OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2022

Finale Nazionale Perugia – 27 aprile

Prova teorica categoria Junior 2

1. Il nettunodotto

Nel 2245 verrà inaugurato il primo nettunodotto, un complesso di collegamenti tra Nettuno e le colonie umane nel Sistema Solare per sfruttare l'idrogeno presente nell'atmosfera del gigante gassoso. Viene stimato che sarà possibile estrarre $6.49 \cdot 10^{14}$ kg di idrogeno al secondo. Dopo 50 anni dall'inizio dell'estrazione:

1. stimate la variazione percentuale della massa di Nettuno;
2. verificate se è vero che, rimanendo alla stessa distanza dal Sole, il nuovo periodo di rivoluzione di Nettuno sarà inferiore del 1% rispetto a quello attuale.

Soluzione:

1. Detti $\mathbf{N_H}$ la massa dell'idrogeno estratto nell'unità di tempo e $\mathbf{\Delta T}$ il tempo totale di estrazione, la massa totale $\mathbf{M_H}$ di idrogeno estratto da Nettuno in 50 anni di operatività del nettunodotto è:

$$M_H = N_H \cdot \Delta T \simeq 6.49 \cdot 10^{14}\,\frac{kg}{s} \cdot (60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365.25)\,\frac{s}{anno} \cdot 50\text{ anni} \simeq 1.02 \cdot 10^{24}\text{ kg}.$$

Detta $\mathbf{M_N}$ la massa di Nettuno, si ha:

$$\frac{M_H}{M_N} = \frac{1.02 \cdot 10^{24}\text{ kg}}{1.024 \cdot 10^{26}\text{ kg}} \simeq 0.01\,.$$

Quindi la variazione di massa del pianeta sarà pari all'1%.

2. Detti **a** e **T** il semiasse maggiore e il periodo di rivoluzione di Nettuno e $\mathbf{M_\odot}$ la massa del Sole, scriviamo la III legge di Keplero nella forma generalizzata:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\,(M_\odot + M_N)}{4\,\pi^2}$$

e poiché

$$\frac{M_N}{M_\odot} = \frac{1.024 \cdot 10^{26}\text{ kg}}{1.989 \cdot 10^{30}\text{ kg}} \simeq 5.148 \cdot 10^{-5}$$

deduciamo che l'attuale periodo di rivoluzione di Nettuno è di fatto determinato dalla massa del Sole. Quindi una variazione del 1% della massa di Nettuno non può comportare una variazione dell'1% del periodo di rivoluzione.

2. L'astronomo di Perugia

Un astronomo osserva alle 03:18:28 UT, da Perugia (latitudine = + 43° 07'), una stella che alla sua culminazione superiore ha un'altezza di 25° 12'. Sapendo che alle 00:00:00 UT il tempo siderale locale era 14h 24m 29s:

1. calcolate le coordinate equatoriali della stella all'istante dell'osservazione;
2. stimate in quale periodo dell'anno il Sole si trova in prossimità della stella;
3. indicate, giustificando la vostra risposta, a quale delle seguenti costellazioni appartiene la stella: Ercole, Drago, Ofiuco, Ottante.

Soluzione:

1. L'altezza massima sull'orizzonte $\mathbf{h_{max}}$ di un oggetto con declinazione $\boldsymbol{\delta}$ osservato da una località a latitudine $\boldsymbol{\varphi}$ vale:

$$h_{max} = 90° - \varphi + \delta\,,$$

da cui ricaviamo la declinazione della stella:

$$\delta = h_{max} - 90° + \varphi = 25°\,12' - 90° + 43°\,07' = -21°\,41'.$$

La culminazione superiore coincide con il passaggio della stella al meridiano in direzione sud. In quel momento il tempo siderale locale è pari all'ascensione retta **AR** della stella.

Convertiamo l'intervallo di tempo universale **ΔUT** (= 3h 18m 28s) trascorso dalla mezzanotte in intervallo di tempo siderale **ΔTS**:

$$\Delta TS = \Delta UT \cdot \frac{24\ h}{23h\ 56m\ 4.1s} \simeq 3.3078\ h \cdot 1.0027 = 3.3167 = 3h\ 19m\ 00s\,.$$

Sommando questo valore al tempo siderale **TS** alle 00:00:00 UT otteniamo il tempo siderale al momento dell'osservazione, che coincide con l'ascensione retta della stella:

$$TS = AR = TS + \Delta TS = 14h\ 24m\ 29\ s + 3h\ 19m\ 00s = 17h\ 43m\ 29s\,.$$

Quindi le coordinate della stella sono:

$$AR = 17h\ 43m\ 29s \qquad \delta = -21°\ 41'.$$

2. Ci troviamo in prossimità della zona della sfera celeste in cui il Sole si trova durante il solstizio d'inverno, quando la sua ascensione retta è di 18h e la declinazione di -23° 26'.

3. Sia Ercole che il Drago occupano regioni del cielo con ascensione retta di 18h, tuttavia la loro parte più a sud resta a declinazione positiva. La costellazione dell'Ottante è prossima al polo sud celeste ed è invisibile da Perugia. La stella appartiene quindi alla costellazione di Ofiuco, che occupa regioni del cielo con ascensione retta di 18h e la cui parte più a sud arriva a declinazioni dell'ordine di -23°.

3. La specie aliena

Una specie aliena, che possiede un solo occhio capace di osservare alla lunghezza d'onda di 5000 Å e con una pupilla di diametro pari a 3.0 mm, osserva una nebulosa distante 658 pc dal proprio pianeta. Il diametro angolare della nebulosa è di 1' 58". Assumete che la nebulosa si sia espansa con una velocità costante di 13 km/s e calcolate quanto tempo fa essa appariva puntiforme alla specie aliena. L'atmosfera del pianeta della specie aliena ha caratteristiche simili a quelle dell'atmosfera terrestre.

Soluzione:

detti **L** il diametro angolare della nebulosa e **d** la sua distanza, calcoliamo il suo diametro lineare **D**:

$$D = d \cdot \tan(L) \simeq 658\ pc \cdot \tan\ (3.28 \cdot 10^{-2}\ gradi) \simeq 0.376\ pc \simeq 1.16 \cdot 10^{13}\ km\,.$$

Detti $\mathbf{D_p}$ il diametro della pupilla e $\boldsymbol{\lambda}$ la lunghezza d'onda della radiazione, il potere risolutivo dell'occhio della specie aliena vale:

$$\theta = 1.22\ \frac{\lambda}{D_p} = \frac{1.22 \cdot 5000 \cdot 10^{-10}\ m}{3.0 \cdot 10^{-3}\ m} \simeq 2.0 \cdot 10^{-4}\ rad \simeq 42''\,.$$

Quindi al di sotto di questo diametro apparente, che è ben maggiore del seeing medio dell'atmosfera del pianeta, la nebulosa appare puntiforme alla specie aliena.
Calcoliamo il diametro lineare della nebulosa $\mathbf{D_0}$ che corrisponde al potere risolutivo:

$$D_0 = d \cdot \tan(\theta) \simeq 658\ pc \cdot \tan\ (1.17 \cdot 10^{-2}\ gradi) \simeq 0.134\ pc \simeq 4.13 \cdot 10^{12}\ km\,.$$

Calcoliamo, note la velocità di espansione costante **v** e la differenza dei diametri, il tempo **T** impiegato dalla nebulosa per espandersi da D_0 a D:

$$T = \frac{D - D_0}{2\ v} \simeq \frac{7.5 \cdot 10^{12}\ km}{2 \cdot 13\ km \cdot s^{-1}} \simeq 2.9 \cdot 10^{11}\ s\,,$$

che corrisponde a circa 9140 anni terrestri.

4. La gattina con il contagocce

La gattina extraterrestre Karel-b preleva una goccia di Sole dalla fotosfera e la porta sul suo pianeta come souvenir del Sistema Solare. La goccia è sferica, ha un raggio di 3.15 mm ed è mantenuta alla temperatura a cui è stata estratta. A che distanza dai suoi occhi la gattina deve porre la goccia affinché risulti di magnitudine 8? Assumete che il pianeta su cui abita Karel-b non abbia atmosfera.

Soluzione:

La goccia, essendo stata estratta dal Sole, si troverà a una temperatura $\mathbf{T_\odot}$ pari a quella della fotosfera solare, e irraggerà secondo la legge di Stefan-Boltzmann un'energia:

$$L = 4\pi\ R^2 \cdot \sigma\ T_\odot{}^4\,.$$

Alla distanza d, il flusso misurato **F** sarà:

$$F = \frac{L}{4\pi\ d^2} = \frac{4\pi\ R^2 \cdot \sigma\ T_\odot{}^4}{4\pi\ d^2} = \sigma\ T_\odot{}^4 \left(\frac{R}{d}\right)^2.$$

Detta **m** la magnitudine apparente della goccia, applichiamo la legge di Pogson prendendo come riferimento la magnitudine apparente del Sole $\mathbf{m}_\odot$ e indicando con $\mathbf{F}_\odot$ il flusso che riceviamo dal Sole:

$$m - m_\odot = -2.5 \log \frac{F}{F_\odot} .$$

Detti **a** la distanza media Terra-Sole e $\mathbf{R}_\odot$ il raggio del Sole, si ha:

$$F_\odot = \frac{4\pi\, {R_\odot}^2 \cdot \sigma\, {T_\odot}^4}{4\pi \cdot a^2} = \sigma\, {T_\odot}^4 \left(\frac{R_\odot}{a}\right)^2 .$$

Ricaviamo infine:

$$m - m_\odot = -2.5 \log \left[\frac{\sigma\, {T_\odot}^4}{\sigma\, {T_\odot}^4} \cdot \left(\frac{R}{d}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{R_\odot}\right)^2\right] = -2.5 \log \left[\frac{R \cdot a}{d \cdot R_\odot}\right]^2 = -5 \log \left[\frac{R \cdot a}{d \cdot R_\odot}\right]$$

$$\frac{R \cdot a}{d \cdot R_\odot} = 10^{\frac{m_\odot - m}{5}} \quad \rightarrow \quad \frac{d \cdot R_\odot}{R \cdot a} = 10^{\frac{m - m_\odot}{5}} .$$

Ponendo m = 8 otteniamo:

$$d = \frac{R \cdot a}{R_\odot} \cdot 10^{\frac{m - m_\odot}{5}} \simeq \frac{3.15 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \cdot 149.6 \cdot 10^9\ \mathrm{m}}{6.955 \cdot 10^8\ \mathrm{m}} \cdot 10^{\frac{8+26.7}{5}} \simeq 5.90 \cdot 10^6\ \mathrm{m} \simeq 5900\ \mathrm{km} .$$

Nota: il problema può essere risolto considerando al posto delle magnitudini apparenti quelle assolute della goccia e del Sole; si arriva ai medesimi risultati. In sede di correzione la soluzione con le magnitudini assolute è stata valutata in modo del tutto simile a quella con le magnitudini apparenti.

5. Il satellite PEACE

È stato messo in orbita attorno alla Terra il satellite artificiale PEACE, che ha forma sferica, un diametro di 58.0 cm e un peso di 83.6 N. Il satellite ha un periodo di rivoluzione di 96.2 minuti e la sua orbita, che si trova sul piano dell'equatore terrestre, ha un'eccentricità di 0.0520. La superficie esterna del satellite è di alluminio. Considerando che il satellite diffonde la luce solare in modo uniforme e che l'alluminio ha un'albedo di 0.61, per un osservatore posto sulla superficie della Terra, calcolate:

1. se il satellite potrebbe essere visibile a occhio nudo stimando la sua magnitudine apparente nelle migliori condizioni possibili;
2. le latitudini limite (positiva e negativa) da cui il satellite è osservabile e se da tali latitudini potrebbe essere visibile a occhio nudo.

In entrambi i casi non considerate la possibilità che il satellite si venga a trovare nel cono d'ombra della Terra.

Soluzione:

1. Detta $\mathbf{M_T}$ la massa della Terra, dal periodo di rivoluzione **T** ricaviamo il semiasse maggiore **a** dell'orbita del satellite:

$$a = \sqrt[3]{\frac{G\, M_T\, T^2}{4\,\pi^2}} \simeq \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \cdot 3.33 \cdot 10^7\ \mathrm{s}}{4\,\pi^2}} \simeq 6.95 \cdot 10^6\ \mathrm{m} .$$

Detta **e** l'eccentricità dell'orbita le distanze del satellite al perigeo $\mathbf{d_P}$ e all'apogeo $\mathbf{d_A}$ valgono:

$$d_P = a\,(1 - e) = 6.95 \cdot 10^6\ \mathrm{m} \cdot 0.948 \simeq 6.59 \cdot 10^6\ \mathrm{m} ,$$

$$d_A = a\,(1 + e) = 6.95 \cdot 10^6\ \mathrm{m} \cdot 1.052 \simeq 7.31 \cdot 10^6\ \mathrm{m} .$$

La miglior condizione per osservare il satellite è quanto esso si trova al perigeo e un osservatore posto sull'equatore della Terra lo vede transitare allo zenith. In tale situazione detto $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra la sua distanza $\mathbf{d_O}$ dall'osservatore sarà:

$$d_O = d_P - R_T \simeq 6.59 \cdot 10^6\ \mathrm{m} - 6.378 \cdot 10^6\ \mathrm{m} \simeq 212 \cdot 10^3\ \mathrm{m} .$$

Poiché la distanza del satellite dalla Terra è trascurabile rispetto alla distanza della Terra dal Sole, possiamo assumere che il valore della costante solare $\mathbf{C}_\odot$ sia la stessa per la Terra e per il satellite.

Detti **R** il raggio del satellite, **A** la sua albedo, $\mathbf{F_S}$ il flusso riflesso dal satellite, $\mathbf{m_S}$ e $\mathbf{m}_\odot$ le magnitudini apparenti del satellite e del Sole si ha:

$$m_\odot - m_S = -2.5 \log \frac{C_\odot}{F_S} = -2.5 \log \frac{C_\odot\ 2\,\pi\, {d_O}^2}{C_\odot\, \pi\, R^2 \cdot A} \simeq -2.5 \log \frac{2 \cdot 4.49 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m}^2}{8.41 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^2 \cdot 0.61} \simeq -30.61$$

$$m_S = m_\odot + 30.61 \simeq 3.87\,.$$

Il satellite sarebbe osservabile a occhio nudo qualora non venga a trovarsi nel cono d'ombra della Terra.

2. Poiché l'orbita di PEACE giace sul piano equatoriale della Terra, e considerando la rifrazione dell'atmosfera, la latitudine limite φ_L da cui può essere osservato si ha quando il satellite è all'apogeo e vale:

$$\varphi_L = \pm \arccos \frac{R_T}{d_A} \pm 35' \simeq \pm \arccos \frac{6.378 \cdot 10^6 \text{ m}}{7.31 \cdot 10^6 \text{ m}} \pm 0°.6 \simeq \pm 29°.8\,.$$

Da tali latitudini la distanza $\mathbf{d_L}$ del satellite dall'osservatore vale circa:

$$d_L = \sqrt{{d_A}^2 - {R_T}^2} \simeq 3.57 \cdot 10^6 \text{ m}\,,$$

e quindi la sua magnitudine $\mathbf{m_{SL}}$ sarebbe di:

$$m_{SL} = m_\odot + 2.5 \log \frac{C_\odot \; 2\pi {d_L}^2}{C_\odot \pi R^2 \cdot A} \simeq -26.74 + 2.5 \log \frac{2 \cdot 1.27 \cdot 10^{13} \text{ m}^2}{8.41 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot 0.61} \simeq 10.0\,.$$

Non sarebbe quindi osservabile a occhio nudo: per vederlo occorrerebbe un telescopio di grandi dimensioni, poiché in prossimità dell'orizzonte l'assorbimento dell'atmosfera è dell'ordine di 8 magnitudini, portando a un valore di $m_{SL} \approx 18$.