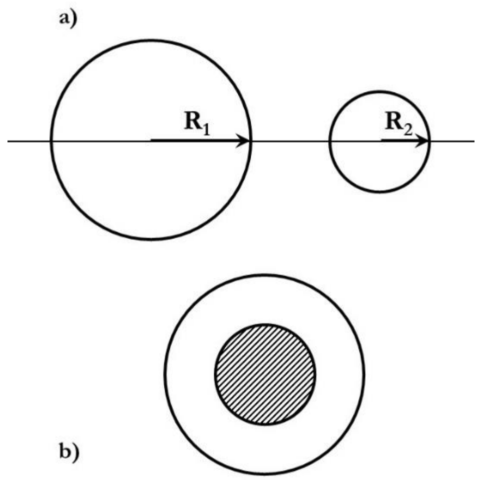
Olimpiadi Italiane di Astronomia 2022
Corso di preparazione alla Finale Nazionale
Categoria Senior - Lezione 2

1. Un sistema binario a eclisse è formato da due stelle con la stessa temperatura della fotosfera. Il raggio della prima stella è pari a quello del Sole, il raggio della seconda stella è pari a metà di quello del Sole. Il piano orbitale del sistema è parallelo alla direzione di osservazione dalla Terra. Di quanto varia, al massimo, la magnitudine della binaria a eclisse quando la seconda stella transita davanti alla prima?

Soluzione



Detta **T** la temperatura della fotosfera delle due stelle e $\boldsymbol{R_1}$ e $\boldsymbol{R_2}$ i rispettivi raggi (con $R_1 = 2\,R_2$), le luminosità $\boldsymbol{L_1}$ e $\boldsymbol{L_2}$ valgono:

$$L_1 = 4\,\pi\,{R_1}^2\,\sigma\,T^4 \qquad L_2 = 4\,\pi\,{R_2}^2\,\sigma\,T^4$$

La luminosità $\boldsymbol{L_{TOT}}$ del sistema fuori eclisse (configurazione **a** nella figura a sinistra) è massima e vale:

$$L_{TOT} = L_1 + L_2 = 4\,\pi\,({R_1}^2 + {R_2}^2)\,\sigma\,T^4$$

Per tutto il tempo dell'eclisse totale, in cui la seconda stella transitando risulta prospetticamente interamente "all'interno" della prima (configurazione **b** nella figura a sinistra), si avrà il minimo di luminosità del sistema $\boldsymbol{L_{Eclisse}}$ che vale:

$$L_{Eclisse} = 4\,\pi\,{R_1}^2\,\sigma\,T^4$$

Dette $\boldsymbol{m_{TOT}}$ la magnitudine del sistema nella configurazione **a** e $\boldsymbol{m_{Eclisse}}$ la magnitudine del sistema nella configurazione **b**, e ricordando che $R_1 = 2\,R_2$, la variazione di magnitudine $\boldsymbol{\Delta m}$ durante l'eclisse totale è data da:

$$\Delta m = m_{Eclisse} - m_{TOT} = -2.5\log\frac{L_{Eclisse}}{L_{TOT}} = -2.5\log\frac{{R_1}^2}{{R_1}^2 + {R_2}^2} = -2.5\log\frac{4}{5} \simeq 0.24$$

Nota: poiché la temperatura della fotosfera delle due stelle è uguale, la stessa variazione di magnitudine si osserverà quanto la seconda stella transita dietro la prima.

2. Con una magnitudine apparente di 1.25, Deneb (= **α** Cyg) è la 19.ma stella più luminosa del cielo. La sua distanza non è ben nota, ma si stima essere di circa $2.60 \cdot 10^3$ anni luce; la temperatura della sua fotosfera è di 8500 K. Calcolate:

1. la magnitudine assoluta di Deneb;
2. la sua magnitudine apparente se si trovasse a 4.36 anni luce (cioè alla distanza di **α** Cen);
3. il suo diametro apparente se si trovasse a 4.36 anni luce;
4. il conseguente aspetto nel cielo notturno per osservazioni a occhio nudo

Soluzione

1. La distanza $\boldsymbol{D}$ di Deneb vale:

$$\mathrm{D} = \frac{2.60 \cdot 10^3 \text{ anni luce}}{3.2616 \text{ anni luce/parsec}} \simeq 797 \text{ parsec}$$

Dette $\boldsymbol{M_D}$ e $\boldsymbol{m_D}$ le magnitudini assoluta e apparente si ha:

$$\mathrm{M_D} = \mathrm{m_D} + 5 - 5\log \mathrm{D} \simeq 1.25 + 5 - 5\log 797 \simeq -8.26$$

2. Se per la distanza $\boldsymbol{d}$ consideriamo un valore:

$$\mathrm{d} = \frac{4.36 \text{ anni luce}}{3.2616 \text{ anni luce/parsec}} \simeq 1.34 \text{ parsec}$$

per la magnitudine apparente otteniamo:

$$\mathrm{m_D} = \mathrm{M_D} - 5 + 5\log \mathrm{d} \simeq -8.26 - 5 + 5\log 1.34 \simeq -12.62$$

un valore paragonabile alla magnitudine media della Luna piena.

3. Detti $\boldsymbol{R_\odot}$, $\boldsymbol{T_\odot}$, $\boldsymbol{R_D}$ e $\boldsymbol{T_D}$ i raggi e le temperature del Sole e di Deneb e $\boldsymbol{M_\odot}$ la magnitudine assoluta del Sole vale la relazione:

$$\mathrm{M_D} - \mathrm{M_\odot} = -2.5\log\left[\left(\frac{\mathrm{R_D}}{\mathrm{R_\odot}}\right)^2\left(\frac{\mathrm{T_D}}{\mathrm{T_\odot}}\right)^4\right] = -5\log\left[\frac{\mathrm{R_D}}{\mathrm{R_\odot}}\left(\frac{\mathrm{T_D}}{\mathrm{T_\odot}}\right)^2\right]$$

da cui possiamo ricavare il raggio di Deneb:

$$\log\frac{\mathrm{R_D}}{\mathrm{R_\odot}} = \frac{\mathrm{M_\odot} - \mathrm{M_D}}{5} - 2\log\frac{\mathrm{T_D}}{\mathrm{T_\odot}}$$

$$\mathrm{R_D} = \mathrm{R_\odot} \cdot 10^{\left(\frac{\mathrm{M_\odot} - \mathrm{M_D}}{5} - 2\log\frac{\mathrm{T_D}}{\mathrm{T_\odot}}\right)} \simeq \mathrm{R_\odot} \cdot 10^{\left(\frac{13.09}{5} - 2\log 1.471\right)} \simeq 192\,\mathrm{R_\odot} \simeq 134 \cdot 10^6\, km$$

Quindi il raggio di Deneb è quasi il 90% della distanza Terra-Sole e posta alla distanza di **α** Cen il suo diametro apparente $\boldsymbol{D_{Deneb}}$ varrebbe:

$$\mathrm{D_{Deneb}} = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{\mathrm{R_D}}{\mathrm{d}}\right) \simeq 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{134 \cdot 10^6 \text{ km}}{4.36 \text{ anni luce}}\right) \simeq 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{134 \cdot 10^6 \text{ km}}{4.12 \cdot 10^{13}\, km}\right) \simeq 1''.3$$

4. Di notte, a occhio nudo, osserveremmo quindi un oggetto con luminosità pari a quella della Luna piena, ma di aspetto puntiforme.

3. Una stella dista dal Sole 326.2 anni luce, ha magnitudine apparente 3.25 e temperatura della fotosfera di 3000 K. Si determini la magnitudine assoluta della stella e il suo raggio in unità di raggi solari e in km.

Soluzione

Detta **d** la distanza in anni luce, la distanza **D** della stella in parsec vale:

$$\mathrm{D} \simeq \frac{\mathrm{d}}{3.2616\,\frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq \frac{326.2\ anni\ luce}{3.2616\,\frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq 100.0 \text{ pc}$$

Detta $\boldsymbol{m_s}$ la magnitudine apparente, la magnitudine assoluta $\boldsymbol{M_s}$ della stella vale:

$$M_s = m_s + 5 - 5\log d \simeq 3.25 + 5 - 5\log 100.0 \simeq -1.75$$

Dette $\boldsymbol{L_s}$ la luminosità della stella e $\boldsymbol{L_\odot}$ e $\mathbf{M_\odot}$ la luminosità e la magnitudine assoluta del Sole vale la relazione:

$$\mathrm{M_\odot} - \mathrm{M_S} = -2.5\log\left(\frac{\mathrm{L_\odot}}{\mathrm{L_S}}\right)$$

da cui ricaviamo:

$$\log\left(\frac{\mathrm{L_\odot}}{\mathrm{L_S}}\right) \simeq \frac{\mathrm{M_\odot} - \mathrm{M_S}}{-2.5} \simeq \frac{4.83+1.75}{-2.5} \simeq -2.63$$

$$\frac{L_\odot}{L_S} \simeq 10^{-2.63} \qquad L_S \simeq \frac{L_\odot}{10^{-2.63}} \simeq 427 L_\odot$$

Detti $\mathbf{R_S}$ e $\mathbf{T_S}$ e $\mathbf{R_\odot}$ e $\mathbf{T_\odot}$ i raggi e le temperature della stella e del Sole, dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$4\,\pi\,\mathrm{R_S}^2\,\sigma\,\mathrm{T_S}^4 = 427 \cdot 4\,\pi\,\mathrm{R_\odot}^2\,\sigma\,\mathrm{T_\odot}^4$$

e quindi:

$$R_S = R_\odot \sqrt{427 \left(\frac{T_\odot}{T_S}\right)^4} \simeq R_\odot \sqrt{427 \left(\frac{5778}{3000}\right)^4} \simeq 76.7\ R_\odot \simeq 53.3 \cdot 10^6\ \text{km}$$

La stella è una "gigante rossa"; il suo raggio è quasi uguale al semiasse maggiore dell'orbita di Mercurio.

4. La galassia M32, un satellite della galassia di Andromeda, è formata da circa $250 \cdot 10^6$ stelle e ha magnitudine integrata pari a 9.0. Nell'ipotesi che le stelle di M32 siano tutte uguali, calcolate il valore della loro magnitudine apparente.

Soluzione

Detto $\boldsymbol{F_S}$ il flusso emesso da una stella della galassia e $\boldsymbol{N}$ il numero di stelle, la differenza tra la magnitudine apparente integrata della galassia $\boldsymbol{m_{TOT}}$ e quella $\boldsymbol{m}$ di una stella vale:

$$m_{TOT} - m = -2.5 \log \frac{F_{TOT}}{F_S} = -2.5 \log \frac{N \cdot F_S}{F_S}$$

e quindi:

$$m = m_{TOT} + 2.5 \log \frac{N \cdot F_S}{F_S} = 9.0 + 2.5 \log\ (250 \cdot 10^6) \simeq 30$$

5. Arturo $(= \alpha\ \text{Boo})$ è la stella più luminosa dell'emisfero boreale del cielo. Il flusso proveniente da Arturo che incide alla sommità dell'atmosfera terrestre vale: $4.51 \cdot 10^{-8}\ W/m^2$. Sapendo che Arturo dista dal Sole 36.7 anni luce e che il suo raggio è 25.5 volte quello del Sole, calcolare la temperatura della sua fotosfera.

Soluzione

Dette $\mathbf{T}$ la temperatura della fotosfera di Arturo, $\boldsymbol{R_A}$ il suo raggio e $\boldsymbol{d_A}$ la sua distanza, la quantità di energia totale emessa al secondo (cioè la luminosità) $\boldsymbol{L_A}$ è legata al flusso $\boldsymbol{f}$ incidente alla sommità dell'atmosfera della Terra dalla relazione:

$$f = \frac{L_A}{4\pi d_A^2} = \frac{4\pi R_A^2 \sigma T^4}{4\pi d_A^2}$$

Detto $\boldsymbol{R_\odot}$ il raggio del Sole, si ha per $\boldsymbol{d_A}$ e $\boldsymbol{R_A}$:

$$d_A \simeq 36.7\ \text{anni luce} \cdot 9460.7 \cdot 10^{12}\ \frac{m}{anno\ luce} \simeq 3.47 \cdot 10^{17}\ \text{m}$$

$$R_A \simeq 25.5 \cdot R_\odot \simeq 25.5 \cdot 6.955 \cdot 10^8\ \text{m} \simeq 17.7 \cdot 10^9\ \text{m}$$

e infine:

$$T = \sqrt[4]{\frac{f\, d_A^2}{R_A^2\, \sigma}} \simeq \sqrt[4]{\frac{4.51 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2} \cdot 1.20 \cdot 10^{35}\ m^2}{3.13 \cdot 10^{20}\ m^2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2\ K^4}}} \simeq \sqrt[4]{3.05 \cdot 10^{14}} \simeq 4180\ \text{K}$$

6. Stimate la magnitudine apparente media della Luna Piena. Trascurate gli effetti dell'atmosfera della Terra.

Soluzione.

La luminosità della Luna è dovuta alla riflessione della luce che riceve dal Sole. Detti $\boldsymbol{R_\odot}$ e $\boldsymbol{T_\odot}$ il raggio e la temperatura della fotosfera del Sole, la quantità totale di energia $\boldsymbol{L_\odot}$ emessa dal Sole ogni secondo è:

$$L_\odot = 4\pi\, {R_\odot}^2\, \sigma\, {T_\odot}^4$$

$$L_\odot \simeq 4\pi \cdot 4.837 \cdot 10^{17}\ m^2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2\ K^4} \cdot 1.115\ 10^{15}\ K^4 \simeq 3.843 \cdot 10^{26}\ \text{W}$$

Dette $\boldsymbol{D_T}$ la distanza media Terra-Sole, $\boldsymbol{D_{TL}}$ la distanza media Terra-Luna e $\boldsymbol{D_{L\odot}}$ (=$\boldsymbol{D_T}$+$\boldsymbol{D_{TL}}$) la distanza media Luna-Sole, il flusso solare, ovvero la quantità di energia al secondo che arriva per unità di superficie sulla Terra $\boldsymbol{F_{\odot T}}$ (costante solare) e sulla Luna $\boldsymbol{F_{\odot L}}$ è:

$$F_{\odot T} = \frac{L_\odot}{4\,\pi\,{D_T}^2} \simeq \frac{3.843 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W}}{4\,\pi \cdot 2.238 \cdot 10^{22}\ m^2} \simeq 1366\ \frac{W}{m^2}$$

$$F_{\odot L} = \frac{L_\odot}{4\,\pi\,{D_{L\odot}}^2} \simeq \frac{3.843 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W}}{4\,\pi \cdot 2.250 \cdot 10^{22}\ m^2} \simeq 1359\ \frac{W}{m^2}$$

Detto $\boldsymbol{R_L}$ il raggio della Luna, la superficie proiettata $\boldsymbol{S_L}$ della Luna che riceve la radiazione solare vale:

$$S_L = \pi\,{R_L}^2 \simeq 9.490 \cdot 10^{12}\ m^2$$

Detto $\boldsymbol{A_L}$ il valore medio dell'albedo lunare, la quantità $\boldsymbol{E_L}$ di energia riflessa ogni secondo dalla Luna vale:

$$E_L = F_{\odot L}\ S_L\ A_L \simeq 1359\ \frac{W}{m^2} \cdot 9.490 \cdot 10^{12}\ m^2 \cdot 0.136 \simeq 1.754 \cdot 10^{15}\ W$$

La quantità di energia $\boldsymbol{F_{Moon}}$ ricevuta sulla Terra dalla Luna al secondo per unità di superficie è:

$$F_{Moon} = \frac{E_L}{2\,\pi\,{D_{TL}}^2} \simeq \frac{1.754 \cdot 10^{15}\ \mathrm{W}}{2\,\pi \cdot 1.478 \cdot 10^{17}\ m^2} \simeq 1.889 \cdot 10^{-3}\ \frac{W}{m^2}$$

Considerando la differenza tra la magnitudine apparente tra il Sole $\boldsymbol{m_\odot}$ e quella della Luna $\boldsymbol{m_L}$ si ha infine:

$$\mathrm{m_L} = \mathrm{m_\odot} + 2.5\log\frac{\mathrm{F_{\odot T}}}{\mathrm{F_{Moon}}} \simeq -26.74 + 2.5\log\frac{1366\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}}{1.889 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}} \simeq -12.09$$

Nota.
Il valore ottenuto con le semplici approssimazioni usate per la quantità di energia riflessa dalla Luna, è in ragionevole accordo con quello normalmente indicato come magnitudine media della Luna piena: $\mathrm{m_L} = -12.74$.

7. Le Supernovae di Tipo Ia raggiungono, al massimo di luminosità, la magnitudine assoluta -21.0. Una supernova di Tipo Ia è esplosa nella galassia M90 dell'Ammasso della Vergine a $60.0 \cdot 10^6$ anni luce dal Sole. Nel cielo M90 appare come un'ellisse con dimensioni angolari $9'.50 \cdot 4'.50$ e la sua magnitudine apparente superficiale media è di $22.0\ mag/arcsec^2$. Si calcoli: il modulo di distanza di M90, se la supernova, al massimo di luminosità, è più brillante dell'intera galassia che la ospita e la magnitudine apparente complessiva del sistema galassia + supernova al massimo di luminosità.

Soluzione
La distanza $\boldsymbol{d}$ di M90 in parsec vale:

$$d = \frac{60.0 \cdot 10^6\ anni\ luce}{3.2616\ \frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq 18.4 \cdot 10^6\ pc$$

Quindi la magnitudine apparente $\boldsymbol{m_{SN}}$ della supernova al massimo di luminosità è:

$$\mathrm{m_{SN}} = \mathrm{M_{SN}} - 5 + 5\log \mathrm{d}\ (\mathrm{pc}) \simeq -21.0 - 5 + 5\log\ (18.4 \cdot 10^6) \simeq 10.3$$

ed il modulo di distanza (definito come la differenza tra la magnitudine apparente e quella assoluta) vale:

$$\mathrm{m_{SN}} - \mathrm{M_{SN}} \simeq 31.3$$

L'area **A** della galassia, in $arcsec^2$ vale:

$$A = \pi\, a\, b = \pi\, \frac{9'.50 \cdot 60}{2} \cdot \frac{4'.50 \cdot 60}{2} \simeq 121 \cdot 10^3 \text{ arcsec}^2$$

Detta $\boldsymbol{m_{sup}}$ la magnitudine media superficiale di M90, la sua magnitudine apparente integrata $\boldsymbol{m_{GAL}}$ è:

$$m_{GAL} = m_{sup} - 2.5 \log A \simeq 22.0 - 2.5 \log\ (121 \cdot 10^3) \simeq 9.3$$

Quindi poiché

$$m_{GAL} < m_{SN}$$

la supernova non diventa, neppure al massimo di luminosità, più brillante dell'intera galassia.
La magnitudine complessiva $\mathbf{m_{TOT}}$ galassia + supernova al massimo si può ottenere con la relazione:

$$m_{TOT} = -2.5 \log(10^{-0.4\, m_{SN}} + 10^{-0.4\, m_{GAL}}) \simeq 8.9$$

8. Volete costruire un telescopio, dotato di un sistema di ottica adattiva per osservazioni a 5500 Å, per fotografare sulla superficie della Luna i resti dei moduli di allunaggio (LEM) utilizzati dagli astronauti delle missioni Apollo. La parte inferiore dei LEM aveva un diametro di circa 4.5 m. Che diametro dovrà avere il vostro telescopio? Sapete suggerire una soluzione più "economica" per realizzare queste foto?

Soluzione
L'ottica adattiva permette di annullare quasi completamente gli effetti della turbolenza dell'atmosfera terrestre, permettendo quindi di sfruttare il potere risolutivo teorico di un telescopio. Nel nostro caso, detto $\boldsymbol{d}$ il diametro dei LEM e $\boldsymbol{a_L}$ il semiasse maggiore dell'orbita della Luna, il potere risolutivo $\boldsymbol{\alpha}$ dovrà essere pari a:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{d}{a_L}\right) = \arctan\left(\frac{4.5\, m}{384.4 \cdot 10^6\, m}\right) \simeq 6°.7 \cdot 10^{-7} \simeq 2''.4 \cdot 10^{-3}$$

La relazione che fornisce il potere risolutivo $\boldsymbol{\alpha}$ in secondi d'arco di un telescopio con diametro (apertura) **D** che osserva alla lunghezza d'onda $\boldsymbol{\lambda}$ è:

$$\alpha = 1.22\, \frac{\lambda}{D}\, 206265''$$

E quindi ponendo $\boldsymbol{\alpha} = 2''.4 \cdot 10^{-3}$ ricaviamo:

$$D = 1.22\, \frac{\lambda}{\alpha}\, 206265 \simeq \frac{1.22 \cdot 5500 \cdot 10^{-10} m \cdot 206265''}{2''.4 \cdot 10^{-3}} \simeq 58\, m$$

Si tratterebbe del più grande telescopio mai realizzato, assai più grande del telescopio ELT dell'ESO attualmente in fase di costruzione (https://elt.eso.org/) e il cui costo finale si stima dell'ordine di 1.3 miliardi di euro. Per fotografare i resti delle missioni Apollo è molto più economico inviare dei satelliti in orbita bassa attorno alla Luna, come il Lunar Reconnaissance Orbiter della NASA, il cui costo è stato circa un terzo rispetto a quello di ELT, che ha fotografato con grande dettaglio i siti degli allunaggi (con tanti saluti ai teorici del complotto….).

9. ζ Boötis è una binaria visuale, situata alla distanza di 180 anni luce dal Sistema Solare, composta da 2 stelle identiche. La magnitudine apparente totale della binaria è 3.79, la separazione angolare tra le due componenti viste dalla Terra è 1.2". Questo sistema è osservato alla lunghezza d'onda λ = 5500 Å.

1. Che diametro minimo deve avere un telescopio per riuscire a risolvere il sistema binario?
2. Se la lunghezza focale del telescopio è 1 m e il potere risolutivo dell'occhio umano è 2', calcolare il valore massimo e minimo della lunghezza focale degli oculari che permettono di distinguere le due componenti;
3. Quanto vale la magnitudine assoluta di ciascuna delle due stelle del sistema binario?

Soluzione.

1. Poiché la separazione angolare tra le due stelle è maggiore del valore medio del seeing (circa 1”) che si registra in buona parte delle località sulla superficie della Terra, possiamo affermare che le due stelle possono essere “risolte”. La risoluzione $\boldsymbol{\theta}$ in secondi d’arco di un telescopio di apertura **D** per osservazioni alla lunghezza d’onda **λ** vale:

$$\theta = 1.22\,\frac{\lambda}{D}\,\cdot 206265''$$

Il telescopio dovrà avere quindi un diametro minimo $\boldsymbol{D_{Min}}$ pari a:

$$D_{Min} = 1.22\,\frac{\lambda}{\theta}\,206265'' = \frac{1.22\,\cdot\,5500\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}\,\cdot\,206265''}{1.2''} \simeq 0.12\ \mathrm{m} = 12\ \mathrm{cm}$$

2. Il rapporto tra la focale $\boldsymbol{F}$ del telescopio e quella $\boldsymbol{f}$ dell’oculare utilizzato, fornisce l’ingrandimento **I**:

$$I = \frac{F}{f}$$

Il minimo ingrandimento $\boldsymbol{I_{min}}$ dell’immagine del sistema binario che permette al nostro occhio di risolvere le due componenti è dato dalla relazione:

$$I_{min} = \frac{\text{risoluzione occhio}}{\text{separazione angolare}} = \frac{2'}{1.2''} = \frac{120''}{1.2''} = 100$$

Per ottenere tale ingrandimento la focale massima $\boldsymbol{f_{max}}$ dell’oculare da utilizzare deve quindi essere pari a:

$$f_{max} = \frac{F}{I_{min}} = \frac{1000\ \mathrm{mm}}{100} = 10\ \mathrm{mm}$$

Con oculari di focale minore otteniamo ingrandimenti maggiori, ma occorre ricordare che nella pratica delle osservazioni visuali non è mai conveniente utilizzare un ingrandimento maggiore di un valore all’incirca pari all’apertura del telescopio espressa in mm, che nel caso in esame vale quindi circa 120. Detto quindi $\boldsymbol{I_{max}}$ il massimo ingrandimento utilizzabile, otteniamo il valore minimo $\boldsymbol{f_{min}}$ per la focale dell’oculare:

$$f_{min} \simeq \frac{F}{I_{max}} \simeq \frac{1000\ \mathrm{mm}}{120} \simeq 8.3\ \mathrm{mm}$$

3. Poiché le due componenti di ζ Boötis hanno magnitudini apparenti $\boldsymbol{m}$ identiche, dalla relazione che fornisce la magnitudine totale di un sistema, detta $\boldsymbol{m_{tot}}$ la magnitudine della binaria otteniamo:

$$m_{tot} = -2.5\cdot\log\,(10^{-0.4m} + 10^{-0.4m}) = -2.5\cdot\log\,(2\cdot 10^{-0.4m}) =$$

$$= -2.5\cdot\log\,2 - 2.5\cdot\log\,(10^{-0.4m})$$

$$m_{tot} + 2.5\cdot\log\,2 = m$$

$$m \simeq m_{tot} + 0.75 \simeq 3.79 + 0.75 \simeq 4.54$$

Data la magnitudine apparente di ciascuna delle due componenti, calcoliamo la loro magnitudine assoluta **M**, esprimendo la distanza **d** in parsec, dalla relazione:

$$M = m + 5 - 5\log d \simeq 4.54 + 5 - 5\log\left(\frac{180\ anni\ luce}{3.2616\ \frac{anni\ luce}{parsec}}\right) \simeq 0.83$$

10. Osservate Marte in "Grande Opposizione" con un telescopio riflettore f/8 con apertura 40.0 cm. Quanto valgono il diametro angolare apparente di Marte e le sue dimensioni lineari sul piano focale del telescopio?

Soluzione.

La caratteristica $\boldsymbol{f/n}$ di un telescopio indica che la focale $\boldsymbol{F}$ del telescopio è $\boldsymbol{n}$ volte maggiore dell'apertura $\boldsymbol{D}$, quindi per il telescopio utilizzato sarà:

$$\mathrm{F = D \cdot n = 40.0\ cm \cdot 8 = 320\ cm = 3.20\ m}$$

Una "Grande Opposizione" è un'opposizione in cui la Terra si trova in prossimità dell'afelio e contemporaneamente Marte si trova in prossimità del Perielio. Dette $\boldsymbol{D_{TA}}$ e $\boldsymbol{D_{MP}}$ le distanze dal Sole della Terra all'afelio e di Marte al perielio e $\boldsymbol{a_T}$, $\boldsymbol{e_T}$, $\boldsymbol{a_M}$ ed $\boldsymbol{e_M}$ i semiassi maggiori e le eccentricità delle orbite della Terra e di Marte, per la distanza $\boldsymbol{D_{TM-GO}}$ Terra-Marte in una Grande Opposizione otteniamo:

$$\mathrm{D_{TM-GO} = D_{MP} - D_{TA} = a_M\,(1 - e_M) - a_T\,(1 + e_T)}$$

$$\mathrm{D_{TM-GO} \simeq 227.9 \cdot 10^6\ km \cdot (1 - 0.09337) - 149.6 \cdot 10^6\ km \cdot (1 + 0.01673) \simeq 5.452 \cdot 10^7\ km}$$

A questa distanza, detto $\boldsymbol{R_M}$ il suo raggio, il diametro apparente di Marte $\boldsymbol{\alpha}$ sarà dato dalla relazione:

$$\alpha = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_{Marte}}}{\mathrm{D_{TM-GO}}}\right) \simeq 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{3397\ \mathrm{km}}{5.452 \cdot 10^7}\right) \simeq 7^\circ.140 \cdot 10^{-3} \simeq 25''.70$$

Le sue dimensioni lineari **d** sul piano focale del telescopio saranno:

$$\mathrm{d = F \cdot \tan\alpha \simeq 320\ cm \cdot \tan\ (7^\circ.140 \cdot 10^{-3}) \simeq 0.40\ mm}$$

Nota: la circostanza descritta nella soluzione richiede l'allineamento tra le linee degli apsidi dei due pianeti. Attualmente le linee degli apsidi di Marte e della Terra formano un angolo di circa 24° e quindi attualmente non si può avere una opposizione di Marte con la Terra all'afelio e Marte contemporaneamente al perielio. Tuttavia, poiché le linee degli apsidi precedono con periodi diversi, la situazione descritta nel problema potrà verificarsi in futuro.

11. Il Telescopio Spaziale Hubble ha uno specchio con diametro di 2.4 m e orbita attorno alla Terra a un'altezza sulla superficie di 539 km. Stimate le dimensioni minime di un corpo che HST è capace di distinguere sulla superficie della Terra osservando alla lunghezza d'onda di 5500 Å.

Soluzione

Detto $\boldsymbol{D_{HST}}$ il diametro del suo specchio, il potere risolutivo teorico $\boldsymbol{\alpha_{HST}}$ di HST in secondi d'arco alla lunghezza d'onda $\boldsymbol{\lambda}$ è dato dalla relazione:

$$\alpha_{\mathrm{HST}} = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{\mathrm{D_{HST}}} \cdot 206265'' \simeq 1.22 \cdot \frac{5500 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}}{2.4\ \mathrm{m}} \cdot 206265'' \simeq 0''.058$$

Questo potere risolutivo consentirebbe a HST di distinguere sulla superficie della Terra oggetti con dimensioni minime $\boldsymbol{d_t}$:

$$\mathrm{d_t = h_{HST} \cdot \tan\alpha_{HST}} = 539\ km \cdot \tan\left(\frac{0''.058}{3600}\right) \simeq 15\ \mathrm{cm}$$

Tuttavia, se puntato verso la superficie della Terra HST subirà gli effetti dell'atmosfera, proprio come se osservasse verso lo spazio dalla superfice. Quindi il suo potere risolutivo effettivo sarà limitato dagli effetti dell'atmosfera terrestre e sarà dell'ordine di 1", consentendogli quindi di distinguere oggetti con dimensioni minime $\mathbf{d_{eff}}$:

$$\mathrm{d_{eff} = h_{HST} \cdot \tan}\left(\frac{1''}{3600}\right) \simeq 2.6\ \mathrm{m}$$

12. È stato osservato il transito di un pianeta extrasolare in orbita attorno a una stella di tipo solare. La variazione massima di magnitudine è stata di 0.010.

1) Sapendo che la massa del pianeta è di $1.80 \cdot 10^{27}\ kg$, stimate il raggio del pianeta, la sua densità e deducete se è di tipo gassoso o roccioso.

2) Considerando che le migliori misure fotometriche da Terra hanno una precisione dell'ordine di 0.002 magnitudini, stimate le dimensioni del più piccolo pianeta extrasolare osservabile dalla Terra attorno a una stella di tipo solare.

Soluzione

1) Detto $\boldsymbol{R_p}$ il raggio di un pianeta che transita davanti a una stella di raggio $\mathbf{R_s}$, $\mathbf{L_s}$ la luminosità della stella e $\mathbf{L_{tr}}$ la luminosità del sistema stella-pianeta durante il transito, per la variazione massima di magnitudine $\boldsymbol{\Delta m}$ vale la relazione:

$$\Delta \mathrm{m} = -2.5 \log \frac{L_{tr}}{L_s} = -2.5 \log \frac{R_s^2 - R_p^2}{R_s^2} = -2.5 \log \left(1 - \frac{R_p^2}{R_s^2}\right)$$

$$\frac{R_p^2}{R_s^2} = 1 - 10^{-\frac{\Delta \mathrm{m}}{2.5}} \qquad R_P = R_S \cdot \sqrt{1 - 10^{-\frac{\Delta \mathrm{m}}{2.5}}}$$

Quindi nel caso in esame, poiché il raggio della stella è pari a quello $\boldsymbol{R_\odot}$ del Sole, avremo:

$$\mathrm{R_P} \simeq \mathrm{R_\odot} \cdot \sqrt{1 - 10^{-\frac{0.010}{2.5}}} \simeq 6.955 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \sqrt{0.0092} \cdot\simeq 6.7 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Si tratta quindi di un pianeta con dimensioni paragonabili a quelle di Giove.

Detta **M** la massa e **V** il volume del pianeta, la sua densità $\boldsymbol{\rho}$ è pari a:

$$\rho = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{V}} = \frac{3\ \mathrm{M}}{4\ \pi\ \mathrm{R_P}^3} \simeq \frac{3 \cdot 1.80 \cdot 10^{27}\ \mathrm{kg}}{4\ \pi \cdot 3.0 \cdot 10^{23}\ \mathrm{m}^3} \simeq 1.4 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \simeq 1.4\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

Poiché massa, raggio e densità sono molto simili a quelle di Giove ($\rho_{\mathrm{Giove}} \simeq 1.33\ g/cm^3$) possiamo dedurre che si tratta di un pianeta gassoso.

2) Il raggio del più piccolo pianeta osservabile dalla superficie della Terra con il metodo dei transiti $\boldsymbol{R_{min}}$ si può ricavare dalla relazione assumendo $\Delta \mathrm{m} = \Delta \mathrm{m}_{min} \simeq$ 0.002.

Il valore dipende dal raggio della stella e per una stella con raggio pari a quello del Sole si ha:

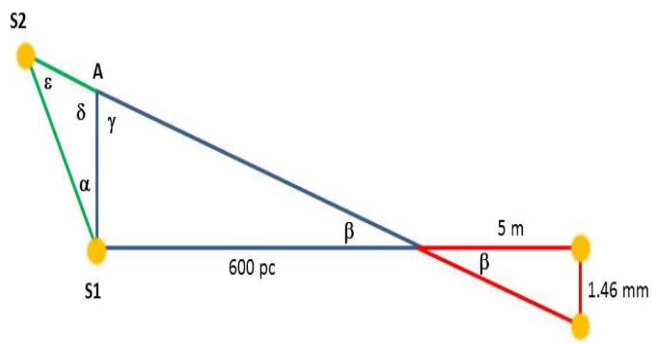
$$\mathrm{R_{min}} = \mathrm{R_\odot} \cdot \sqrt{1 - 10^{-\frac{\Delta \mathrm{m}_{min}}{2.5}}} \simeq \mathrm{R_\odot} \cdot \sqrt{0.002} \cdot 6.955 \cdot 10^5 \text{ km} \simeq 3 \cdot 10^4 \text{ km}$$

ovvero un pianeta poco più grande di Urano.

Nota: per valori di $\Delta \mathrm{m} < 0.010$ l'espressione esatta utilizzata in questo problema viene spesso sostituita con la più semplice relazione approssimata: $\Delta \mathrm{m} \simeq \left(\frac{\mathrm{R_P}}{\mathrm{R_S}}\right)^2$

13. Sul piano focale di un telescopio con focale di 500 cm, le due componenti di una binaria visuale distano tra di loro 1.46 mm. Sappiamo che una delle due stelle dista dal Sole 600 pc e che il piano orbitale della binaria forma un angolo di 30° (con la seconda stella a distanza maggiore della prima) con la perpendicolare alla direzione di osservazione. Calcolare la distanza tra le due stelle della binaria.

Soluzione



La configurazione descritta nel problema è rappresentata nella figura (non in scala) qui a sinistra, dove le due stelle sono indicate con **S1** e **S2**. Detta **F** la focale del telescopio e **d** la distanza delle due stelle sul piano focale, la distanza angolare **β** osservata è data dalla relazione:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathrm{arctg}\,\frac{d}{F} \simeq arctg\,\frac{1.46\ \mathrm{mm}}{5000\ \mathrm{mm}} \simeq$$

$$\simeq 1°.67 \cdot 10^{-2} \simeq 60''.2$$

Detta **D** la distanza della stella S1, la distanza S1-A vale:

$$\mathrm{S1 - A = D} \cdot \tan\beta \simeq$$

$$\simeq 600\ \mathrm{pc} \cdot \tan(1°.67 \cdot 10^{-2}) \simeq 600\,pc \cdot 2.92 \cdot 10^{-4} \simeq 0.175\,pc \simeq 5.41 \cdot 10^{12}\ km$$

Per ricavare la distanza S1-S2, il triangolo S1-S2-A si può risolvere con il teorema dei seni, ma essendo:

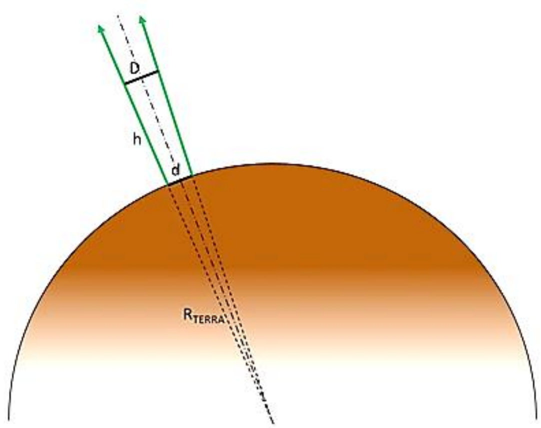
$$\delta = 180° - \gamma = 180° - 180° + 90° + \beta \simeq 90°\,1'$$

possiamo approssimarlo a un triangolo rettangolo (il disegno non è in scala) per cui:

$$S1 - S2 = \frac{S1 - A}{\cos\alpha} \simeq \frac{5.41 \cdot 10^{12}\ km}{\cos 30°} \simeq 6.25 \cdot 10^{12}\ km \simeq 4.17 \cdot 10^{4}\ UA$$

14. Due puntatori laser di alta potenza distanti 20.0 m l'uno dall'altro, inviano entrambi un sottilissimo fascio di luce in direzione esattamente verticale. Assumendo la superficie della Terra perfettamente sferica, quale sarà la distanza tra i due fasci a un'altezza dal suolo di 70 km?

Soluzione



La situazione descritta nel problema è rappresentata nella figura a sinistra. Detta **d** la distanza tra i due laser, vogliamo calcolare la separazione **D** dei fasci luminosi all'altezza **h** dalla superficie.

Poiché i due laser puntano esattamente in verticale, i loro prolungamenti all'indietro si incontrerebbero al centro del nostro pianeta. Detto $\boldsymbol{R_T}$ il raggio della Terra si ha:

$$d \ll \mathrm{R_T}$$

e possiamo quindi trascurare l'effetto della curvatura terrestre e considerare i due triangoli simili in figura con vertice al centro della Terra per i quali si può scrivere:

$$\mathrm{R_T} : d = (\mathrm{R_T} + h) : D$$

Da cui ricaviamo:

$$\mathrm{D} = \frac{(\mathrm{R_T + h}) \cdot \mathrm{d}}{\mathrm{R_T}} = \frac{6448 \cdot 10^3\ \mathrm{m} \cdot 20.0\ \mathrm{m}}{6378 \cdot 10^3\ m} \simeq 20.2\ m$$

15. Il VLT dell'ESO è formato da quattro telescopi, ognuno con uno specchio con diametro di 8.2m, che possono inviare la luce raccolta a un fuoco comune. Supponete che il VLT fotografi una stella di magnitudine 23.0. Quanti fotoni provenienti da questa stella vengono raccolti in totale dai quattro telescopi del VLT ogni secondo? Assumete per i fotoni un'energia media $E = 4.8 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$ ($\mathrm{J} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s^2} = \mathrm{W} \cdot \mathrm{s}$).

Soluzione

Consideriamo la differenza tra la magnitudine apparente della stella $\boldsymbol{m_S}$ e quella del Sole $\boldsymbol{m_\odot}$ e ricaviamo il flusso proveniente dalla stella $\boldsymbol{F_S}$ in unità di quello proveniente dal Sole $\boldsymbol{F_\odot}$:

$$m_S - m_\odot = -2.5 \log \frac{F_S}{F_\odot}$$

da cui si ha:

$$F_s = 10^{\left(\frac{m_\odot - m_s}{2.5}\right)} \cdot F_\odot = 10^{\left(\frac{-26.74 - 23.0}{2.5}\right)} \cdot F_\odot \simeq 1.27 \cdot 10^{-20} \cdot F_\odot$$

Dette $\boldsymbol{D}$ la distanza media Terra-Sole, $\boldsymbol{R_\odot}$ e $\boldsymbol{T_\odot}$ il raggio e la temperatura della fotosfera solare, la quantità media di energia $\boldsymbol{F_\odot}$ proveniente dal Sole che arriva ogni secondo su un metro quadrato alla sommità dell'atmosfera della Terra (costante solare) è data dalla relazione:

$$F_\odot = \frac{4\pi \cdot R_\odot^2 \cdot \sigma \cdot T_\odot^4}{4\pi \cdot D^2} \simeq$$

$$\simeq \frac{4.837 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m^2} \cdot 5.670 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K^4}} \cdot 1.115 \cdot 10^{15}\,\mathrm{K^4}}{2.238 \cdot 10^{22}\,\mathrm{m^2}} \simeq 1366\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

e quindi otteniamo:

$$F_s \simeq 1.27 \cdot 10^{-20} \cdot F_\odot \simeq 1.73 \cdot 10^{-17}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

Poiché l'energia media dei fotoni della stella è $E = 4.8 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{W \cdot s}$, otteniamo che il numero **n** di fotoni in arrivo ogni secondo su una superficie di un metro quadrato è:

$$n = \frac{F_s}{E} \simeq \frac{1.73 \cdot 10^{-17}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}}{\frac{4.8 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{W \cdot s}}{fotone}} \simeq 36\,\frac{\mathrm{fotoni}}{\mathrm{m^2 \cdot s}}$$

L'area complessiva **A** di raccolta del VLT è data dalla somma delle aree dei quattro specchi con diametro $\boldsymbol{d}$ pari a 8.2 m:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \simeq 211\,\mathrm{m^2}$$

ed è equivalente a quella di un singolo specchio con diametro di 16.4 m. Il numero totale **N** dei fotoni raccolti dal VLT sarà quindi:

$$N = n \cdot A \simeq 36\,\frac{\mathrm{fotoni}}{\mathrm{m^2 \cdot s}} \cdot 211\,\mathrm{m^2} \simeq 7600\,\frac{\mathrm{fotoni}}{\mathrm{s}}$$