Olimpiadi Italiane di Astronomia 2022
Corso di preparazione alla Finale Nazionale
Categoria Junior 2 - Lezione 2

1. Due stelle di luminosità costante, A e B, della Galassia si trovano a una distanza di 107 anni luce una dall'altra. Osservata da A la stella B ha magnitudine apparente 5.45. A causa del loro moto intorno al centro galattico le due stelle si allontanano di 68.7 UA all'anno. Calcolate la magnitudine apparente che la stella B, vista da A, avrà tra 1500 anni. Si trascurino gli effetti dovuti alla presenza di nubi di materia tra le due stelle.

Soluzione

La distanza attuale in parsec tra le due stelle $\boldsymbol{d_{AB}}$ vale:

$$d_{AB} = \frac{107\ anni\ luce}{3.2616\ \frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq 32.8\ parsec$$

Detta $\boldsymbol{m_B}$ la magnitudine apparente di B vista da A, la magnitudine assoluta $\boldsymbol{M_B}$ di B vale:

$$\mathrm{M_B} = \mathrm{m_B} + 5 - 5\log \mathrm{d_{AB}} \simeq 5.45 + 5 - 5\log 32.8 \simeq 2.87$$

Tra 1500 anni la distanza delle due stelle sarà aumentata di $\Delta\boldsymbol{d_{AB}}$ pari a:

$$\Delta \mathrm{d_{AB}} = 1500\ \mathrm{anni} \cdot 68.7\ \frac{\mathrm{UA}}{\mathrm{anno}} \simeq 103 \cdot 10^3\ UA \simeq 0.500\ pc$$

La nuova distanza $\boldsymbol{d_{AB-N}}$ tra A e B sarà quindi:

$$\mathrm{d_{AB-N}} = \mathrm{d_{AB}} + \Delta \mathrm{d_{AB}} \simeq 33.3\ \mathrm{pc}$$

E la magnitudine apparente $\boldsymbol{m_{B-N}}$ di B vista da A sarà:

$$\mathrm{m_{B-N}} = \mathrm{M_B} - 5 + 5\log \mathrm{d_{AB-N}} \simeq 2.87 - 5 + 5\log 33.3 \simeq 5.48$$

2. La magnitudine apparente della Luna al primo quarto è -12.00. Quanto vale, a parità di condizioni osservative, la magnitudine apparente della Luna piena?

Soluzione

Indichiamo con $\boldsymbol{m_P}$ e $\boldsymbol{m_Q}$ le magnitudini apparenti della Luna piena e al primo quarto e con $\boldsymbol{F_P}$ e $\boldsymbol{F_Q}$ i corrispondenti flussi, vale la relazione:

$$\mathrm{m_P} - \mathrm{m_Q} = -2.5\log\frac{\mathrm{F_P}}{\mathrm{F_Q}}$$

Il flusso riflesso dalla Luna dipende unicamente dalla superficie visibile e quindi:

$$\mathrm{F_P} = 2\ \mathrm{F_Q}$$

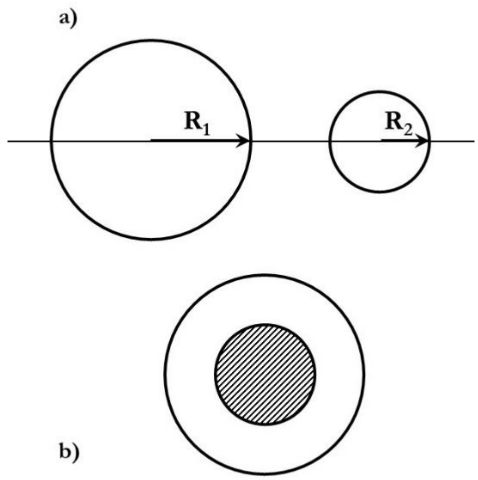
da cui ricaviamo:

$$\mathrm{m_P} - \mathrm{m_Q} = -2.5\log 2 = -0.75$$

$$\mathrm{m_P} = \mathrm{m_Q} - 0.75 = -12.75$$

3. Un sistema binario a eclisse è formato da due stelle con la stessa temperatura della fotosfera. Il raggio della prima stella è pari a quello del Sole, il raggio della seconda stella è pari a metà di quello del Sole. Il piano orbitale del sistema è parallelo alla direzione di osservazione dalla Terra. Di quanto varia, al massimo, la magnitudine della binaria a eclisse quando la seconda stella transita davanti alla prima?

Soluzione



Detta **T** la temperatura della fotosfera delle due stelle e $\boldsymbol{R_1}$ e $\boldsymbol{R_2}$ i rispettivi raggi (con $R_1 = 2\,R_2$), le luminosità $\boldsymbol{L_1}$ e $\boldsymbol{L_2}$ valgono:

$$L_1 = 4\,\pi\,{R_1}^2\,\sigma\,T^4 \qquad\qquad L_2 = 4\,\pi\,{R_2}^2\,\sigma\,T^4$$

La luminosità $\boldsymbol{L_{TOT}}$ del sistema fuori eclisse (configurazione **a** nella figura a sinistra) è massima e vale:

$$L_{TOT} = L_1 + L_2 = \;4\,\pi\,({R_1}^2 + \;{R_2}^2)\,\sigma\,T^4$$

Per tutto il tempo dell'eclisse totale, in cui la seconda stella transitando risulta prospetticamente interamente "all'interno" della prima (configurazione **b** nella figura a sinistra), si avrà il minimo di luminosità del sistema $\boldsymbol{L_{Eclisse}}$ che vale:

$$L_{Eclisse} = 4\,\pi\,{R_1}^2\,\sigma\,T^4$$

Dette $\boldsymbol{m_{TOT}}$ la magnitudine del sistema nella configurazione **a** e $\boldsymbol{m_{Eclisse}}$ la magnitudine del sistema nella configurazione **b**, e ricordando che $R_1 = 2\,R_2$, la variazione di magnitudine $\boldsymbol{\Delta m}$ durante l'eclisse totale è data da:

$$\Delta m = \;m_{Eclisse}\; - \;m_{TOT} = -2.5\log\;\frac{L_{Eclisse}}{L_{TOT}} = \;-2.5\log\frac{{R_1}^2}{{R_1}^2 + \;{R_2}^2} = -2.5\log\;\frac{4}{5} \simeq 0.24$$

Nota: poiché la temperatura della fotosfera delle due stelle è uguale, la stessa variazione di magnitudine si osserverà quanto la seconda stella transita dietro la prima.

4. L'ammasso globulare M3 ha un diametro di 180 anni luce e, visto dalla Terra, un diametro apparente di 18'.3. Calcolate la magnitudine apparente di una stella di tipo solare dell'ammasso. Poiché l'età di M3 è di circa 11.4 · 109 anni, pensate di poter osservare una stella di tipo solare nell'ammasso?

Soluzione

Noti il diametro vero dell'ammasso $\boldsymbol{d}$ e il suo diametro apparente $\boldsymbol{\alpha}$, la sua distanza $\boldsymbol{D}$ è data dalla relazione:

$$\mathrm{D} = \;\frac{\mathrm{d}}{\tan\alpha} = \frac{180\text{ anni luce}}{\tan 0°.305} \;\simeq 33.8\;\cdot\;10^3\text{ anni luce}\;\simeq\;10.4\;\cdot 10^3\;pc$$

Poiché, Dette $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{M}$ le magnitudini apparente e assoluta della stella, e ricordando che la stella è uguale al Sole e dunque $M = M_{\odot}$, si ha:

$$m = M - 5 + 5\log d = 4.83 - 5 + 5\log\;(10.4\;\cdot 10^3)\;\simeq 19.9$$

Tuttavia l'ammasso non può contenere una stella G2 V, che ha un tempo di permanenza sulla Sequenza Principale dell'ordine di $10 \cdot 10^9$ anni, a meno che il processo di formazione stellare non sia continuato fino a oltre 1.4 miliardi di anni dopo l'aggregazione dell'ammasso.

5. Una stella dista dal Sole 326.2 anni luce, ha magnitudine apparente 3.25 e temperatura della fotosfera di 3000 K. Si determini la magnitudine assoluta della stella e il suo raggio in unità di raggi solari e in km.

Soluzione

Detta **d** la distanza in anni luce, la distanza **D** della stella in parsec vale:

$$\mathrm{D}\;\simeq\;\frac{\mathrm{d}}{3.2616\,\frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq \frac{326.2\;anni\ luce}{3.2616\,\frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq 100.0\text{ pc}$$

Detta $\boldsymbol{m_s}$ la magnitudine apparente, la magnitudine assoluta $\boldsymbol{M_s}$ della stella vale:

$$M_s = \;m_s + 5\; - 5\log d\;\simeq 3.25 + 5\; - 5\log 100.0\;\simeq -1.75$$

Dette $\boldsymbol{L_s}$ la luminosità della stella e $\boldsymbol{L_\odot}$ e $\mathbf{M_\odot}$ la luminosità e la magnitudine assoluta del Sole vale la relazione:

$$\mathrm{M_\odot} - \mathrm{M_S} = -2.5\log\left(\frac{\mathrm{L_\odot}}{\mathrm{L_S}}\right)$$

da cui ricaviamo:

$$\log\left(\frac{\mathrm{L_\odot}}{\mathrm{L_S}}\right) \simeq \frac{\mathrm{M_\odot} - \mathrm{M_S}}{-2.5} \simeq \frac{4.83+1.75}{-2.5} \simeq -2.63$$

$$\frac{L_\odot}{L_S} \simeq 10^{-2.63} \qquad L_S \simeq \frac{L_\odot}{10^{-2.63}} \simeq 427 L_\odot$$

Detti $\mathbf{R_S}$ e $\mathbf{T_S}$ e $\mathbf{R_\odot}$ e $\mathbf{T_\odot}$ i raggi e le temperature della stella e del Sole, dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$4\,\pi\,\mathrm{R_S}^2\,\sigma\,\mathrm{T_S}^4 = 427\ \cdot 4\,\pi\,\mathrm{R_\odot}^2\,\sigma\,\mathrm{T_\odot}^4$$

e quindi:

$$\mathrm{R_S} = \mathrm{R_\odot}\sqrt{427\ \left(\frac{T_\odot}{\mathrm{T_S}}\right)^4} \simeq \mathrm{R_\odot}\sqrt{427\ \left(\frac{5778}{3000}\right)^4} \simeq 76.7\,\mathrm{R_\odot} \simeq 53.3\ \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

La stella è una “gigante rossa”; il suo raggio è quasi uguale al semiasse maggiore dell’orbita di Mercurio.

6. La galassia M32, un satellite della galassia di Andromeda, è formata da circa $250 \cdot 10^6$ stelle e ha magnitudine integrata pari a 9.0. Nell’ipotesi che le stelle di M32 siano tutte uguali, calcolate il valore della loro magnitudine apparente.

Soluzione

Detto $\boldsymbol{F_S}$ il flusso emesso da una stella della galassia e $\boldsymbol{N}$ il numero di stelle, la differenza tra la magnitudine apparente integrata della galassia $\boldsymbol{m_{TOT}}$ e quella $\boldsymbol{m}$ di una stella vale:

$$\mathrm{m_{TOT}} - \mathrm{m} = -2.5\log\frac{\mathrm{F_{TOT}}}{\mathrm{F_S}} = -2.5\log\frac{\mathrm{N}\ \cdot \mathrm{F_S}}{\mathrm{F_S}}$$

e quindi:

$$\mathrm{m} = \mathrm{m_{TOT}} + 2.5\log\frac{\mathrm{N}\ \cdot \mathrm{F_S}}{\mathrm{F_S}} = 9.0 + 2.5\log\ (250\ \cdot\ 10^6) \simeq 30$$

7. Calcolare la luminosità del Sole (energia totale emessa al secondo), la quantità di energia solare che arriva su un’area unitaria alla distanza della Terra ogni secondo (costante solare), la quantità totale di energia solare che arriva su tutta la Terra ogni secondo e la quantità di energia riflessa al secondo dall’atmosfera terrestre.

Soluzione

Poiché il Sole può essere approssimato a un corpo nero, detti $\boldsymbol{R_\odot}$ il suo raggio e $\boldsymbol{T_\odot}$ la temperatura della fotosfera, la sua luminosità $\boldsymbol{L_\odot}$ vale:

$$\mathrm{L_\odot} = 4\,\pi\,\mathrm{R_\odot}^2\,\sigma\,\mathrm{T_\odot}^4 \simeq 4\,\pi\ \cdot 4.837\ \cdot\ 10^{17}\ \mathrm{m^2}\ \cdot 5.670\ \cdot\ 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K^4}} \cdot 1.115\ \cdot 10^{15}\ \mathrm{K^4}$$

$$\mathrm{L_\odot} \simeq 3.841\ \cdot\ 10^{26}\ \mathrm{W}$$

Alla distanza $\boldsymbol{a}$ della Terra, questa energia è distribuita su un’area totale $\boldsymbol{A}$ pari a:

$$\mathrm{A} = 4\,\pi\,\mathrm{a}^2 \simeq 2.812\ \cdot\ 10^{23}\ \mathrm{m^2}$$

Quindi la quantità di energia $\boldsymbol{K}$ che arriva ogni secondo sull’unità di superficie (costante solare) è:

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{L_\odot}}{\mathrm{A}} \simeq \frac{3.841\ \cdot\ 10^{26}\ \mathrm{W}}{2.812\ \cdot 10^{23}\ \mathrm{m^2}} \simeq 1366\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

L'energia totale che arriva sulla Terra ogni secondo $\boldsymbol{E_T}$ è pari alla costante solare per l'area proiettata $\boldsymbol{A_T}$ della Terra e, detto $\boldsymbol{R_T}$ il raggio della Terra, vale:

$$\mathrm{E_T = K \cdot A_T = K \cdot \pi R_T}^2 \simeq 1366 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot 1.278 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^2 \simeq 1.746 \cdot 10^{17}\ \mathrm{W}$$

Detta $\boldsymbol{a_T}$ l'albedo dell'atmosfera terrestre, la quantità $\boldsymbol{E_R}$ di energia riflessa ogni secondo è data da:

$$\mathrm{E_R = E_T \cdot a_T} \simeq 1.746 \cdot 10^{17}\ \mathrm{W} \cdot 0.434 \simeq 7.567 \cdot 10^{16}\ \mathrm{W}$$

8. Una nebulosa planetaria si espande in modo isotropo (cioè allo stesso modo in tutte le direzioni) con una velocità costante pari a 17.0 km/s. Dal febbraio 1972 al febbraio 2017 le dimensioni angolari $\boldsymbol{\alpha}$ del suo raggio sono aumentate da $\alpha_{1972} = 34''.0$ a $\alpha_{2017} = 40''.0$. Calcolate la distanza, in anni luce e in parsec, della nebulosa e il suo diametro lineare nel febbraio 2017 in km e in UA.

Soluzione

Il tempo **t** tra la prima e la seconda osservazione vale:

$$\mathrm{t = 45\ anni} \simeq 45 \cdot 365.26 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \simeq 1.42 \cdot 10^9\ s$$

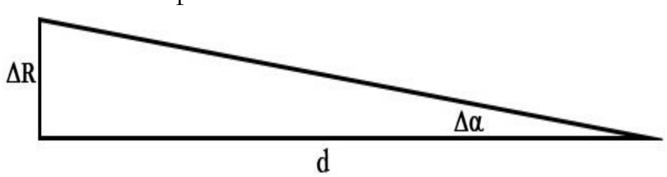
Poiché l'espansione è isotropa e con velocità $\boldsymbol{v}$ costante, l'aumento $\boldsymbol{\Delta R}$ del raggio della nebulosa planetaria è stato di:

$$\Delta \mathrm{R} = v \cdot t \simeq 17.0 \frac{km}{s} \cdot 1.42 \cdot 10^9\ s \simeq 2.41 \cdot 10^{10}\ km$$

Nello stesso tempo l'aumento di dimensioni angolari $\boldsymbol{\Delta\alpha}$ è stato di:

$$\Delta\alpha = \alpha_{2017} - \alpha_{1972} \simeq 40''.0 - 34''.0 \simeq 6''.0 \simeq 1^\circ.7 \cdot 10^{-3}$$

La distanza **d** per cui a una variazione lineare **ΔR** corrisponde una variazione angolare **Δα** è:



$$\mathrm{d} = \frac{\Delta \mathrm{R}}{\tan \Delta\boldsymbol{\alpha}} \simeq \frac{2.41 \cdot 10^{10}\ km}{\tan 1^\circ.7 \cdot 10^{-3}}$$

$$\mathrm{d} \simeq 8.0 \cdot 10^{14}\ km \simeq 85\ a.l. \simeq 26\ parsec$$

Poiché le dimensioni angolari del raggio della nebulosa nel 2017 valevano:

$$\alpha_{2017} = 40''.0 \simeq 1^\circ.11 \cdot 10^{-2}$$

nota la distanza della nebulosa ne ricaviamo il diametro **D** nel 2017 dalla relazione:

$$\mathrm{D_{2017} = 2 \cdot d \cdot \tan\alpha} \simeq 2 \cdot 8.0 \cdot 10^{14}\ \mathrm{km} \cdot \tan 1^\circ.11 \cdot 10^{-2} \simeq 3.1 \cdot 10^{11}\ \mathrm{km} \simeq 2.1 \cdot 10^3\ \mathrm{UA}$$

9. Una foto della Luna al perigeo mostra al centro del disco lunare un cratere di forma circolare le cui dimensioni angolari sono 5". Quanto vale il diametro del cratere in km?

Soluzione

Poiché il cratere è al centro del disco, trascuriamo gli effetti dovuti alla sfericità della Luna. Detti $\boldsymbol{a_L}$ ed $\boldsymbol{e_L}$ il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita della Luna, la distanza $\boldsymbol{D_{LP}}$ della Luna al perigeo vale:

$$D_{LP} = a_L\,(1 - e_L) \simeq 384.4 \cdot 10^3\ km \cdot (1 - 0.05490) \simeq 363.3 \cdot 10^3\ km$$

Il diametro **d** del cratere di dimensioni angolari $\boldsymbol{\alpha}$ sarà quindi dato dalla relazione:

$$\mathrm{d = D_{LP} \cdot \tan\alpha} \simeq 363.3 \cdot 10^3\ \mathrm{km} \cdot \tan\left(\frac{5''}{3600}\right) \simeq 9\ \mathrm{km}$$

10. ζ Boötis è una binaria visuale, situata alla distanza di 180 anni luce dal Sistema Solare, composta da 2 stelle identiche. La magnitudine apparente totale della binaria è 3.79, la separazione angolare tra le due componenti viste dalla Terra è 1.2”. Questo sistema è osservato alla lunghezza d’onda λ = 5500 Å.

1. Che diametro minimo deve avere un telescopio per riuscire a risolvere il sistema binario?
2. Se la lunghezza focale del telescopio è 1 m e il potere risolutivo dell’occhio umano è 2’, calcolare il valore massimo e minimo della lunghezza focale degli oculari che permettono di distinguere le due componenti;
3. Quanto vale la magnitudine assoluta di ciascuna delle due stelle del sistema binario?

Soluzione.

1. Poiché la separazione angolare tra le due stelle è maggiore del valore medio del seeing (circa 1”) che si registra in buona parte delle località sulla superficie della Terra, possiamo affermare che le due stelle possono essere “risolte”. La risoluzione $\boldsymbol{\theta}$ in secondi d’arco di un telescopio di apertura **D** per osservazioni alla lunghezza d’onda **λ** vale:

$$\theta = 1.22\,\frac{\lambda}{D}\cdot 206265''$$

Il telescopio dovrà avere quindi un diametro minimo $\boldsymbol{D_{Min}}$ pari a:

$$D_{Min} = 1.22\,\frac{\lambda}{\theta}\,206265'' = \frac{1.22\cdot 5500\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}\cdot 206265''}{1.2''} \simeq 0.12\ \mathrm{m} = 12\ \mathrm{cm}$$

2. Il rapporto tra la focale $\boldsymbol{F}$ del telescopio e quella $\boldsymbol{f}$ dell’oculare utilizzato, fornisce l’ingrandimento **I**:

$$I = \frac{F}{f}$$

Il minimo ingrandimento $\boldsymbol{I_{min}}$ dell’immagine del sistema binario che permette al nostro occhio di risolvere le due componenti è dato dalla relazione:

$$I_{min} = \frac{\text{risoluzione occhio}}{\text{separazione angolare}} = \frac{2'}{1.2''} = \frac{120''}{1.2''} = 100$$

Per ottenere tale ingrandimento la focale massima $\boldsymbol{f_{max}}$ dell’oculare da utilizzare deve quindi essere pari a:

$$f_{max} = \frac{F}{I_{min}} = \frac{1000\ \mathrm{mm}}{100} = 10\ \mathrm{mm}$$

Con oculari di focale minore otteniamo ingrandimenti maggiori, ma occorre ricordare che nella pratica delle osservazioni visuali non è mai conveniente utilizzare un ingrandimento maggiore di un valore all’incirca pari all’apertura del telescopio espressa in mm, che nel caso in esame vale quindi circa 120. Detto quindi $\boldsymbol{I_{max}}$ il massimo ingrandimento utilizzabile, otteniamo il valore minimo $\boldsymbol{f_{min}}$ per la focale dell’oculare:

$$f_{min} \simeq \frac{F}{I_{max}} \simeq \frac{1000\ \mathrm{mm}}{120} \simeq 8.3\ \mathrm{mm}$$

3. Poiché le due componenti di ζ Boötis hanno magnitudini apparenti $\boldsymbol{m}$ identiche, dalla relazione che fornisce la magnitudine totale di un sistema, detta $\boldsymbol{m_{tot}}$ la magnitudine della binaria otteniamo:

$$m_{tot} = -2.5\cdot\log\,(10^{-0.4m} + 10^{-0.4m}) = -2.5\cdot\log\,(2\cdot 10^{-0.4m}) =$$

$$= -2.5\cdot\log\,2 - 2.5\cdot\log\,(10^{-0.4m})$$

$$m_{tot} + 2.5\cdot\log\,2 = m$$

$$m \simeq m_{tot} + 0.75 \simeq 3.79 + 0.75 \simeq 4.54$$

Data la magnitudine apparente di ciascuna delle due componenti, calcoliamo la loro magnitudine assoluta **M**, esprimendo la distanza **d** in parsec, dalla relazione:

$$M = m + 5 - 5\log d \simeq 4.54 + 5 - 5\log\left(\frac{180\ anni\ luce}{3.2616\ \frac{anni\ luce}{parsec}}\right) \simeq 0.83$$

11. Osservate Marte in "Grande Opposizione" con un telescopio riflettore f/8 con apertura 40.0 cm. Quanto valgono il diametro angolare apparente di Marte e le sue dimensioni lineari sul piano focale del telescopio?

Soluzione.
La caratteristica $\boldsymbol{f/n}$ di un telescopio indica che la focale $\boldsymbol{F}$ del telescopio è $\boldsymbol{n}$ volte maggiore dell'apertura $\boldsymbol{D}$, quindi per il telescopio utilizzato sarà:

$$\mathrm{F = D \cdot n = 40.0\ cm \cdot 8 = 320\ cm = 3.20\ m}$$

Una "Grande Opposizione" è un'opposizione in cui la Terra si trova in prossimità dell'afelio e contemporaneamente Marte si trova in prossimità del Perielio. Dette $\boldsymbol{D_{TA}}$ e $\boldsymbol{D_{MP}}$ le distanze dal Sole della Terra all'afelio e di Marte al perielio e $\boldsymbol{a_T}$, $\boldsymbol{e_T}$, $\boldsymbol{a_M}$ ed $\boldsymbol{e_M}$ i semiassi maggiori e le eccentricità delle orbite della Terra e di Marte, per la distanza $\boldsymbol{D_{TM-GO}}$ Terra-Marte in una Grande Opposizione otteniamo:

$$\mathrm{D_{TM-GO} = D_{MP} - D_{TA} = a_M\,(1 - e_M) - a_T\,(1 + e_T)}$$

$$\mathrm{D_{TM-GO} \simeq 227.9 \cdot 10^6\ km \cdot (1 - 0.09337) - 149.6 \cdot 10^6\ km \cdot (1 + 0.01673) \simeq 5.452 \cdot 10^7\ km}$$

A questa distanza, detto $\boldsymbol{R_M}$ il suo raggio, il diametro apparente di Marte $\boldsymbol{\alpha}$ sarà dato dalla relazione:

$$\alpha = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_{Marte}}}{\mathrm{D_{TM-GO}}}\right) \simeq 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{3397\ \mathrm{km}}{5.452 \cdot 10^7}\right) \simeq 7°.140 \cdot 10^{-3} \simeq 25''.70$$

Le sue dimensioni lineari **d** sul piano focale del telescopio saranno:

$$\mathrm{d = F \cdot \tan\alpha \simeq 320\ cm \cdot \tan\ (7°.140 \cdot 10^{-3}) \simeq 0.40\ mm}$$

Nota: la circostanza descritta nella soluzione richiede l'allineamento tra le linee degli apsidi dei due pianeti. Attualmente le linee degli apsidi di Marte e della Terra formano un angolo di circa 24° e quindi attualmente non si può avere una opposizione di Marte con la Terra all'afelio e Marte contemporaneamente al perielio. Tuttavia, poiché le linee degli apsidi precedono con periodi diversi, la situazione descritta nel problema potrà verificarsi in futuro.

12. Il Telescopio Spaziale Hubble ha uno specchio con diametro di 2.4 m e orbita attorno alla Terra a un'altezza sulla superficie di 539 km. Stimate le dimensioni minime di un corpo che HST è capace di distinguere sulla superficie della Terra osservando alla lunghezza d'onda di 5500 Å.

Soluzione
Detto $\boldsymbol{D_{HST}}$ il diametro del suo specchio, il potere risolutivo teorico $\boldsymbol{\alpha_{HST}}$ di HST in secondi d'arco alla lunghezza d'onda $\boldsymbol{\lambda}$ è dato dalla relazione:

$$\alpha_{\mathrm{HST}} = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{\mathrm{D_{HST}}} \cdot 206265'' \simeq 1.22 \cdot \frac{5500 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}}{2.4\ \mathrm{m}} \cdot 206265'' \simeq 0''.058$$

Questo potere risolutivo consentirebbe a HST di distinguere sulla superficie della Terra oggetti con dimensioni minime $\boldsymbol{d_t}$:

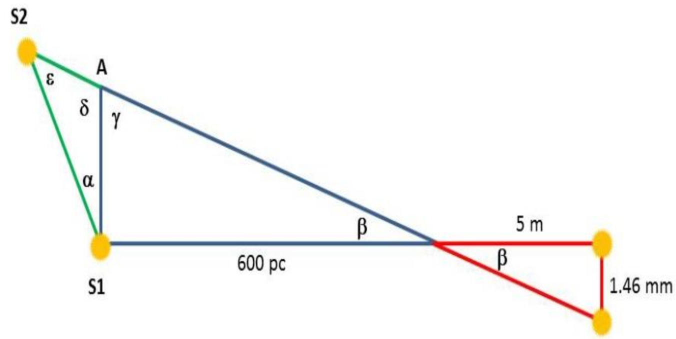
$$\mathrm{d_t = h_{HST} \cdot \tan\alpha_{HST}} = 539\ km \cdot \tan\left(\frac{0''.058}{3600}\right) \simeq 15\ \mathrm{cm}$$

Tuttavia, se puntato verso la superficie della Terra HST subirà gli effetti dell'atmosfera, proprio come se osservasse verso lo spazio dalla superfice. Quindi il suo potere risolutivo effettivo sarà limitato dagli effetti dell'atmosfera terrestre e sarà dell'ordine di 1", consentendogli quindi di distinguere oggetti con dimensioni minime $\mathbf{d_{eff}}$:

$$d_{eff} = h_{HST} \cdot \tan\left(\frac{1''}{3600}\right) \simeq 2.6 \text{ m}$$

13. Sul piano focale di un telescopio con focale di 500 cm, le due componenti di una binaria visuale distano tra di loro 1.46 mm. Sappiamo che una delle due stelle dista dal Sole 600 pc e che il piano orbitale della binaria forma un angolo di 30° (con la seconda stella a distanza maggiore della prima) con la perpendicolare alla direzione di osservazione. Calcolare la distanza tra le due stelle della binaria.

Soluzione



La configurazione descritta nel problema è rappresentata nella figura (non in scala) qui a sinistra, dove le due stelle sono indicate con **S1** e **S2**. Detta **F** la focale del telescopio e **d** la distanza delle due stelle sul piano focale, la distanza angolare **β** osservata è data dalla relazione:

$$\boldsymbol{\beta} = \text{arctg}\,\frac{d}{F} \simeq arctg\frac{1.46\text{ mm}}{5000\text{ mm}} \simeq$$
$$\simeq 1°.67 \cdot 10^{-2} \simeq 60''.2$$

Detta **D** la distanza della stella S1, la distanza S1-A vale:

$$\text{S1} - \text{A} = \text{D} \cdot \tan\beta \simeq$$
$$\simeq 600 \text{ pc} \cdot \tan(1°.67 \cdot 10^{-2}) \simeq 600\,pc \cdot 2.92 \cdot 10^{-4} \simeq 0.175\,pc \simeq 5.41 \cdot 10^{12}\,km$$

Per ricavare la distanza S1-S2, il triangolo S1-S2-A si può risolvere con il teorema dei seni, ma essendo:

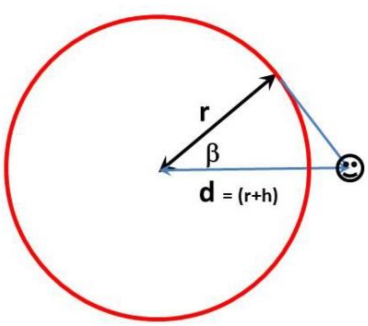
$$\delta = 180° - \gamma = 180° - 180° + 90° + \beta \simeq 90°\,1'$$

possiamo approssimarlo a un triangolo rettangolo (il disegno non è in scala) per cui:

$$S1 - S2 = \frac{S1 - A}{\cos\alpha} \simeq \frac{5.41 \cdot 10^{12}\,km}{\cos 30°} \simeq 6.25 \cdot 10^{12}\,km \simeq 4.17 \cdot 10^{4}\,UA$$

14. La Stazione Spaziale Internazionale orbita a un'altezza sulla superficie della Terra di 412 km. Quanto distano, lungo la superficie della Terra, i due punti più lontani che è possibile osservare simultaneamente in ogni istante dalla ISS? Si trascurino gli effetti dell'atmosfera.

Soluzione



Con riferimento alla figura a sinistra, ricaviamo l'angolo limite di visibilità $\boldsymbol{\beta}$ di un corpo esteso per un osservatore posto a una distanza dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni del corpo.
Detto $\boldsymbol{r}$ il raggio della Terra e $\boldsymbol{h}$ l'altezza della ISS, per la distanza $\boldsymbol{d}$ della ISS dal centro della Terra e per l'angolo $\boldsymbol{\beta}$ si ha:

$$d = r + h = 6378\,km + 412\,km = 6790\,km$$

$$\beta = arcos\left(\frac{r}{d}\right) \simeq arcos\left(\frac{6378\,km}{6790\,km}\right) \simeq 20°.06$$

Dalla ISS sarà quindi possibile osservare un arco di meridiano $\boldsymbol{A}$ che sottende un angolo $\boldsymbol{2\beta}$ e poiché vale la proporzione:

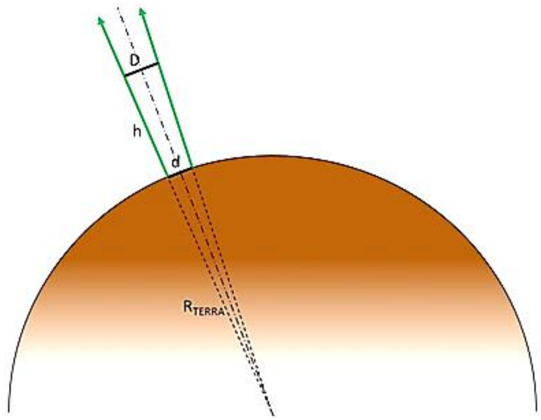
$$360° : 2\beta = 2\,\pi\,r : A$$

ricaviamo:

$$A = \frac{4\,\pi\,r\,\beta}{360°} \simeq \frac{4\,\pi \cdot 6378\text{ km} \cdot 20°.06}{360°} \simeq 4466\text{ km}$$

15. Due puntatori laser di alta potenza distanti 20.0 m l'uno dall'altro, inviano entrambi un sottilissimo fascio di luce in direzione esattamente verticale. Assumendo la superficie della Terra perfettamente sferica, quale sarà la distanza tra i due fasci a un'altezza dal suolo di 70 km?

Soluzione



La situazione descritta nel problema è rappresentata nella figura a sinistra. Detta **d** la distanza tra i due laser, vogliamo calcolare la separazione **D** dei fasci luminosi all'altezza **h** dalla superficie.

Poiché i due laser puntano esattamente in verticale, i loro prolungamenti all'indietro si incontrerebbero al centro del nostro pianeta. Detto $\boldsymbol{R_T}$ il raggio della Terra si ha:

$$d \ll \mathrm{R_T}$$

e possiamo quindi trascurare l'effetto della curvatura terrestre e considerare i due triangoli simili in figura con vertice al centro della Terra per i quali si può scrivere:

$$\mathrm{R_T} : d = (\mathrm{R_T} + h) : D$$

Da cui ricaviamo:

$$\mathrm{D} = \frac{(\mathrm{R_T} + \mathrm{h}) \cdot \mathrm{d}}{\mathrm{R_T}} = \frac{6448 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot 20.0 \text{ m}}{6378 \cdot 10^3 \, m} \simeq 20.2 \, m$$