Olimpiadi Italiane di Astronomia 2022
Corso di preparazione alla Finale Nazionale
Categoria Senior - Lezione 3

1. Il 21 marzo 2013 un osservatore nei pressi di Catania (λ = 15° 4' 27'') ha visto la Luna sorgere sul mare alle 19:00. Sapendo che in quella data era in vigore l'ora legale, stimate la fase della Luna quando quest'osservazione è stata fatta. Commentate quali dei dati forniti concorrono e come alla soluzione.

Soluzione

Il 21 marzo il Sole si trova in prossimità del Punto $\boldsymbol{\gamma}$ e quindi la sua declinazione è circa zero. In questo periodo dell'anno la lunghezza del giorno è pari a quella della notte a tutte le latitudini e il Sole tramonta, per un osservatore posto al centro di un dato fuso orario e trascurando l'equazione del tempo, alle 18, ovvero alle 19 se è in vigore l'ora legale. Poiché la Luna sorgeva quando il Sole tramontava, si trovava in direzione opposta al Sole e quindi la sua fase era molto prossima a piena.

Importanza dei dati:

- Dalla data del 21 marzo ricaviamo che la declinazione del Sole era prossima a zero.
- Dalla longitudine di Catania deduciamo che la differenza dell'ora locale rispetto all'ora solare del meridiano centrale è piccola.
- Dal sapere che era in vigore l'ora legale deduciamo che il Sole tramontava circa alle 19:00.
- Dal sapere che la Luna sorgeva sul mare possiamo escludere che l'osservatore avesse davanti a sé delle montagne o altre ostruzioni, che avrebbero comportato vederla sorgere più tardi.

2. Assumendo per l'Anno Platonico una durata di 25780 anni, calcolate di quanto si sposta lungo l'eclittica la posizione del punto $\boldsymbol{\gamma}$ in 2500 anni.

Soluzione

L'anno Platonico è il tempo necessario affinchè, a causa del moto di precessione, la posizione del punto $\boldsymbol{\gamma}$ completi un giro dell'eclittica. In 2500 anni lo spostamento $\boldsymbol{\Delta\alpha_\gamma}$ in gradi e in ore varrà quindi:

$$\Delta\alpha_\gamma \simeq \frac{2500\ anni \cdot 360°}{25780\ anni} \simeq 34°\,54'\,39''$$

$$\Delta\alpha_\gamma \simeq \frac{2500\ \cdot 24h}{25780} \simeq 2h\,19m\,39s$$

3. Quanto dovrebbe valere l'obliquità dell'eclittica per poter osservare da Catania (φ = +37° 31') il 21 giugno il fenomeno del "Sole di mezzanotte"? Quanto varrebbe con questo valore di obliquità l'altezza del Sole al meridiano di Catania in direzione sud ai solstizi e agli equinozi? Trascurate gli effetti dovuti alla rifrazione e alle dimensioni apparenti del Sole.

Soluzione

Per essere osservabile a mezzanotte occorre che il Sole sia visibile quando transita al meridiano in direzione nord, ovvero che risulti circumpolare. Indicando con $\boldsymbol{\varepsilon}$ l'obliquità dell'eclittica, la condizione richiesta equivale a poter osservare da Catania il Sole circumpolare il giorno in cui la sua declinazione $\boldsymbol{\delta_\odot}$ è massima, cioè quando:

$$\delta_\odot = \varepsilon$$

In una località a latitudine $\boldsymbol{\varphi}$ una stella è circumpolare quando:

$$\delta \geq 90° - \varphi$$

quindi a Catania il Sole alla sua massima declinazione risulterebbe circumpolare per:

$$\varepsilon = 90° - \varphi = 90° - 37°\,31' = 52°\,29'$$

L'altezza di un oggetto con declinazione $\boldsymbol{\delta}$ che transita al meridiano in direzione sud è la sua altezza massima $\mathbf{h_{max}}$ ed è data dalla relazione:

$$\mathrm{h_{max}} = 90° - \varphi + \delta$$

Con il valore di $\boldsymbol{\varepsilon}$ che rende il Sole circumpolare a Catania il 21 giugno ai solstizi e agli equinozi si ha:

Solstizio estate	Equinozio di autunno	Solstizio d'inverno	Equinozio di primavera
$\delta_{\odot} = \varepsilon = 52°\,29'$	$\delta_{\odot} = 0°$	$\delta_{\odot} = -\varepsilon = -52°\,29'$	$\delta_{\odot} = 0°$
$\mathrm{h_{max-\odot}} = 90° - 37°31' + 52°29' = 104°58'$	$\mathrm{h_{max-\odot}} = 90° - 37°31' + 0° = 52°\,29'$	$\mathrm{h_{max-\odot}} = 90° - 37°31' - 52°29' = 0°$	$\mathrm{h_{max-\odot}} = 90° - 37°31' + 0° = 52°\,29'$

Quindi al solstizio d'estate il Sole culminerebbe oltre lo zenith, mentre sarebbe sull'orizzonte al solstizio d'inverno. Se osserviamo il fenomeno del Sole di mezzanotte il 21 giugno, il Sole sarebbe al massimo sull'orizzonte (trascurando le dimensioni angolari) al solstizio di inverno. Notiamo infine che l'altezza massima agli equinozi resta invariata, in quando trovandosi sull'equatore celeste $\boldsymbol{\delta_{\odot}}$ non dipende da $\boldsymbol{\varepsilon}$.

4. Nel 1100 A.C. degli astronomi cinesi misurarono l'altezza massima del Sole al meridiano ai solstizi, ottenendo 79° 7' e 31° 19'. In entrambi i casi il Sole era a sud dello zenith. A quale latitudine furono eseguite queste osservazioni? Quanto valeva all'epoca l'obliquità dell'eclittica?

Soluzione.
Gli astronomi si trovavano sicuramente nell'emisfero nord. Dette $\boldsymbol{\varepsilon}$ l'obliquità dell'eclittica e $\boldsymbol{\varphi}$ la latitudine del luogo, poiché il Sole culminava a sud dello zenith, le altezze massime al solstizio d'estate $\boldsymbol{h_{\odot 21-G}}$ e a quello d'inverno $\boldsymbol{h_{\odot 21-D}}$ sono date dalle relazioni:

$$\mathrm{h_{\odot 21-G}} = 90° - \varphi + \varepsilon \qquad \mathrm{h_{\odot 21-D}} = 90° - \varphi - \varepsilon$$

Quindi sottraendo membro a membro risulta che:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{h_{\odot 21-G}} - \mathrm{h_{21\odot-D}}}{2} = \frac{79°\,7' - 31°\,19'}{2} = 23°\,54'$$

e inoltre:

$$\varphi = 90° - \mathrm{h_{21\odot-G}} + \varepsilon = 90° - 79°\,7' + 23°\,54' = 34°\,47'$$

Notiamo che il valore dell'obliquità dell'eclittica dall'anno 1100 A.C. a oggi è diminuito di 28'.

5. Calcolate il valore del Giorno Giuliano alle ore 14:30 di UT del 20 aprile 2016, sapendo che il 20 gennaio 2015 alle ore 12:00 di UT il suo valore era JD = 2457043.0 .

Soluzione
Poiché l'anno 2016 era bisestile, tra le ore 12:00 del 20 gennaio 2015 e le ore 12:00 del 20 aprile 2016 è trascorso un numero di giorni Δt dato dalla somma di:

$$\Delta t_1 = 20\ gennaio\ 2015 - 20\ gennaio\ 2016 = 365\ giorni$$
$$\Delta t_2 = 20\ gennaio\ 2016 - 20\ febbraio\ 2016 = 31\ giorni$$
$$\Delta t_3 = 20\ febbraio\ 2016 - 20\ marzo\ 2016 = 29\ giorni$$
$$\Delta t_4 = 20\ marzo\ 2016 - 20\ aprile\ 2016 = 31\ giorni$$
$$\Delta t = 365 + 31 + 29 + 31 = 456\ giorni$$

Inoltre, poiché 2h 30m corrispondono a una frazione di giorno $\mathbf{\Delta g}$ pari a:

$$\Delta g = \frac{2h\,30m}{24h} \simeq 0.1042$$

alle ore 14:30 UT del 20 aprile 2016 il giorno giuliano valeva:

$$JD \simeq 2457043.0 + 456 + 0.1042 = 2457499.1042$$

6. Calcolare il tempo siderale di Greenwich quando presso l'European Southern Observatory di La Silla (Cile; λ = 70° 43' 53" W, φ = 29° 15' 40".2 S) il tempo siderale locale è 10h 15m 45s.

Soluzione

In ogni istante, detto $\boldsymbol{t_s}$ il tempo siderale locale e $\boldsymbol{TSG}$ il tempo siderale di Greenwich, vale la relazione:

$$t_s = TSG + \lambda$$

dove la longitudine $\boldsymbol{\lambda}$ (trasformata in tempo) è negativa se la località è a ovest di Greenwich e positiva se la località è a est di Greenwich.
Trasformiamo la longitudine di La Silla in unità di tempo **X** dalla relazione:

$$360° : 24h = \lambda : X$$

$$X = \frac{\lambda \cdot 24\,h}{360°} = \frac{-70°\,43'\,53''\ \cdot\ 24h}{360°} \simeq \frac{-70°.7314\ \cdot 24h}{360°} \simeq -4^h.7154 \simeq -4h\ 42m\,56s$$

e quindi:

$$TSG = t_s - X \simeq 10h\,15m\,45s - (-4h\,42m\,56s) \simeq 14h\,58m\,41s$$

7. Quanto valgono per un osservatore posto alla latitudine +42° la declinazione, l'angolo orario e l'ascensione retta dello zenith in un certo istante? Di quanto varia dopo 24h di tempo solare medio l'ascensione retta dello zenith?

Soluzione

Per ogni latitudine $\boldsymbol{\varphi}$ la declinazione dello zenith $\boldsymbol{\delta_{zenith}}$ è pari alla latitudine. Nel caso in esame quindi:

$$\delta_{\text{zenith}} = \mathbf{42°}$$

e rimane costante al passare del tempo, a meno degli effetti dovuti alla precessione e alla variazione dell'obliquità dell'eclittica.
L'angolo orario $\boldsymbol{H_{zenith}}$ dello zenith è costante e vale:

$$\text{H}_{\text{zenith}} = \mathbf{0°}$$

poiché, per definizione, il meridiano del luogo passa per lo zenith.
L'ascensione retta dello zenith $\boldsymbol{AR_{zenith}}$ varia in modo continuo a causa della rotazione della Terra ed è in ogni istante pari al tempo siderale locale:

$$\boldsymbol{AR_{zenith}} = \textbf{tempo siderale locale (LST)}$$

poiché, per definizione, a ogni istante passano al meridiano le stelle con ascensione retta pari al tempo siderale.
Infine, a causa della differenza tra giorno solare e giorno siderale, dopo 24h di tempo solare medio l'ascensione retta dello zenith $\boldsymbol{AR_{zenith+24h}}$ sarà:

$$\boldsymbol{AR_{zenith+24h}} \simeq \boldsymbol{AR_{zenith}} + \textbf{3m 56s}$$

cioè aumentata di circa 3m 56s rispetto al giorno precedente

8. Come variano le coordinate equatoriali e altazimutali di un satellite posto in un'orbita geostazionaria?

Soluzione.
I satelliti geostazionari si trovano su un'orbita equatoriale posta a circa 36000 km di altezza dal suolo.
Poiché il suo periodo di rivoluzione è pari a un giorno siderale, un satellite geostazionario appare immobile nel cielo per un osservatore sulla superficie della Terra, quindi per le sue coordinate altazimutali altezza $\boldsymbol{h_{sat}}$ e azimut $\boldsymbol{A_{sat}}$ e per la sua declinazione $\boldsymbol{\delta_{sat}}$ si ha:

$$\boldsymbol{h_{sat}} = costante \quad \boldsymbol{A_{sat}} = costante \quad \boldsymbol{\delta_{sat}} = costante$$

In funzione della sua posizione sull'orbita geostazionaria e della posizione dell'osservatore sulla superficie della Terra, un satellite geostazionario si trova a una distanza angolare $\boldsymbol{\lambda_{sat}}$ dal meridiano del luogo di osservazione.
L'ascensione retta $\boldsymbol{AR_{sat}}$ del satellite aumenta a causa della rotazione della Terra. In ogni istante è pari al tempo siderale locale (LST), corretto per la distanza angolare del satellite dal meridiano del luogo espressa in tempo:

$$AR_{sat} = \mathrm{LST} \pm \lambda_{sat}$$

La correzione è positiva se il satellite è visto a est del meridiano, negativa se è visto a ovest.
Inoltre, a causa della differenza tra giorno solare medio e giorno siderale, dopo 24h di tempo solare medio l'ascensione retta del satellite sarà aumentata di circa 3m e 56s rispetto al giorno precedente.

$$\boldsymbol{AR_{sat+24h} \simeq AR_{sat} + \mathbf{3m\ 56s}}$$

Nota.
Poiché la loro distanza dalla superficie è dello stesso ordine di grandezza del raggio della Terra, i satelliti geostazionari sono visibili solo dalle regioni a latitudine maggiore di circa 81° e minore di circa -81°.

9. Il 21 agosto 2017 alle 13:30 di ora locale in una città posta sul meridiano centrale del fuso orario $\mathrm{UT} - 5$ è stata osservata un'eclisse totale di Sole. Stimare la fase che aveva la Luna osservata dalla stessa località il 26 agosto 2018 alle UT = 00:00. Per il periodo sinodico della Luna si assuma $P_{sin} = 29.53$ giorni.

Soluzione
Poiché è stata osservata un'eclisse totale di Sole, nella data e nell'ora indicata la Luna era nuova. Noto il tempo locale **LT** dell'eclisse e il fuso orario del luogo di osservazione, possiamo calcolare il Tempo Universale $\boldsymbol{UT_E}$ al momento dell'eclisse, che, essendo la località posta sul meridiano centrale e a ovest di Greenwich, vale semplicemente:

$$\mathrm{UT_E} = \mathrm{LT} + 5 = 13{:}30 + 5 = 18{:}30$$

Il numero di giorni $\mathbf{\Delta T}$ trascorsi tra le 18:30 UT del 21 agosto 2017 e le 00:00 UT del 26 agosto 2018 è:

$$\Delta T = 1\ anno + 4\ giorni + 5.5\ h = 369.23\ giorni$$

Questo tempo corrisponde a un numero $\mathbf{N_L}$ di lunazioni:

$$\mathrm{N_L} = \frac{\Delta \mathrm{T}}{\mathrm{P_{sin}}} \simeq \frac{369.23\ \text{giorni}}{29.53\ \text{giorni}} \simeq 12.50$$

Poiché sono trascorsi 12 periodi sinodici e mezzo, vuol dire che la Luna era piena.

10. Il tempo siderale a Greenwich il 18 febbraio 2003 alle 00h:00m di Tempo Universale era di 9h 50m 12s. A che Tempo Universale è passata quel giorno al meridiano di Greenwich in direzione sud una stella circumpolare con ascensione retta di 22 h? Sapendo che la magnitudine apparente della stella era 1.5, dite se poteva essere osservata a occhio nudo all'istante del passaggio al meridiano.

Soluzione.

Ogni istante passano al meridiano in direzione sud le stelle la cui ascensione retta $\boldsymbol{\alpha}$ è pari al tempo siderale. Quindi quando la stella è passata al meridiano il tempo siderale locale **t** era:

$$t = \alpha = 22h$$

In quel momento il tempo siderale $\boldsymbol{\Delta t}$ trascorso dalle ore 00h:00m di Tempo Universale (**UT**) era:

$$\Delta t = 22h - 9h\,50m\,12s = 12h\,09m\,48s$$

Per trasformare questo intervallo di tempo siderale Δt in intervallo di tempo universale **ΔUT**, ricordiamo che 24h di tempo siderale corrispondono a 23h 56m 4.1s di tempo universale, quindi la costante di proporzionalità **K** tra tempo siderale e tempo universale è:

$$\mathrm{K} = \frac{23\mathrm{h}\ 56\mathrm{m}\ 4.1\ \mathrm{s}}{24\mathrm{h}} \simeq \frac{23.9345}{24} \simeq 0.99727$$

Detta UT l'ora in cui la stella transita al meridiano avremo:

$$\mathrm{UT} = 00\mathrm{h}00\mathrm{m} + \Delta\mathrm{UT} = \Delta\mathrm{t} \cdot \mathrm{K}$$

$$\mathrm{UT} \simeq 12\mathrm{h}\ 09\mathrm{m}\ 48\mathrm{m} \cdot 0.99727 \simeq 12.1633\ \mathrm{h} \cdot 0.99727 \simeq 12.1301\ \mathrm{h} \simeq 12\mathrm{h}\ 7\mathrm{m}\ 48\mathrm{s}$$

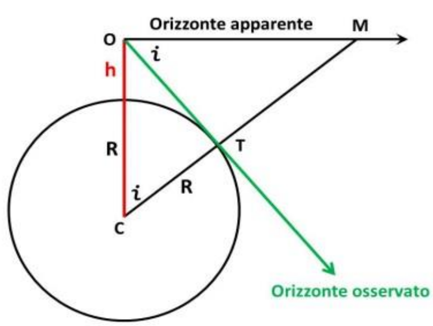
Poiché la stella è circumpolare a Greenwich e molto luminosa, sarebbe stata sicuramente visibile con il Sole a meno di circa 12 gradi sotto l'orizzonte (inizio del crepuscolo astronomico). Poiché il tempo solare medio è definito come l'angolo orario del Sole medio aumentato di 12h, trascurando l'equazione del tempo (il cui valore massimo è di circa 16 minuti), possiamo stimare che l'angolo orario del Sole vero $\boldsymbol{h}_{\odot}$ era:

$$\boldsymbol{h}_{\odot} \simeq \mathrm{UT} - 12\mathrm{h} \simeq 0\mathrm{h}$$

Quindi il Sole era in prossimità del passaggio al meridiano in direzione sud, ovvero ci si trovava in pieno giorno e quindi la stella, anche se molto luminosa, non poteva essere osservata a occhio nudo.

11. A partire da quale altezza sulla superficie della Terra la depressione dell'orizzonte causata dall'altezza supera quella dovuta alla rifrazione atmosferica? Quanto vale, in prima approssimazione, la massima depressione dell'orizzonte osservabile sulla Terra?

Soluzione



Con riferimento alla figura a sinistra, assumendo per la rifrazione all'orizzonte $\boldsymbol{d}$ un valore medio di 35', detto **R** il raggio della Terra, e $\boldsymbol{h}$ l'altezza sulla superficie si ha:

$$\cos i = \frac{R}{R+h} \qquad h = \frac{R}{\cos i} - R$$

Il valore **h** cercato è quello per cui:

$$h > \frac{R}{\cos 35'} - R \simeq \frac{6378 \cdot 10^3\ m}{\cos 0°58} - 6378 \cdot 10^3\ m \simeq 327\ m$$

La massima elevazione della Terra è il monte Everest, la cui altezza $\boldsymbol{H}$ è di circa 8848 m e dalla cui vetta

$$\mathrm{i} \simeq \arccos\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}+H} \simeq \arccos\frac{6378 \cdot 10^3\ \mathrm{m}}{6378 \cdot 10^3\ \mathrm{m} + 8848\ \mathrm{m}} \simeq 3°\ 1'$$

e quindi detto **D** il valore della depressione dell'orizzonte dalla cima del monte Everest sarà:

$$D \approx d + i \approx 3°\ 36'$$

12. Si dice che il Sole è allo zenith se copre lo zenith con almeno una parte del suo disco. In che periodo dell'anno è possibile osservare un tale evento in una località posta all'equatore e in una posta sul Tropico del Cancro? Di quanto può variare la declinazione del Sole nei due casi?

Soluzione

Le dimensioni apparenti medie del Sole sono $\alpha_{\odot} \simeq 32'$. Detta $\boldsymbol{\delta_{\odot}}$ la declinazione del centro del Sole, la relazione che fornisce l'altezza massima del bordo superiore del Sole $\boldsymbol{h_{max\odot}}$ in una località a latitudine φ è:

$$h_{max\odot} = 90° - \varphi + \delta_{\odot} + \frac{\alpha_{\odot}}{2}$$

All'equatore il Sole comincia a passare allo zenith quando la declinazione del centro $\boldsymbol{\delta_{\odot-1}}$ vale:

$$\delta_{\odot-1} = h_{max\odot} - 90° + \varphi - \frac{\alpha_{\odot}}{2} \simeq 90° - 90° + 0° - 16' \simeq -16'$$

e, se la declinazione aumenta, non passa più allo zenith quando la declinazione del centro $\boldsymbol{\delta_{\odot-2}}$ vale:

$$\delta_{\odot-2} = h_{max\odot} - 90° + \varphi + \frac{\alpha_{\odot}}{2} \simeq 90° - 90° + 0° + 16' \simeq 16'$$

Quindi all'equatore il Sole passa allo zenith in prossimità degli equinozi, per una variazione $\Delta\boldsymbol{\delta_{Sole}}$ totale in declinazione di:

$$\Delta\delta_{Sole} \simeq 64'$$

(32' quando la sua declinazione passa da negativa a positiva e altri 32' quando la sua declinazione passa da positiva a negativa).

Al Tropico del Cancro il Sole comincia a passare allo zenith quando la declinazione del centro $\boldsymbol{\delta_{\odot-3}}$ vale:

$$\delta_{\odot-3} = h_{max\odot} - 90° + \varphi - \frac{\alpha_{\odot}}{2} \simeq 90° - 90° + 23°\,26' - 16' \simeq 23°\,10'$$

Successivamente la declinazione aumenta fino a raggiungere il massimo a $\delta_{\odot}$ =+23° 26', per poi diminuire e il Sole non passa più allo zenith quando la declinazione del centro $\boldsymbol{\delta_{\odot-4}}$ vale:

$$\delta_{\odot-4} = h_{max\odot} - 90° + \varphi - \frac{\alpha_{\odot}}{2} \simeq 90° - 90° + 23°\,26' - 16' \simeq 23°\,10'$$

Quindi al Tropico del Cancro il Sole passa allo zenith in prossimità del solstizio d'estate, per una variazione totale di declinazione:

$$\Delta\delta_{Sole} = 32'$$

(16' quando la sua declinazione è in aumento fino al massimo possibile di 23° 26' e altri 16' quando la sua declinazione è in diminuzione).

13. Il 19 settembre 2019, data in cui l'equazione del tempo (definita come tempo solare vero meno tempo solare medio) valeva +6 minuti, un osservatore in Italia ha notato che un orologio solare, perfettamente funzionante, segnava le 10:00, mentre il suo orologio da polso, perfettamente sincronizzato con l'ora civile, segnava le 11:25. Sapendo che il meridiano centrale del fuso orario dell'Italia ha longitudine 15° E, dire, giustificando la risposta con gli opportuni calcoli, in quale tra le seguenti città italiane si trovava l'osservatore: Lecce (λ = 18° 11' E), Catania (λ = 15° 3' E) o Aosta (λ = 7° 15' E).

Soluzione

Detti $\boldsymbol{T_V}$ il tempo solare vero (che è il tempo misurato dall'orologio solare), $\boldsymbol{T_M}$ il tempo solare medio ed **ET** l'equazione del tempo, vale la relazione:

$$T_V = T_M + ET$$

Il Tempo Civile $\boldsymbol{T_C}$ segnato dall'orologio dell'osservatore è legato al tempo solare medio dalla relazione:

$$T_M = T_C + \lambda$$

dove la longitudine λ dell'osservatore ha segno positivo se l'osservatore è a est del meridiano centrale e segno negativo se l'osservatore è a ovest del meridiano centrale.
Inoltre nella data indicata era in vigore l'ora legale ($\Delta T = +1h$), che porta un'ora avanti l'ora civile rispetto a quella solare. Quindi la relazione che lega il tempo solare vero al tempo civile era:

$$T_V = T_C + \lambda + ET - \Delta T$$

da cui si ricava:

$$\lambda = T_V - T_C - ET + \Delta T = 10:00 - 11:25 - 00:06 + 01:00 = -31m = -7^\circ 45'$$

Poiché λ ha segno negativo, la località da cui è stata fatta l'osservazione si trova 7° 45' più a ovest del meridiano centrale e ha quindi longitudine:

$$\lambda_{osservatore} = \lambda_{centrale} - 7^\circ 45' = 15^\circ - 7^\circ 45' = 7^\circ 15'$$

La città è quindi Aosta.

14. Attualmente la stella più vicina al polo nord celeste è α UMi, che viene chiamata Stella Polare. La stella più vicina al polo nord celeste nel 2800 A.C. era Thuban (= α Dra) con declinazione $\delta\, Thuban_{2800AC} = +89^\circ\, 48'$. Nell'anno 2000 le declinazioni delle due stelle erano $\delta\, Polare_{2000} = +89^\circ\, 16'$ e $\delta\, Thuban_{2000} = +64^\circ\, 22'$. Calcolare l'altezza massima sull'orizzonte di α UMi nel 2800 A.C. per un osservatore posto a Cremona (φ = +45° 8'). Trascurate gli effetti dovuti al moto proprio delle due stelle.

Soluzione.
L'altezza massima sull'orizzonte $\boldsymbol{h_{max}}$ di una stella con declinazione $\boldsymbol{\delta}$ si ha in corrispondenza del suo passaggio al meridiano in direzione sud e da una località con declinazione $\boldsymbol{\varphi}$ vale:

$$h_{max} = 90^\circ - \varphi + \delta \qquad \text{se } \varphi > \delta$$

$$h_{max} = 90^\circ + \varphi - \delta \qquad \text{se } \varphi < \delta$$

Nel primo caso la stella culmina più a sud dello zenit, nel secondo più a nord e l'altezza sull'orizzonte viene contata dal punto cardinale nord.
Trascurando gli effetti del moto proprio, la distanza in declinazione $\boldsymbol{\Delta\delta}$ tra le due stelle rimane invariata nel tempo ed era quindi la stessa nel 2000 e nel 2800 A.C.:

$$\Delta\delta = \delta Polare_{2000} - \delta Thuban_{2000} = 89^\circ\, 16' - 64^\circ 22' = 24^\circ\, 54'$$

$$\Delta\delta = \delta Thuban_{2800AC} - \delta Polare_{2800AC} = 24^\circ\, 54'$$

Poiché nel 2800 A.C. Thuban si trovava a 12' dal polo celeste, la declinazione della Polare era:

$$\delta Polare_{2800AC} = 90^\circ - \Delta\delta - 12' = 90^\circ - 24^\circ\, 54' - 12' = 64^\circ\, 54'$$

Poiché $\delta Polare_{2800AC} > \varphi$, a Cremona la polare culminava oltre lo zenith e quindi la sua altezza massima sull'orizzonte $\boldsymbol{hP_{max\_2800AC}}$ valeva:

$$hP_{max\_2800AC} = 90^\circ + \varphi - \delta Polare_{2800AC} = 90^\circ + 45^\circ\, 8' - 64^\circ\, 54' = 70^\circ\, 14'$$

15. Considerate due osservatori posti all'altezza del suolo uno al Polo Nord e l'altro all'Equatore e calcolate, trascurando l'assorbimento della luce da parte dell'atmosfera, il numero di stelle visibili a occhio nudo che diventano circumpolari per i due osservatori a causa della rifrazione (Area esterna di un cilindro = 2 π R h; Area angolare della sfera celeste, in assenza di rifrazione, A = 41253 gradi quadrati).

Soluzione.
Assumiamo che le stelle visibili a occhio nudo, circa 6000, siano distribuite in modo uniforme sulla volta celeste. Al Polo Nord la rifrazione renderà visibile una "cintura" con 35' di altezza lungo tutto l'orizzonte. Le stelle contenute in detta cintura saranno circumpolari e il loro numero rispetto al totale delle stelle

visibili a occhio nudo sarà pari al rapporto **K** tra l'area della cintura e l'area di tutta la sfera celeste. Poiché l'angolo di rifrazione è molto piccolo, possiamo approssimare la cintura con un cilindro avente lo stesso raggio della sfera celeste e la cui altezza **h** sottende un angolo di 35'. Si avrà quindi:

$$h = R \tan 35' \qquad\qquad K = \frac{2\,\pi\,R\,h}{4\,\pi\,R^2} \simeq \frac{2\,\pi\,R\ \cdot R \tan 35'}{4\,\pi\,R^2} \simeq \frac{1}{2}\tan 35' \ \simeq 0.005$$

Quindi il numero di stelle visibili a occhio nudo che diventeranno circumpolari al Polo Nord $\boldsymbol{N_P}$ sarà:

$$N_P = 6000\ \cdot K\ \simeq 30$$

Nota.
In realtà il numero di stelle realmente visibili a occhio nudo sarà molto minore, in pratica zero, a causa dell'assorbimento atmosferico che in prossimità dell'orizzonte supera le 5 magnitudini.

All'Equatore la rifrazione renderà circumpolari le stelle contenute nelle due piccole aree circolari con raggio ***r*** = 35' centrate sui due poli celesti. La somma ***a*** di queste due piccole aree vale:

$$a = 2\,\pi\,r^2\ \simeq 2 \text{ gradi quadrati}$$

Il rapporto **A** tra quest'area e quella totale della sfera celeste e il numero di stelle $\boldsymbol{N_E}$ valgono:

$$A \simeq \frac{2°}{41253°} \simeq 5\ \cdot\ 10^{-5} \qquad\qquad N_E =\ 6000\ \cdot A\ \simeq 0.3\ \simeq 0$$

Quindi all'Equatore nessuna stella visibile a occhio nudo diventa circumpolare a causa della rifrazione.