Olimpiadi Italiane di Astronomia 2022
Corso di preparazione alla Finale Nazionale
Categoria Senior - Lezione 1

1. Calcolate il più breve periodo di rotazione che un pianeta con densità media pari a quella della Terra può avere affinché un corpo all'equatore non sia espulso a causa della forza centrifuga.

Soluzione
Il valore massimo del modulo della velocità di rotazione $\boldsymbol{v_r}$ per il quale l'attrazione gravitazionale è ancora in grado di trattenere i corpi all'equatore di un pianeta è pari alla prima velocità cosmica. Detto **R** il raggio del pianeta, **M** la sua massa e $\boldsymbol{\rho}$ la sua densità si ha:

$$v_r = \sqrt{\frac{G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{4\,\pi\,\rho\,G\,R^2}{3}}$$

Poiché la densità del pianeta è pari a quella della Terra, detti $\boldsymbol{M_T}$ e $\boldsymbol{R_T}$ massa e raggio della Terra avremo:

$$\rho = \frac{3\,M_T}{4\,\pi\,{R_T}^3}$$

Detto $\boldsymbol{T}$ il periodo di rotazione, si ha:

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v_r} = \sqrt{\frac{3\,\pi}{\rho\,G}} \simeq \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot {R_T}^3}{G \cdot M_T}} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{\frac{3\pi}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}}} \simeq 5069\,s \simeq 1h\,24m\,29s$$

2. La stella Kepler-101 ha due pianeti, Kepler-101b e Kepler-101c. Kepler-101b ha un raggio 0.520 volte quello di Giove e una massa 51.0 volte quella della Terra. Kepler-101c ha un raggio 1.23 volte quello della Terra e una massa $1.20 \cdot 10^{-2}$ volte quella di Giove. Calcolare:
1. l'accelerazione di gravità alla superficie dei due pianeti;
2. a quale altezza dalla superficie di Kepler-101c si avrà un'accelerazione di gravità pari a quella sulla superficie di Kepler-101b;
3. la densità dei due pianeti, valutando se sono rocciosi o gassosi.

Soluzione.
1. Detti $\boldsymbol{M_T}$, $\boldsymbol{M_G}$, $\boldsymbol{R_T}$, e $\boldsymbol{R_G}$ le masse e i raggi della Terra e di Giove, l'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g_b}$ e $\boldsymbol{g_c}$ alla superficie dei due pianeti vale:

$$g_b = \frac{G \cdot 51 \cdot M_T}{(0.520 \cdot R_G)^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 51 \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\,kg}{(0.520 \cdot 71490 \cdot 10^3\,m)^2} \simeq 14.7\,\frac{m}{s^2}$$

$$g_c = \frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{(1.23 \cdot R_T)^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27}\,kg}{(1.23 \cdot 6378 \cdot 10^3\,m)^2} \simeq 24.7\,\frac{m}{s^2}$$

2. L'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g_{ch}}$ a un'altezza $\boldsymbol{h}$ sulla superficie di Kepler-101c vale:

$$g_{ch} = \frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{(1.23 \cdot R_T + h)^2}$$

relazione dalla quale, ponendo $g_{ch} = g_b$, otteniamo il valore di $\boldsymbol{h}$ richiesto :

$$h = \sqrt{\frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{g_b}} - 1.23 \cdot R_T$$

$$h \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27}\,kg}{14.7\,\frac{m}{s^2}}} - 7.84 \cdot 10^6\,m \simeq 2.33 \cdot 10^6\,m$$

3. La densità media $\boldsymbol{\rho_b}$ e $\boldsymbol{\rho_c}$ dei due pianeti è data dal rapporto tra la loro massa e il loro volume:

$$\boldsymbol{\rho_b} = \frac{3 \cdot 51.0 \cdot M_T}{4\,\pi \cdot (0.520 \cdot R_G)^3} \simeq \frac{3 \cdot 51.0 \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\,kg}{4\,\pi \cdot (0.520 \cdot 71490 \cdot 10^3\,m)^3} \simeq 1.42 \cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}$$

$$\boldsymbol{\rho_c} = \frac{3 \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{4\,\pi \cdot (1.23 \cdot R_T)^3} \simeq \frac{3 \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27}\,kg}{4\,\pi \cdot (1.23 \cdot 6378 \cdot 10^3\,m)^3} \simeq 1.13 \cdot 10^4\,\frac{kg}{m^3}$$

Dalle densità ottenute si deduce che il pianeta Kepler-101b è di tipo gassoso, mentre Kepler-101c è di tipo roccioso. Si consideri infatti che Giove ha una densità media di $1.33 \cdot 10^3\ kg/m^3$, mentre la densità media della Terra è di $5.51 \cdot 10^3\ kg/m^3$.

3. Calcolate il periodo di rivoluzione e il modulo della velocità tangenziale di un corpo che si muove su un'orbita circolare a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi di un buco nero con massa pari a 2.51 masse solari.

Soluzione

Dette $\mathbf{M_{BN}}$ e $\mathbf{M_\odot}$ le masse del buco nero e del Sole, il "Raggio di Schwarzschild" $\boldsymbol{R_s}$ del buco nero vale:

$$\mathrm{R_s} = \frac{2\,\mathrm{G\,M_{BN}}}{\mathrm{c}^2} = \frac{2\,\mathrm{G} \cdot 2.51 \cdot \mathrm{M_\odot}}{\mathrm{c}^2} \simeq$$

$$\simeq \frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 4.99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{8.988 \cdot 10^{16}\,\frac{m^2}{s^2}} \simeq 7410\,\mathrm{m} = 7.41\,\mathrm{km}$$

Detto **a** (= $\boldsymbol{R_s}$+ 10 km) il raggio dell'orbita, dalla III Legge di Keplero il periodo di rivoluzione **T** vale:

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{4\pi^2\,\mathrm{a}^3}{\mathrm{G} \cdot 2.51 \cdot \mathrm{M_\odot}}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 5.277 \cdot 10^{12}\,m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 4.99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}} \simeq 7.91 \cdot 10^{-4}\,s$$

Con tale periodo il modulo **v** della velocità tangenziale vale:

$$\mathrm{v} = \frac{2\,\pi\,\mathrm{a}}{\mathrm{T}} = \frac{109.4\,\mathrm{km}}{7.91 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}} \simeq 138 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \simeq 0.461\,\mathrm{c}$$

Nota: nella soluzione stiamo assumendo che le leggi di Keplero siano valide a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi del buco nero. La soluzione rigorosa del problema richiede l'uso di relazioni derivate dalla teoria della Relatività Generale.

4. La Luna si allontana dalla Terra a una velocità di circa 3.8 cm/anno. Tra quanto tempo non sarà più possibile osservare dalla Terra eclissi totali di Sole?

Soluzione

Le eclissi totali di Sole non avranno più luogo quando da un qualsiasi punto sulla superficie della Terra il diametro apparente della Luna al perigeo sarà minore del diametro apparente del Sole all'afelio $\mathbf{D_{\odot A}}$. Detta

$\mathbf{d_{TA}}$ la distanza della Terra dal Sole all'afelio e $\mathbf{R_\odot}$ il raggio del Sole, il diametro angolare del Sole all'afelio vale:

$$D_{\odot A} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_\odot}{d_{TA}}\right) \simeq 2 \cdot sin^{-1}\left(\frac{6.955 \cdot 10^5\ km}{152.1 \cdot 10^6\ km}\right) \simeq 0°.5240 \simeq 31'.44$$

Detto $\mathbf{R_L}$ il raggio della Luna, la distanza di fine eclissi $\mathbf{d_{FE}}$ è quella dalla quale il disco lunare sottende un angolo pari a $\boldsymbol{D_{\odot A}}$ ed è data da:

$$\mathrm{d_{FE}} = \frac{2\ \mathrm{R_{Luna}}}{\sin \boldsymbol{D_{\odot A}}} \simeq \frac{3476\ \mathrm{km}}{\sin 0°.5240} \simeq 380.1 \cdot 10^3\ \mathrm{km}$$

Detti $\mathbf{a_L}$ ed $\mathbf{e_L}$ il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita lunare, la distanza attuale del centro della Luna al perigeo $\mathbf{d_{LP}}$ dal centro della Terra vale:

$$\mathrm{d_{LP}} = \mathrm{a_L}\,(1 - \mathrm{e_L}) \simeq 363.3 \cdot 10^3\ \mathrm{km}$$

Detto $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra, la distanza minima di un punto sulla superficie della Terra dal centro della Luna $\mathbf{d_{TP}}$ si ha quando la Luna è al perigeo ed è vista allo zenith (circostanza che può verificarsi solo per la fascia di latitudini tra circa +28° e -28°) e attualmente vale:

$$d_{TP} = d_{LP} - R_T \simeq 356.9 \cdot 10^3\ \mathrm{km}$$

Quindi il tempo **T** necessario affinché la distanza della Luna al perigeo diventi uguale a $\mathbf{d_{FE}}$ è dato da:

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{d_{FE}} - \mathrm{d_{TP}}}{\mathrm{V_a}} \simeq \frac{380.1 \cdot 10^8\mathrm{cm} - 356.9 \cdot 10^8\ \mathrm{cm}}{3.8\ \frac{cm}{anno}} \simeq 61 \cdot 10^7\ \mathrm{anni}$$

Nota.
Nella soluzione si assume che la velocità di allontanamento, le eccentricità dell'orbita lunare e dell'orbita della Terra e il raggio del Sole rimangano costanti. Anche considerando le loro variazioni si stima un tempo di fine eclissi simile a quello calcolato.

5. Intorno a una stella a 10 anni luce dal Sole è stato scoperto un pianeta di massa $6.5 \cdot 10^{24}\ kg$, che percorre intorno a essa, in 20 anni, un'orbita circolare il cui piano è perpendicolare alla direzione di osservazione e il cui raggio sottende un angolo di 4".89. Si calcoli la massa della stella in unità di masse solari e quanto varrebbe il periodo di rivoluzione del pianeta se orbitasse intorno al Sole.

Soluzione.
Poiché il piano dell'orbita è perpendicolare alla direzione di osservazione, detta **D** la distanza della stella dal Sole, il valore del raggio dell'orbita $\boldsymbol{a}$ si ricava dalla relazione:

$$a = D \cdot \tan\alpha \simeq 9460.7 \cdot 10^{10}\ \mathrm{km} \cdot \tan\left(\frac{4''.89}{3600}\right) \simeq 224 \cdot 10^7\ \mathrm{km}$$

Detti $\mathbf{M_S}$ e $\mathbf{M_P}$ le masse della stella e del pianeta e **T** il periodo orbitale del pianeta, dalla III Legge di Keplero ricaviamo:

$$\mathrm{M_s} + \mathrm{M_P} = \frac{4\,\pi^2 \cdot \mathrm{a^3}}{\mathrm{G} \cdot \mathrm{T^2}} = \frac{39.48 \cdot 1.12 \cdot 10^{37}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 3.98 \cdot 10^{17}\ s} \simeq 1.66 \cdot 10^{31}\ \mathrm{kg}$$

Poiché la massa del pianeta è trascurabile rispetto a tale valore, il risultato corrisponde alla massa della stella e in masse solari si ha:

$$\mathrm{M_s} \simeq 1.66 \cdot 10^{31}\ \mathrm{kg} \simeq 8.35\ \mathrm{M_\odot}$$

Il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta in unità astronomiche vale:

$$\mathrm{a} \simeq 224 \cdot 10^7\ \mathrm{km} \simeq 15.0\ UA$$

Quindi il periodo di rivoluzione $\mathbf{T_S}$ del pianeta attorno al Sole in anni varrebbe:

$$T_S = \sqrt{a^3} \simeq 58 \text{ anni}$$

Nota.
Il corpo in orbita attorno alla stella è sicuramente un pianeta, in quanto il limite inferiore per la massa delle stelle più piccole, le "Brown Dwarf", è di circa: $M_{BD} \simeq 0.012 \cdot M_{\odot} \simeq 2.4 \cdot 10^{28}\ kg \simeq 3.7 \cdot 10^3 \cdot M_P$.

6. L'asteroide Pallas ha un raggio medio di 512 km; l'accelerazione di gravità in superficie vale: 0.210 m/s^2. Calcolare la densità dell'asteroide in kg/m^3 e in g/cm^3 e la velocità di fuga sulla superficie. Calcolare la velocità di impatto con l'asteroide di un corpo di piccola massa lasciato cadere, da fermo, da una distanza di 800 km dalla superficie.

Soluzione
Detto **R** il raggio, l'asteroide ha un volume **V** pari a:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = 56.2 \cdot 10^7 \text{ km}^3 = 56.2 \cdot 10^{16} \text{ m}^3$$

Nota l'accelerazione di gravità alla sua superficie ricaviamo la massa **M** e la densità $\boldsymbol{\rho}$ di Pallas:

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G} \simeq \frac{0.210 \frac{m}{s^2} \cdot 2.62 \cdot 10^{11}\ m^2}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2}} \simeq 8.24 \cdot 10^{20} \text{ kg}$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{8.25 \cdot 10^{20} \text{ kg}}{56.2 \cdot 10^{16}\ m^3} \simeq 1470 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1.47 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

La velocità di fuga $\mathbf{v_f}$ dall'asteroide vale:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20} \text{ kg}}{512000 \text{ m}}} \simeq 463 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.463 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

La distanza **h** da cui cade il corpo è dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni di Pallas. Non possiamo quindi applicare le leggi del moto uniformemente accelerato, ma utilizziamo la legge di conservazione dell'energia meccanica. Posto **H** = h + R e dette $\mathbf{v_i}$ e $\mathbf{v_o}$ le velocità di impatto e iniziale si ha:

$$\frac{1}{2} m\, v_i^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = \frac{1}{2} m\, v_o^2 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

da cui, essendo la velocità iniziale nulla, si ricava:

$$v_i = \sqrt{2\,G\,M\left(\frac{H-R}{HR}\right)} = \sqrt{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20} \text{ kg}\left(\frac{800 \cdot 10^3 \text{ m}}{6.72 \cdot 10^{11} \cdot \text{m}^2}\right)} \simeq 362 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

7. La stella Castore (= $\boldsymbol{\alpha}$ Gem) ha una parallasse di 0".0761 ed è un sistema binario visuale con periodo di rivoluzione di 306 anni. Il semiasse maggiore dell'orbita delle componenti forma un angolo di 90° rispetto alla direzione di osservazione e le sue dimensioni angolari sono di 6.0". Determinare la somma delle masse delle due componenti in unità della massa del Sole.

Soluzione
Detta **D** la distanza di Castore dal Sole e $\boldsymbol{\pi}$ la sua parallasse si ha:

$$D = \frac{1}{\pi} \simeq \frac{1}{0''.0761} \simeq 13.1\, pc \simeq 4.05 \cdot 10^{14}\, km = 4.05 \cdot 10^{17}\, m$$

Possiamo calcolare le dimensioni lineari $\boldsymbol{a}$ del semiasse maggiore dell'orbita a partire dalle sue dimensioni apparenti $\boldsymbol{\beta}$. Poiché il piano dell'orbita è perpendicolare alla direzione di osservazione sarà:

$$a = D \cdot \tan\beta \simeq 4.05 \cdot 10^{17}\, m \cdot \tan\left(\frac{6.0''}{3600}\right) \simeq 1.2 \cdot 10^{13}\, m$$

Dette **M** e **m** le masse delle due componenti e **T** il periodo di rivoluzione, vale la relazione:

$$M + m = \frac{4\,\pi^2\ \cdot\ a^3}{G\ \cdot\ T^2} \simeq \frac{39.48\ \cdot 1.7\ \cdot\ 10^{39}\ m^3}{6.674\ \cdot\ \ 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot 9.33\ \cdot\ 10^{19}\ s^2} \simeq 1.1\ \cdot\ 10^{31}\ kg\ \simeq 5.5\ M_{\odot}$$

8. La stazione spaziale Internazionale (ISS) orbita intorno alla Terra su un'orbita circolare con una velocità di 7.66 km/s. La ISS diventa ben visibile a occhio nudo anche nei centri abitati (magnitudine ≤ 0) quando la sua altezza sull'orizzonte è maggiore di 10°. Considerando un osservatore posto al livello del mare che vede passare la ISS allo zenith, quanto vale la distanza tra la ISS e l'osservatore nel momento in cui la ISS si trova 10° sopra l'orizzonte? Quanto dura la visibilità della ISS per un'altezza sull'orizzonte maggiore di 10°? Si trascuri la rotazione della Terra.

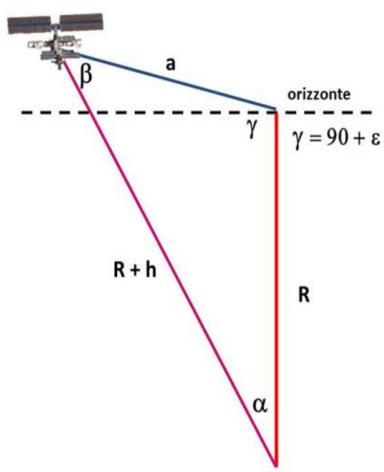
Soluzione

Poiché la ISS è in orbita circolare stabile, la sua velocità è pari alla prima velocità cosmica. Detti $\mathbf{V_{ISS}}$ il modulo della velocità orbitale, ***h*** l'altezza sulla superficie ***M*** e ***R*** la massa e il raggio della Terra, si ha:

$$V_{ISS} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R + h}}$$

da cui ricaviamo:

$$h = \frac{G\ \cdot M}{{V_{ISS}}^2} - R \simeq \frac{6.674\ \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot\ 5.972\ \cdot\ 10^{24}\ kg}{5.87\ \cdot\ 10^7\ \frac{m^2}{s^2}} - 6378\ km \simeq 415\ km$$



La configurazione descritta nel problema è schematizzata nella figura a sinistra, dove ***a*** è la distanza della ISS dall'osservatore quando la sua altezza sull'orizzonte è di 10°. Poiché a 10° sull'orizzonte la rifrazione è di circa 5', detta ***ε*** l'altezza sull'orizzonte della ISS, si osserverà la ISS ad un valore di 10° quando:

$$\varepsilon = 10° - 5' \simeq 9°\,55' = \ 9°.92$$

da cui:

$$\gamma = 90° +\ \varepsilon = 99°.92$$

Dal teorema dei seni sappiamo che:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{R + h}{\sin\gamma} = \frac{R}{\sin\beta}$$

Considerando il secondo e il terzo termine si ha:

$$\beta = \arcsin\frac{R \cdot \sin 99°.92}{R + h} \simeq \arcsin\frac{6283}{6793} \simeq 67°.65$$

e quindi:

$$\alpha = 180° - 67°.65 - 99°.92\ \simeq 12°.43$$

Possiamo ricavare il valore della distanza ***a***:

$$a = \frac{R\ \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}\ \simeq 1480\ km$$

Il periodo di rivoluzione ***T*** della ISS è dato dalla relazione:

$$T = \frac{2\,\pi\,(R + h)}{V_{ISS}} \simeq \frac{2\,\pi\ \cdot\ 6793\ \cdot\ 10^3\ m}{7.66\ \cdot\ 10^3\ \frac{m}{s}} \simeq 5570\ s \simeq 1h\ 32.8\ m$$

Detto $\boldsymbol{T_{10}}$ il tempo per cui la ISS rimane visibile 10° sopra l'orizzonte, per un passaggio zenitale vale la proporzione:

$$T : 360° = T_{10} : 2\alpha$$

da cui si ricava:

$$T_{10} = \frac{2\alpha \cdot T}{360°} \simeq \frac{24°.86 \cdot 5570\ s}{360°} \simeq 385\ s \simeq 6\ m\ 25s$$

9. Il limite inferiore dell'anello D e il limite superiore dell'anello A di Saturno ruotano intorno al pianeta con velocità tangenziali: $v_D \simeq 23.80\ km/s$ e $v_A \simeq 16.65\ km/s$. Sapendo che gli anelli sono composti in massima parte da acqua allo stato ghiacciato (per la densità del ghiaccio si assuma $\rho_g \simeq 920\ kg/m^3$), verificate se gli anelli si trovano all'interno del limite di Roche di Saturno. Considerate accettabile una tolleranza del 10% sui risultati ottenuti.

Soluzione

Indicando con $\mathbf{M_S}$ la massa di Saturno, dalla formula della prima velocità cosmica, si ottiene che il limite inferiore dell'anello D e il limite superiore dell'anello A si trovano a distanze $\mathbf{d_D}$ e $\mathbf{d_A}$ dal centro di Saturno rispettivamente pari a:

$$d_D = \frac{G\ M_S}{{v_D}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26}\ kg}{566.4 \cdot 10^6\ \frac{m^2}{s^2}} \simeq 67.00 \cdot 10^6\ m = 67.00 \cdot 10^3\ km$$

$$d_A = \frac{G\ M_S}{{v_A}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26}\ kg}{277.2 \cdot 10^6\ \frac{m^2}{s^2}} \simeq 136.9 \cdot 10^6\ m = 136.9 \cdot 10^3\ km$$

Per gli anelli una buona approssimazione del limite di Roche di Saturno è data dalla relazione:

$$d \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{M_S}{\rho_g}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{5.685 \cdot 10^{26}\ kg}{920\ \frac{kg}{m^3}}} \approx 129 \cdot 10^6\ m = 129 \cdot 10^3\ km$$

Quindi, considerando le approssimazioni usate e una tolleranza del 10% (pari a circa $12.9 \cdot 10^3$ km), possiamo affermare che fino al bordo superiore dell'anello A l'intera struttura degli anelli si trova all'interno del limite di Roche di Saturno.

10. Un orso può correre a una velocità massima di 9 m/s. Calcolare le dimensioni minime di un corpo di forma sferica e densità uniforme della fascia di Kuiper dal quale un orso non potrebbe sfuggire.

Soluzione

La velocità minima $\boldsymbol{V_1}$ che consente all'orso di staccarsi dalla superficie di un corpo sferico di raggio $\boldsymbol{r_1}$ senza ricadere è la prima velocità cosmica, che lo porta in un'orbita circolare e che vale:

$$V_1 = \sqrt{\frac{G\ M}{r_1}}$$

Detta $\boldsymbol{\rho}$ la densità di un corpo, la sua massa $\boldsymbol{M}$ è data da $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. Quindi il raggio $\boldsymbol{r_1}$ dell'asteroide vale:

$$r_1 = V_1 \sqrt{\frac{3}{4\,\pi\,G\,\rho}}$$

La densità dell'asteroide non è data, tuttavia è noto che i corpi della fascia di Kuiper sono composti per la quasi totalità di ghiaccio, e quindi possiamo assumere: $\rho \simeq 920\ kg/m^3$, da cui:

$$r_1 = V_1 \sqrt{\frac{3}{4\,\pi\,G\,\rho}} \;\simeq\; 9\;\frac{m}{s}\;\cdot\;\sqrt{\frac{3}{4\,\pi\cdot 6.674\cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 920\,\frac{kg}{m^3}}} \;\simeq 17.7\;\cdot\;10^3\;m = 17.7\;km$$

Per allontanarsi indefinitamente dall'asteroide la velocità dell'orso deve essere pari alla seconda velocità cosmica $\boldsymbol{V_f}$ (o velocità di fuga):

$$V_f \;=\; \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r_2}}$$

da cui si ricava il corrispondente raggio $\boldsymbol{r_2}$ dell'asteroide:

$$r_2 = V_f \sqrt{\frac{3}{8\,\pi\,G\,\rho}} \;\simeq 9\;\frac{m}{s}\;\cdot\;\sqrt{\frac{3}{8\,\pi\cdot 6.674\cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 920\,\frac{kg}{m^3}}} \;\simeq\; 12.5\;\cdot\;10^3\;m = 12.5\;km$$

Quindi detto **r** il raggio dell'asteroide si hanno tre casi:

r < 12.5 km: l'orso potrà sfuggire

12.5 km < r < 17.7 km: l'orso entrerà in orbita (circolare o ellittica) intorno all'asteroide

r > 17.7 km: l'orso finirà per ricadere sull'asteroide

Nota.
La soluzione numerica di questo problema dipende dalla densità assunta per l'asteroide. Ogni assunzione diversa da quella indicata, purché motivata, è da considerare corretta. È anche possibile la soluzione in cui il raggio è calcolato lasciando la densità come incognita:

$$r = 538\;\;kg^{\frac{1}{2}}\;\cdot m^{-\frac{1}{2}}\;\cdot\;\sqrt{\frac{1}{\rho\;\;\frac{kg}{m^3}}}$$

11. Calcolate la velocità al perielio di un asteroide che ha periodo orbitale di 517.9 giorni ed eccentricità dell'orbita di 0.2080.

Soluzione
Esprimendo il periodo orbitale **T** in anni possiamo ricavare il semiasse maggiore dell'orbita dalla relazione:

$$a = \sqrt[3]{T^2} \;\;\simeq\;\; \sqrt[3]{\left(\frac{517.9}{365.256}\right)^2} \;\;\simeq\;\; \sqrt[3]{1.418^2} \simeq 1.262\;\mathrm{UA}\;\;\simeq 188.8\;\cdot\;10^6\;\mathrm{km}$$

Detta $\boldsymbol{M_\odot}$ la massa del Sole, la velocità media lungo l'orbita $\boldsymbol{v_m}$ e la velocità al perielio $\boldsymbol{v_p}$ dell'asteroide sono date dalle relazioni:

$$v_m = \sqrt{\frac{G\,\boldsymbol{M_\odot}}{a}} \simeq \sqrt{\frac{6.674\;\cdot\;10^{-11}\;\frac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 1.989\;\cdot 10^{30}\;kg}{188.8\;\cdot\;10^9\;m}} \simeq 26.52\,\frac{km}{s}$$

$$v_p = \;v_m\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \;\simeq 26.52\;\sqrt{\frac{1.2080}{0.7920}} \;\simeq 32.75\;\frac{km}{s}$$

12. Supponete che, improvvisamente, il 5 luglio 2084 la massa del Sole si dimezzi. Verificate se la Terra resterebbe ancora in orbita attorno al Sole.

Soluzione

La velocità orbitale della Terra $\mathbf{v_r}$ dipende dalla sua distanza $\boldsymbol{r}$ dal Sole. Detti $\boldsymbol{a}$ il semiasse maggiore dell'orbita della Terra e $M_\odot$ la massa del Sole, la velocità media $\boldsymbol{v_m}$ con cui la Terra si muove intorno al Sole è data dalla relazione (prima velocità cosmica):

$$v_m = \sqrt{\frac{G\, M_\odot}{a}}.$$

A una distanza dal Sole pari ad $\mathbf{a}$, la velocità $\mathbf{v_{par}}$ che porterebbe la Terra su un'orbita parabolica (o seconda velocità cosmica) vale:

$$v_{par} = \sqrt{\frac{2\, G\, M_\odot}{a}}.$$

Nel momento in cui la massa del Sole si dimezza, la nuova velocità parabolica $\mathbf{v_{par-N}}$ vale:

$$v_{par-N} = \sqrt{\frac{2\, G\, M_{Sole}}{2\, a}} = v_m$$

e sarebbe quindi uguale alla velocità orbitale media quando la massa del Sole è pari al valore attuale.
Il 5 luglio la Terra si trova in prossimità dell'afelio e quindi:

$$r > a$$

e si avrebbe:

$$v_r < v_m \qquad v_r < v_{par-N}$$

Ne deduciamo che la Terra continuerebbe a orbitare attorno al Sole.

Nota.
Allo stesso risultato si può arrivare calcolando l'energia meccanica totale, che con la Terra all'afelio risulta minore di zero (indicando quindi un'orbita ellittica) anche dimezzando la massa del Sole.

13. Una massa $\boldsymbol{M}$ viene divisa in due parti di massa $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{M\text{-}m}$, che vengono allontanate a una distanza $\boldsymbol{d}$. Trovare il valore di $\boldsymbol{m}$ che rende massima la forza gravitazionale tra le due parti.

Soluzione
La forza di gravità tra le due masse è data dalla relazione:

$$F = G\,\frac{m\,(M-m)}{d^2} = \frac{G}{d^2}\,(mM - m^2)$$

dove il termine $\frac{G}{d^2}$ è costante, mentre il termine $(mM - m^2)$ è una funzione di $\boldsymbol{m}$.

Per determinare il massimo della funzione possiamo usare un criterio algebrico o uno analitico.

$m =$	$F \propto$
$M/8$	0.109 M^2
$M/6$	0.139 M^2
$M/4$	0.188 M^2
$M/2.1$	0.249 M^2
$M/2$	0.250 M^2
$M/1.9$	0.249 M^2
$M/1.5$	0.222 M^2
$M/1.3$	0.178 M^2
$M/1.2$	0.139 M^2

Criterio algebrico:
calcoliamo la forza ponendo $m = \frac{M}{n}$ per valori decrescenti di n:

$$F = \frac{G}{d^2}\,\frac{(n-1)\,M^2}{n^2}$$

Dai dati riportati nella tabella a sinistra vediamo che la forza sarà massima quando n = 2, ovvero quando la massa $\boldsymbol{M}$ è divisa in due parti uguali.

Criterio analitico:
un massimo della funzione $(mM - m^2)$ si ottiene uguagliando a zero la sua derivata prima: $\frac{d}{dm}\,(mM - m^2) = M - 2m = 0$

da cui otteniamo che la forza sarà massima quando: $m = \frac{M}{2}$, ovvero quando la massa $\boldsymbol{M}$ è divisa in due parti uguali.

14. Una galassia a spirale ha una magnitudine assoluta integrata -20.17 e un raggio di $2.0 \cdot 10^4$ anni luce. Stimate, in prima approssimazione, la velocità di fuga per un oggetto posto sul piano galattico alla distanza di $2.0 \cdot 10^5$ anni luce dal centro della galassia. Si assuma che la massa delle stelle sia circa la metà della massa "ordinaria" della galassia.

Soluzione.
In prima approssimazione, possiamo stimare il numero di stelle $\mathbf{n}$ che compongono la galassia, ipotizzando che siano tutte uguali al Sole, dal valore della sua magnitudine assoluta. Dette $\boldsymbol{M_T}$ e $\boldsymbol{F_T}$ la magnitudine assoluta e il flusso della galassia e $\boldsymbol{M_{A\odot}}$ e $\boldsymbol{F_\odot}$ la magnitudine assoluta e il flusso del Sole, avremo quindi:

$$M_T - M_{A\odot} = -2.5 \log \frac{F_T}{F_\odot} = -2.5 \log \frac{n\, F_\odot}{F_\odot} = -2.5 \log n$$

$$n = 10^{\left(\frac{M_{A\odot} - M_T}{2.5}\right)} \simeq 10^{\left(\frac{4.83+20.17}{2.5}\right)} \simeq 10^{10}$$

Detta $\boldsymbol{M_S}$ la massa totale delle stelle e $\boldsymbol{M_\odot}$ la massa del Sole, la massa totale "ordinaria" $\boldsymbol{M_O}$ della galassia vale:

$$M_O = 2\, M_s \simeq 2 \cdot 10^{10} \cdot M_\odot \simeq 2 \cdot 10^{10} \cdot 1.989 \cdot 10^{30} \text{kg} \simeq 4 \cdot 10^{40} \text{ kg}$$

Dagli studi sulla dinamica delle galassie a spirale, sappiamo che esiste della materia non visibile, la cosiddetta "materia oscura". La materia oscura contribuisce per circa 84% della massa gravitazionale totale delle galassie. Quindi $\boldsymbol{M_O}$ costituisce circa il restante 16% della massa $\boldsymbol{M_G}$ della galassia per gli effetti gravitazionali: $M_O \simeq 0.16\, M_G$, e di conseguenza si avrà:

$$M_G \simeq 6.25\, M_O \simeq 2.5 \cdot 10^{41}\, kg$$

La distanza **R** a cui vogliamo calcolare la velocità di fuga è 10 volte il raggio della galassia. Facciamo quindi l'ulteriore ipotesi che tutta la massa della galassia, inclusa quella oscura, sia all'interno di tale distanza. Con questa assunzione, ai fini degli effetti gravitazionali possiamo considerare tutta la massa come concentrata al centro della galassia, e la velocità di fuga $\boldsymbol{v_f}$ vale quindi:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\, G\, M_G}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 2.5 \cdot 10^{41} \text{ kg}}{1.9 \cdot 10^{21} \text{ m}}} \simeq 13 \cdot 10^4 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq 130 \ \frac{\text{km}}{\text{s}} \ .$$

15. Determinare il semiasse maggiore dell'orbita di un asteroide che, osservato dalla Terra, ha un periodo sinodico pari al suo periodo siderale. Quanto possono valere, al massimo, l'eccentricità dell'orbita e la distanza dell'asteroide dal Sole all'afelio? Si assuma per l'asteroide una densità di $1470 \ \ kg/m^3$.

Soluzione
Le relazioni che legano il periodo sinodico $\boldsymbol{S}$ di un corpo del Sistema Solare osservato dalla Terra con il suo Periodo Siderale $\boldsymbol{P}$ e con il Periodo Siderale della Terra $\boldsymbol{E}$ sono:

$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P}$ per un corpo con periodo siderale maggiore di quello della Terra

$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{E}$ per un corpo con periodo siderale minore di quello della Terra

Da cui ricaviamo rispettivamente:

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{P} = \frac{1}{E} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{S} - \frac{1}{P} = -\frac{1}{E}$$

Se S = P notiamo che l'asteroide non può avere periodo siderale minore di quello della Terra, varrà allora solo la prima relazione da cui si ricava:

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{P} = \frac{1}{E}$$

e infine:

$$P = 2\, E = 2\, anni$$

Il semiasse maggiore a dell'orbita vale quindi:

$$a = \sqrt[3]{P^2} \simeq 1.587\ UA \simeq 237.4 \cdot 10^6\ km$$

Per ricavare la massima distanza all'afelio $\boldsymbol{D_A}$ calcoliamo l'eccentricità massima $\boldsymbol{e_m}$ dell'orbita, considerando che la distanza al perielio $\boldsymbol{D_P}$ non può essere ovviamente minore del raggio del Sole $\boldsymbol{R_\odot}$.

$$\mathrm{D_P = R_\odot = a\,(1 - e_m)}$$

$$e_m = 1 - \frac{\mathrm{R_\odot}}{a} \simeq 1 - \frac{6.955 \cdot 10^5\ km}{237.4 \cdot 10^6\ km} \simeq 0.9971$$

da cui si ottiene:

$$D_A = a\,(1 + e_m) \simeq 474.1 \cdot 10^6\ km$$

Ma in realtà un asteroide non può avvicinarsi a una distanza dal Sole pari al raggio, perché verrebbe ben prima disgregato dalle forze mareali del Sole. In prima approssimazione, l'effettiva minima distanza al perielio $\boldsymbol{D_{PE}}$ per l'asteroide è data dalla relazione del limite di Roche:

$$\mathrm{D_{PE}} \approx 1.51\sqrt[3]{\frac{\mathrm{M_\odot}}{\rho_\mathrm{m}}} \approx 1.51\sqrt[3]{\frac{1.989 \cdot 10^{30}\ kg}{1470\ \frac{kg}{m^3}}} \approx 1.67 \cdot 10^6\ \mathrm{km} \approx 2.4\ \mathrm{R_\odot}$$

Quindi le effettive eccentricità massima dell'orbita $\boldsymbol{e_{me}}$ e distanza all'afelio $\boldsymbol{D_{AE}}$ valgono:

$$\mathrm{e_{me}} = 1 - \frac{\mathrm{D_{PE}}}{\mathrm{a}} \simeq 1 - \frac{1.67 \cdot 10^6\ \mathrm{km}}{237.4 \cdot 10^6\ \mathrm{km}} \simeq 0.993$$

$$\mathrm{D_{AE} = a\,(1 + e_{me}) \simeq 473 \cdot 10^6\ km}$$