OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2022

Finale Nazionale - Reggio Calabria, 4 maggio

Prova teorica - Categoria Junior 1

1. Il transito della Terra

Immaginate di osservare il transito della Terra sul disco del Sole da un esopianeta molto lontano. Assumete che la Terra abbia un'orbita circolare e che sia vista passare esattamente lungo il diametro del Sole. Qual è la durata, in ore, del transito che osservereste?

Soluzione:

Assumendo l'orbita circolare, detto **a** il semiasse maggiore (ovvero in questo caso il raggio dell'orbita) e **T** il periodo di rivoluzione, il modulo della velocità orbitale della Terra vale:

$$v = \frac{2\pi a}{T}.$$

Detto $\mathbf{R_\odot}$ il raggio del Sole, se l'osservatore è molto distante, come riportato nella traccia, la lunghezza **s** del percorso compiuto dalla Terra transitando davanti al Sole sarà pari a $2R_\odot$. Essendo il moto uniforme, la durata **t** del transito sarà:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\,R_\odot \cdot T}{2\pi a} \simeq \frac{2 \cdot 6.955 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot 8766 \text{ ore}}{2\,\pi \cdot 149.6 \cdot 10^6 \text{ km}} \simeq 12.98 \text{ ore}.$$

2. Un asteroide in arrivo

È stato recentemente scoperto un asteroide con eccentricità dell'orbita pari a 15/2 dell'eccentricità dell'orbita di Marte e con semiasse minore pari alla distanza di Marte dal Sole al perielio. Calcolate il periodo di rivoluzione dell'asteroide in anni.

Nota. Il valore dell'eccentricità **e** di un'orbita ellittica è legato ai valori dei semiassi maggiore **a** e minore **b** dalla relazione: $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$.

Soluzione:

Detta $\mathbf{e_M}$ l'eccentricità dell'orbita di Marte, l'eccentricità **e** dell'orbita dell'asteroide vale:

$$e = \frac{15}{2} \cdot e_M \simeq \frac{15}{2} \cdot 0.09337 \simeq 0.7003.$$

Detto $\mathbf{a_M}$ il semiasse maggiore dell'orbita, la distanza $\mathbf{d_{Mp}}$ di Marte dal Sole al perielio, pari al semiasse minore $\mathbf{b_A}$ dell'orbita dell'asteroide, è:

$$d_{Mp} = b_A = a_M\,(1 - e_M) \simeq 227.9 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot (1 - 0.09337) \simeq 2.066 \cdot 10^8 \text{ km},$$

da cui possiamo ricavare il semiasse maggiore $\mathbf{a_A}$ dell'orbita dell'asteroide:

$$a_A = \frac{b_A}{\sqrt{1 - e^2}} \simeq \frac{2.066 \cdot 10^8 \text{ km}}{\sqrt{1 - 0.4904}} \simeq 2.894 \cdot 10^8 \text{ km} \simeq 1.935 \text{ UA}.$$

Infine ricaviamo il periodo di rivoluzione **T** dell'asteroide in anni dalla III legge di Keplero:

$$T = \sqrt{a^3} \simeq \sqrt{1.935^3} \simeq 2.692 \text{ anni}.$$

3. Accelerazione di gravità

A quale altezza dalla superficie della Terra il valore dell'accelerazione di gravità è pari a un quarto del suo valore al livello del mare? Confrontate il valore ottenuto con il raggio della Terra.

Soluzione:

Detti $\mathbf{R_T}$ e $\mathbf{M_T}$ il raggio e la massa della Terra e **g** l'accelerazione di gravità al livello del mare, l'accelerazione di gravità $\mathbf{g_H}$ a un'altezza **H** è data dalla relazione:

$$g_H = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + H)^2}.$$

Da cui ricaviamo:

$$R_T + H = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{g_H}} = \sqrt{\frac{4 \cdot G \cdot M_T}{g}} \ .$$

Soluzione numerica:

$$H = \sqrt{\frac{4 \cdot G \cdot M_T}{g}} - R_T \simeq \sqrt{\frac{4 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg}{9.807 \frac{m}{s^2}}} - 6378\, km \simeq 6372\, km\, .$$

Il valore ottenuto è molto simile al raggio della Terra, sostanzialmente uguale considerando la precisione dei dati utilizzati nella soluzione.

Soluzione analitica:

$$H = 2\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{g}} - R_T = 2\, R_T - R_T = R_T \ .$$

Il valore ottenuto è uguale al raggio della Terra

4. Il progetto Starlight

Starlight è un progetto nato più di dieci anni fa con l'obiettivo di costruire navicelle in grado di raggiungere le stelle più vicine alla Terra grazie alla propulsione fotonica, che permetterebbe di viaggiare a velocità elevatissime. Assumete che una navicella viaggi a una velocità costante pari al 25% della velocità della luce e calcolate:

1. la durata, in ore, di un viaggio di andata e ritorno Terra - Marte quando la distanza tra i due pianeti è minima. Considerate le orbite di Terra e Marte circolari;
2. la durata, in anni, di un viaggio Terra - Mintaka - Polare – Terra. Utilizzate i dati della seguente tabella e trascurate lo spostamento reciproco tra i corpi durante il viaggio.

stella	**declinazione**	**distanza dal Sole**
Mintaka	0°	281 parsec
Polare	+90°	132 parsec

Soluzione:

1. Detti $\mathbf{a_T}$ e $\mathbf{a_M}$ i semiassi maggiori (ovvero i raggi poiché stiamo assumendo le orbite circolari) delle orbite di Terra e Marte, la distanza minima $\mathbf{d_{MIN}}$ tra i due pianeti è:

$$d_{MIN} = a_M - a_T \simeq 227.9 \cdot 10^6\, km - 149.6 \cdot 10^6\, km \simeq 78.3 \cdot 10^6\, km\, ,$$

la velocità $\mathbf{v_s}$ delle navicelle starlight è pari a:

$$v_s = 0.25 \cdot c \simeq 74.9 \cdot 10^3\, \frac{km}{s}$$

e quindi la durata **t** del viaggio di andata e ritorno Terra-Marte è:

$$t = \frac{2 \cdot d_{MIN}}{v_s} \simeq \frac{2 \cdot 78.3 \cdot 10^6\, km}{74.9 \cdot 10^3\, \frac{km}{s}} \simeq 2.09 \cdot 10^3\, s \simeq 0.58\, ore\, .$$

2. Nel calcolo possiamo ovviamente trascurare la distanza Terra - Sole rispetto a quella Sole - stelle. Dalle declinazioni delle stelle si deduce che la traiettoria del viaggio è un triangolo rettangolo, con angolo retto nella posizione della Terra. Dette $\mathbf{d_{TM}}$ la distanza Terra-Mintaka e $\mathbf{d_{PT}}$ la distanza Polare-Terra, la distanza Mintaka-Polare $\mathbf{d_{MP}}$ si ottiene dal teorema di Pitagora:

$$d_{MP} = \sqrt{d_{TM}^2 + d_{TP}^2} \simeq \sqrt{(281\, parsec)^2 + (132\, parsec)^2} \simeq 310\, parsec\, .$$

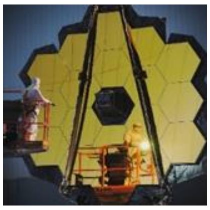
Quindi la lunghezza totale del viaggio $\mathbf{D_T}$ è:

$$D_T = d_{TM} + d_{MP} + d_{PT} \simeq 281\, parsec + 310\, parsec + 132\, parsec \simeq 723\, parsec \simeq 2.23 \cdot 10^{16}\, km\, .$$

La durata **T** del viaggio sarà quindi:

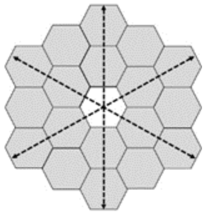
$$T = \frac{D_T}{v_s} \simeq \frac{2.23 \cdot 10^{16}\, km}{74.9 \cdot 10^3\, \frac{km}{s}} \simeq 2.98 \cdot 10^{11}\, s \simeq 9.44 \cdot 10^3\, anni\, .$$

5. Il James Webb Space Telescope



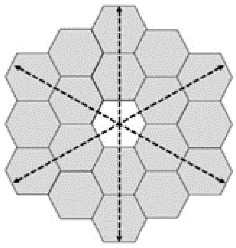
Il team del James Webb Space Telescope (JWST) della Nasa ha recentemente annunciato che è terminato con successo il posizionamento dei 18 tasselli, ciascuno a forma di esagono regolare, che compongono lo specchio primario da 6.60 m di "diametro" del telescopio (disegno a sinistra in basso: ognuna delle linee tratteggiate ha una lunghezza di 6.60 m). Nello specchio primario del JWST non è presente il tassello esagonale centrale, in quanto sarebbe oscurato dallo specchio secondario.

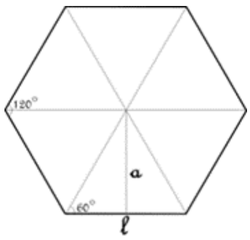
Sapendo che un esagono regolare è costituito da sei triangoli equilateri, calcolate:



1. l'area di ogni tassello, approssimandolo a una superficie piana, e quella complessiva dello specchio;
2. il rapporto tra il flusso di fotoni catturato dal JWST e il flusso di fotoni catturato dal Telescopio Nazionale Galileo (TNG). Il TNG ha uno specchio primario circolare con un diametro di 3.58 m, parzialmente oscurato dal suo specchio secondario, anch'esso circolare, che ha un diametro di 0.870 m.
3. Supponete infine che si verifichi uno dei seguenti eventi e calcolate quale dei due comporterebbe una maggiore diminuzione della quantità di luce riflessa dallo specchio del telescopio:
   a) due specchi del JWST vengono distrutti dall'impatto di due piccoli meteoriti;
   b) il potere di riflessione di tutti gli specchi del JWST diminuisce del 10%.

Soluzione





1. Come deducibile dal disegno, l'apotema **a** di ogni specchio esagonale si ottiene dividendo il "diametro" **d** dello specchio per 10:

$$a = \frac{d}{10} = \frac{6.60\ \mathrm{m}}{10} = 0.660\ \mathrm{m}\,.$$

Detto **l** il lato dell'esagono, poiché l'esagono è costituito da triangoli equilateri vale la relazione:

$$a^2 + \frac{l^2}{4} = l^2\,,$$

da cui si ricava:

$$l = \frac{2\,a}{\sqrt{3}} \simeq 0.762\ \mathrm{m}\,.$$

Quindi la superficie **S** di ognuno dei tasselli e l'area totale $\mathbf{A_{JWST}}$ sono pari a:

$$S = 6\cdot\frac{a\cdot l}{2} \simeq \frac{6\cdot 0.660\ \mathrm{m}\cdot 0.762\ \mathrm{m}}{2} \simeq 1.51\ \mathrm{m}^2\,,$$

$$A_{JWST} = 18\cdot S \simeq 27.2\ \mathrm{m}^2\,.$$

2. L'area della superficie riflettente dello specchio primario del TNG A_{TNG} è data dalla superficie dello specchio primario meno la parte oscurata dallo specchio secondario. Detti $\mathbf{R_P}$ e $\mathbf{R_S}$ i raggi degli specchi primario e secondario del TNG si ha:

$$A_{TNG} = \pi\cdot {R_P}^2 - \pi\cdot {R_S}^2 = \pi\,(1.79\ \mathrm{m})^2 - \pi\,(0.435\ \mathrm{m})^2 \simeq 9.47\ \mathrm{m}^2\,.$$

Il rapporto **K** del flusso di fotoni catturato dai due telescopi è dato dal rapporto tra le due aree:

$$K = \frac{A_{JWST}}{A_{TNG}} \simeq \frac{27.2\ \mathrm{m}^2}{9.47\ \mathrm{m}^2} \simeq 2.87\,.$$

3. Se due specchi del JWST venissero distrutti, resterebbero operativi solo 16 specchi e l'area riflettente $\mathbf{A_{16}}$ diventerebbe:

$$A_{16} = 16\cdot S \simeq 24.2\ \mathrm{m}^2\,.$$

In percentuale il nuovo flusso riflesso $\mathbf{F_{16}}$ sarebbe quindi:

$$F_{16} = 100\,\frac{A_{16}}{A_{JWST}} \simeq 100\,\frac{24.2\ \mathrm{m}^2}{27.2\ \mathrm{m}^2} \simeq 89\,\%\,.$$

Il flusso riflesso diminuirebbe dell'11% e quindi l'effetto della distruzione di due specchi risulterebbe leggermente superiore alla diminuzione del 10% del potere di riflessione di tutti gli specchi.