3.33\ \cdot\ 10^{7}\ s}{4\,\pi^2}} \simeq\ 6.95\ \cdot\ 10^{6}\ m\,.$$

Detta **e** l'eccentricità dell'orbita le distanze del satellite al perigeo $\mathbf{d_P}$ e all'apogeo $\mathbf{d_A}$ valgono:

$$d_P = a\,(1 - e) = 6.95\ \cdot\ 10^{6}\ m\ \cdot\ 0.948\ \simeq 6.59\ \cdot\ 10^{6}\ m\,,$$

$$d_A = a\,(1 + e) = 6.95\ \cdot\ 10^{6}\ m\ \cdot\ 1.052\ \simeq 7.31\ \cdot\ 10^{6}\ m\,.$$

La miglior condizione per osservare il satellite è quanto esso si trova al perigeo e un osservatore posto sull'equatore della Terra lo vede transitare allo zenith. In tale situazione detto $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra la sua distanza $\mathbf{d_O}$ dall'osservatore sarà:

$$d_O = d_P - R_T\ \ \simeq\ 6.59\ \cdot\ 10^{6}\ m - 6.378\ \cdot\ 10^{6}\ m\ \simeq 212\ \cdot\ 10^{3}\ m\,.$$

Poiché la distanza del satellite dalla Terra è trascurabile rispetto alla distanza della Terra dal Sole, possiamo assumere che il valore della costante solare $\mathbf{C_\odot}$ sia la stessa per la Terra e per il satellite.
Detti **R** il raggio del satellite, **A** la sua albedo, $\mathbf{F_S}$ il flusso riflesso dal satellite, $\mathbf{m_S}$ e $\mathbf{m_\odot}$ le magnitudini apparenti del satellite e del Sole si ha:

$$m_\odot -\ m_S =\ -2.5 \log\frac{C_\odot}{F_S} =\ -2.5 \log\frac{C_\odot\ 2\,\pi\, d_O^{\,2}}{C_\odot\, \pi\, R^2\ \cdot A}\ \simeq\ -2.5 \log\frac{2\ \cdot 4.49\ \cdot\ 10^{10}\ m^2}{8.41\ \cdot 10^{-2}\ m^2\ \cdot 0.61}\ \simeq -30.61$$

$$m_S =\ m_\odot + 30.61\ \simeq 3.87\,.$$

Il satellite sarebbe osservabile a occhio nudo qualora non venga a trovarsi nel cono d'ombra della Terra.

2. Poiché l'orbita di PEACE giace sul piano equatoriale della Terra, e considerando la rifrazione dell'atmosfera, la latitudine limite φ_L da cui può essere osservato si ha quando il satellite è all'apogeo e vale:

$$\varphi_L = \pm \arccos \frac{R_T}{d_A} \pm 35' \simeq \pm \arccos \frac{6.378 \cdot 10^6 \text{ m}}{7.31 \cdot 10^6 \text{ m}} \pm 0°.6 \simeq \pm 29°.8 \,.$$

Da tali latitudini la distanza $\mathbf{d_L}$ del satellite dall'osservatore vale circa:

$$d_L = \sqrt{{d_A}^2 - {R_T}^2} \simeq 3.57 \cdot 10^6 \text{ m} \,,$$

e quindi la sua magnitudine $\mathbf{m_{SL}}$ sarebbe di:

$$m_{SL} = m_\odot + 2.5 \log \frac{C_\odot \; 2\pi \, {d_L}^2}{C_\odot \, \pi \, R^2 \cdot A} \simeq -26.74 + 2.5 \log \frac{2 \cdot 1.27 \cdot 10^{13} \text{ m}^2}{8.41 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot 0.61} \simeq 10.0 \,.$$

Non sarebbe quindi osservabile a occhio nudo: per vederlo occorrerebbe un telescopio di grandi dimensioni, poiché in prossimità dell'orizzonte l'assorbimento dell'atmosfera è dell'ordine di 8 magnitudini, portando a un valore di $m_{SL} \approx 18$.

4. Giocare a golf sulla Luna

Nel 1971 il comandante dell'Apollo 14 Alan Shepard si rese protagonista di un divertente esperimento per valutare la gravità lunare: egli, infatti, effettuò un tiro di golf sulla superficie del nostro satellite, divenendo il primo e unico uomo ad aver giocato a golf sulla Luna. Shepard impresse alla pallina una velocità con modulo di 111.0 km/h e con un angolo di 30° rispetto al piano orizzontale, facendole raggiungere l'altezza massima di 73.40 metri. Il modulo di comando dell'Apollo 14 si trovava in orbita circolare attorno alla Luna a una distanza dal suo centro di 1841 km, con un periodo di rivoluzione di 1h 58m 8s. Ricavate la densità media della Luna utilizzando esclusivamente i dati del problema e assumendo la Luna perfettamente sferica. Confrontare il valore ottenuto con il valore che si ottiene con i dati riportati in tabella.

Soluzione:

Detti **M** la massa, **V** il volume e **R** il raggio della Luna, la densità media ρ è data da:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3\,M}{4\pi \, R^3} \,.$$

Dai dati relativi all'orbita del modulo di comando dell'Apollo 14 possiamo ricavare la massa della Luna dalla III legge di Keplero generalizzata. Indicando con **T** il periodo e con **a** il raggio dell'orbita si ha:

$$M = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \, (1841 \cdot 10^3 \text{ m})^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \, \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot (7088 \text{ s})^2} \simeq 7.347 \cdot 10^{22} \text{ kg} \,.$$

In ottimo accordo con il valore riportato nella tabella dei dati.
Possiamo ricavare il raggio dalla relazione che lo lega all'accelerazione di gravità. Detto **v** il modulo della velocità iniziale impressa da Shepard alla pallina da golf, che forma un angolo θ con il piano orizzontale, la velocità si può scomporre lungo due componenti, una orizzontale e una verticale.
La componente verticale è

$$v_0 = v \cdot \sin\theta = 111.0 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \sin(30°) = 111.0 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0.5 = 55.50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15.42 \frac{\text{m}}{\text{s}} \,.$$

Dalla legge di conservazione dell'energia, poiché l'altezza raggiunta è piccola rispetto al raggio della Luna, dette **m** la massa della pallina, $\mathbf{v_1}$ la sua velocità alla massima altezza (pari a zero), $\mathbf{h_0}$ l'altezza iniziale (pari a zero) e **h** l'altezza massima raggiunta, si ha:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot h_0 = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 = g \cdot h$$

$$g = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{h} \simeq \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(15.42 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{73.40 \text{ m}} \simeq 1.620 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

e poiché

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

possiamo infine ricavare il raggio della Luna:

$$R = \sqrt{\frac{G \cdot M}{g}} \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\, s^2}\ \cdot\ 7.347 \cdot 10^{22}\ kg}{1.620\ \frac{m}{s^2}}} \simeq 1740\ \cdot 10^3\ m = 1740\ km\,.$$

Anche questo in ottimo accordo con il valore riportato nella tabella dei dati.

Otteniamo infine:

$$\rho = \frac{3\,M}{4\pi\, R^3} \simeq \frac{3\ \cdot\ 7.347 \cdot 10^{22}\ kg}{4\pi\,(1740\ \cdot 10^3\ m)^3} \simeq 3.329\ \cdot\ 10^3\ \frac{kg}{m^3}\,.$$

Utilizzando i valori $\mathbf{M_L}$ e $\mathbf{R_L}$ di massa e raggio della Luna riportati nella tabella dei dati avremmo ottenuto:

$$\rho = \frac{3\,M_L}{4\pi\, {R_L}^3} \simeq \frac{3\ \cdot\ 7.342 \cdot 10^{22}\ kg}{4\pi\,(1738\ \cdot 10^3\ m)^3} \simeq 3.339\ \cdot\ 10^3\ \frac{kg}{m^3}\,,$$

con una differenza tra i due valori del 0.30 %.

5. Quanto dura il tramonto?

Il 3 gennaio in una località posta a 42° di latitudine Nord, un osservatore A vede il Sole tramontare. Sei mesi dopo anche un secondo osservatore B, posto in una località a 42° di latitudine Sud, osserva il tramonto del Sole. Entrambi gli osservatori si trovano al livello del mare e il loro orizzonte non ha ostruzioni. Trascurate gli effetti della rifrazione.

1. Quale dei due tramonti dura di più?
2. Qual è la differenza percentuale nella durata del tramonto più lungo rispetto a quello più corto?
3. Se invece di due osservatori A e B si considerasse un solo osservatore C posto all'equatore che osserva il tramonto nei due diversi momenti dell'anno, a quanto ammonterebbe la differenza di durata?
4. A quanto ammonterebbe la differenza percentuale calcolata al punto 2 se il semiasse dell'orbita terrestre fosse il doppio di quello attuale?
5. A quanto ammonterebbe la differenza percentuale calcolata al punto 2 se l'eccentricità dell'orbita terrestre fosse doppia di quella attuale?

Nota: per angoli α piccoli, espressi in radianti, si può utilizzare l'approssimazione $\arctan(\alpha) \simeq \alpha$.

Soluzione:

1. La durata del tramonto del Sole è il tempo che il diametro solare apparente impiega a solcare l'orizzonte. Essa dipende dall'inclinazione della traiettoria del Sole rispetto all'orizzonte, che determina la velocità alla quale il disco solare attraversa l'orizzonte. Questa velocità non è altro che la componente della velocità angolare di rotazione terrestre lungo la traiettoria apparente del Sole nel punto in cui questo tramonta.
   Essendo le condizioni geografiche identiche nei due casi, l'angolo che la traiettoria apparente del Sole forma con l'orizzonte è lo stesso e la differenza nella durata dei due tramonti è legata unicamente alle dimensioni apparenti del Sole.
   L'osservatore A vede il Sole tramontare quando la Terra è nei pressi del perielio, il Sole gli appare quindi più grande rispetto all'osservatore B e, di conseguenza, osserverà un tramonto più lungo.
2. Chiamiamo $\boldsymbol{\Delta\alpha}$ la dimensione angolare del Sole e $\mathbf{\Delta T}$ la durata del tramonto. Considerando la componente della velocità angolare di rotazione terrestre lungo la traiettoria del Sole, $\boldsymbol{\omega'_T}$, vale la relazione

$$\Delta T = \frac{\Delta\alpha}{\omega'_T}\,.$$

   Questa relazione mostra che, a parità di angolo di inclinazione della traiettoria del Sole rispetto all'orizzonte (ovvero a parità di ω'_T), la durata del tramonto è semplicemente proporzionale alle dimensioni apparenti del Sole. Considerando quindi le durate ΔT_A e ΔT_B misurate dai due osservatori A e B, possiamo scrivere

$$\Delta T_A = \frac{\Delta\alpha_A}{\omega'_T} \qquad e \qquad \Delta T_B = \frac{\Delta\alpha_B}{\omega'_T}$$

   e quindi per la differenza percentuale $d(\%)$ si ottiene:

$$d(\%) = 100 \cdot \frac{\Delta T_A - \Delta T_B}{\Delta T_B} = 100 \cdot \left(\frac{\Delta T_A}{\Delta T_B} - 1\right) = 100 \cdot \left(\frac{\Delta\alpha_A}{\omega'_T} \cdot \frac{\omega'_T}{\Delta\alpha_B} - 1\right) = 100 \cdot \left(\frac{\Delta\alpha_A}{\Delta\alpha_B} - 1\right).$$

   Il diametro apparente del Sole è esprimibile in termini del diametro fisico del Sole $\mathbf{D_\odot}$ e della distanza Sole-Terra $\mathbf{d_{ST}}$:

$$\Delta\alpha = \arctan\left(\frac{D_\odot}{d_{ST}}\right) \simeq \frac{D_\odot}{d_{ST}} \text{ rad}.$$

Considerando che la distanza dal Sole per i due osservatori A e B è, rispettivamente, quella della Terra al perielio $\mathbf{d_{ST-P}}$ e all'afelio $\mathbf{d_{ST-A}}$, e detti $\mathbf{a_T}$ ed $\mathbf{e_T}$ semiasse maggiore ed eccentricità dell'orbita della Terra:

$$d_{ST-P} = a_T\,(1 - e_T)\,,$$

$$d_{ST-A} = a_T\,(1 + e_T)\,.$$

Quindi:

$$\frac{\Delta\alpha_A}{\Delta\alpha_B} \approx \frac{D_\odot}{a_T\,(1 - e_T)} \cdot \frac{a_T\,(1 + e_T)}{D_\odot} = \frac{1 + e_T}{1 - e_T}.$$

La differenza percentuale vale pertanto:

$$d(\%) = 100 \cdot \left(\frac{\Delta\alpha_A}{\Delta\alpha_B} - 1\right) = 100 \cdot \left(\frac{1 + e_T}{1 - e_T} - 1\right) = 100 \cdot \frac{2\,e_T}{1 - e_T} \simeq 100 \cdot \frac{2 \cdot 0.01673}{1 - 0.01673} \simeq 3.4\,\%\,.$$

3. All'equatore il disco solare attraversa perpendicolarmente l'orizzonte, con velocità pari alla velocità angolare di rotazione terrestre $\boldsymbol{\omega_T}$. I diametri angolari del Sole al perielio $\boldsymbol{\Delta\alpha_P}$ e all'afelio $\boldsymbol{\Delta\alpha_A}$ valgono:

$$\boldsymbol{\Delta\alpha_P} = \arctan\left(\frac{2\,R_\odot}{a_T\,(1 - e_T)}\right) = \arctan\left(\frac{2 \cdot 6.955 \cdot 10^8 \text{ m}}{1.471 \cdot 10^{11} \text{ m}}\right) = 0°.5418\,,$$

$$\boldsymbol{\Delta\alpha_A} = \arctan\left(\frac{2\,R_\odot}{a_T\,(1 + e_T)}\right) = \arctan\left(\frac{2 \cdot 6.955 \cdot 10^8 \text{ m}}{1.521 \cdot 10^{11} \text{ m}}\right) = 0°.5240\,.$$

Detto **P** il periodo di rotazione abbiamo:

$$\omega_T = \frac{360°}{P} = \frac{360°}{86164 \text{ s}} \simeq 4.1781 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{gradi}}{\text{s}}.$$

Quindi la durata media del tramonto all'equatore al perielio ΔT_P e all'afelio ΔT_A vale:

$$\Delta T_P = \frac{\Delta\alpha_P}{\omega_T} \simeq \frac{0°.5418}{4.1781 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{gradi}}{\text{s}}} \simeq 129.7 \text{ s}\,,$$

$$\Delta T_A = \frac{\Delta\alpha_P}{\omega_T} \simeq \frac{0°.5240}{4.1781 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{gradi}}{\text{s}}} \simeq 125.4 \text{ s}\,.$$

La differenza di durata ΔT_{P-A} sarà quindi:

$$\Delta T_{P-A} = \Delta T_P - \Delta T_A \simeq 4.3 \text{ s}\,.$$

4. Abbiamo visto che la variazione relativa della durata del tramonto calcolata al punto 2) non dipende dal semiasse maggiore dell'orbita. Pertanto il valore è comunque pari al 3.4 %, qualunque sia il semiasse maggiore.

5. Al contrario, la variazione relativa della durata del tramonto calcolata al punto 2) dipende dall'eccentricità dell'orbita. Riprendendo la formula trovata e sostituendo a $\mathbf{e_T}$ un valore $\mathbf{e'_T}$ doppio di quello attuale (cioè 0.03346 invece di 0.01673) troveremmo una differenza percentuale **d'** pari a:

$$d'(\%) = 100 \cdot \frac{2\,e'_T}{1 - e'_T} \simeq 100 \cdot \frac{2 \cdot 0.03346}{1 - 0.03346} \simeq 6.9\,\%\,.$$