

# Olimpiadi Italiane di Astronomia 2022

## Corso di preparazione alla Finale Nazionale

### Categoria Junior 2 - Lezione 1

1. Calcolate il più breve periodo di rotazione che un pianeta con densità media pari a quella della Terra può avere affinché un corpo all'equatore non sia espulso a causa della forza centrifuga.

#### Soluzione

Il valore massimo del modulo della velocità di rotazione  $v_r$  per il quale l'attrazione gravitazionale è ancora in grado di trattenere i corpi all'equatore di un pianeta è pari alla prima velocità cosmica. Detto  $R$  il raggio del pianeta,  $M$  la sua massa e  $\rho$  la sua densità si ha:

$$v_r = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{4\pi\rho GR^2}{3}}$$

Poiché la densità del pianeta è pari a quella della Terra, detti  $M_T$  e  $R_T$  massa e raggio della Terra avremo:

$$\rho = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3} \approx \frac{3 \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4\pi \cdot 2.595 \cdot 10^{20} \text{ m}^3} \approx 5495 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Detto  $T$  il periodo di rotazione, si ha:

$$T = \frac{2\pi R}{v_r} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}} \approx \sqrt{\frac{3\pi}{5495 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}}} \approx 5069 \text{ s} \approx 1\text{h } 24\text{m } 29\text{s}$$

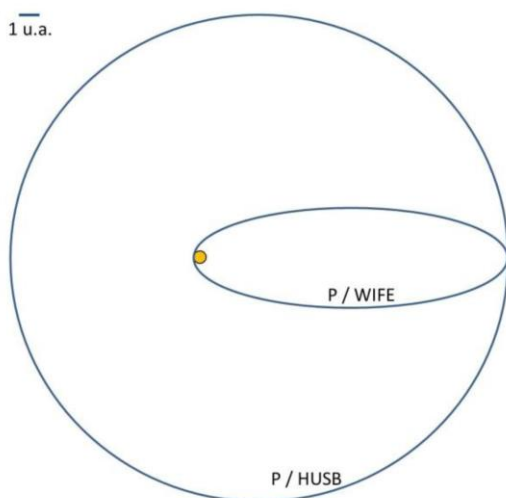
2. Disegnare sullo stesso grafico le orbite delle comete P/HUSB ( $e = 0.230$ ) e P/WIFE ( $e = 0.950$ ) che hanno la stessa linea degli apsidi e distanza all'afelio di 15.02 UA. Il 7 aprile 2016 le due comete si trovavano entrambe al perielio, quale sarà, all'incirca, la loro configurazione a fine Agosto 2037?

#### Soluzione

Dette  $D_P$  e  $D_A$  le distanze al perielio e all'afelio in UA,  $a$  e  $b$  le lunghezze dei semiassi in UA e  $T$  il periodo di rivoluzione in anni, dalle relazioni:

$$D_P = D_A \frac{1-e}{1+e} \quad a = \frac{D_A + D_P}{2} \quad b = a\sqrt{1-e^2} \quad T = \sqrt{a^3}$$

otteniamo per le due comete i valori riportati nella seguente tabella:



Nome	$D_A$	$D_P$	$a$	$b$	$e$	$T$
P/HUSB	15.02	9.40	12.2	11.9	0.230	42.6
P/WIFE	15.02	0.385	7.70	2.40	0.950	21.4

Sapendo che le due comete hanno la stessa linea degli apsidi, otteniamo infine il grafico a sinistra, con entrambe le comete al perielio il 7 aprile 2016.

A fine Agosto 2037 saranno trascorsi circa 21.4 anni (21 anni + 4.8 mesi), un tempo pari a quello di rivoluzione di P/WIFE e pari a circa la metà di quello di rivoluzione di P/HUSB. Quindi la cometa P/WIFE sarà nuovamente nei pressi del perielio, mentre P/HUSB si troverà nei pressi dell'afelio.

3. Calcolate il valore medio del periodo sinodico della Luna (mese sinodico).

**Soluzione**

La durata del mese sinodico  $S$ , ovvero il tempo necessario alla Luna per tornare nella stessa posizione rispetto al Sole (ovvero alla stessa "fase"), si può calcolare a partire dalla durata del mese siderale della Luna  $P$  e dell'anno siderale della Terra  $E$ :

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{E} = \frac{E - P}{P \cdot E}$$

da cui otteniamo:

$$S = \frac{P \cdot E}{E - P} \approx \frac{27.322 \cdot 365.256}{365.256 - 27.322} \approx 29.531 \text{ g} \approx 29 \text{ g } 12 \text{ h } 45 \text{ m}$$

**Nota.**

Poiché le orbite della Terra e della Luna non sono circolari, la durata del mese sinodico varia da un minimo di circa 29.269 giorni a un massimo di circa 29.840 giorni, ovvero in un intervallo di circa  $\pm 7$  ore rispetto alla sua durata media.

4. La stella Kepler-101 ha due pianeti, Kepler-101b e Kepler-101c. Kepler-101b ha un raggio 0.520 volte quello di Giove e una massa 51.0 volte quella della Terra. Kepler-101c ha un raggio 1.23 volte quello della Terra e una massa  $1.20 \cdot 10^{-2}$  volte quella di Giove. Calcolare:
1. l'accelerazione di gravità alla superficie dei due pianeti;
  2. a quale altezza dalla superficie di Kepler-101c si avrà un'accelerazione di gravità pari a quella sulla superficie di Kepler-101b;
  3. la densità dei due pianeti, valutando se sono rocciosi o gassosi.

**Soluzione.**

1. Detti  $M_T$ ,  $M_G$ ,  $R_T$ , e  $R_G$  le masse e i raggi della Terra e di Giove, l'accelerazione di gravità  $g_b$  e  $g_c$  alla superficie dei due pianeti vale:

$$g_b = \frac{G \cdot 51 \cdot M_T}{(0.520 \cdot R_G)^2} \approx \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 51 \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(0.520 \cdot 71490 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 14.7 \frac{m}{s^2}$$

$$g_c = \frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{(1.23 \cdot R_T)^2} \approx \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{(1.23 \cdot 6378 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 24.7 \frac{m}{s^2}$$

2. L'accelerazione di gravità  $g_{ch}$  a un'altezza  $h$  sulla superficie di Kepler-101c vale:

$$g_{ch} = \frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{(1.23 \cdot R_T + h)^2}$$

relazione dalla quale, ponendo  $g_{ch} = g_b$ , otteniamo il valore di  $h$  richiesto :

$$h = \sqrt{\frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{g_b}} - 1.23 \cdot R_T$$

$$h \approx \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{14.7 \frac{m}{s^2}}} - 7.84 \cdot 10^6 \text{ m} \approx 2.33 \cdot 10^6 \text{ m}$$

3. La densità media  $\rho_b$  e  $\rho_c$  dei due pianeti è data dal rapporto tra la loro massa e il loro volume:

$$\rho_b = \frac{3 \cdot 51 \cdot M_T}{4 \pi \cdot (0.520 \cdot R_G)^3} \approx \frac{3 \cdot 51 \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4 \pi \cdot (0.520 \cdot 71490 \cdot 10^3 \text{ m})^3} \approx 1.42 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_c = \frac{3 \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{4\pi \cdot (1.23 \cdot R_T)^3} \approx \frac{3 \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{4\pi \cdot (1.23 \cdot 6378 \cdot 10^3 \text{ m})^3} \approx 1.13 \cdot 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Dalle densità ottenute si deduce che il pianeta Kepler-101b è di tipo gassoso, mentre Kepler-101c è di tipo roccioso. Si consideri infatti che Giove ha una densità media di  $1.33 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , mentre la densità media della Terra è di  $5.51 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

5. Supponete che la massa del Sole si dimezzi. Nell'ipotesi che restino inalterati il periodo di rotazione della Terra e il semiasse maggiore dell'orbita, da quanti giorni solari medi sarebbe formato un anno? Quanto varrebbero un parsec, un anno luce e il loro rapporto?

### Soluzione

Detti  $a$  il semiasse maggiore dell'orbita della Terra e  $M_{N\odot}$  la nuova massa del Sole, il nuovo periodo di rivoluzione  $T$  della Terra varrebbe:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G M_{N\odot}}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.348 \cdot 10^{33} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 0.9945 \cdot 10^{30} \text{ kg}}} \approx 4.463 \cdot 10^7 \text{ s} \approx 516.5 \text{ giorni}$$

Poiché il semiasse dell'orbita resta invariato, la lunghezza del parsec non cambierebbe, mentre la lunghezza di un anno luce sarebbe:

$$1 \text{ anno luce} = \text{velocità della luce} \cdot \text{numero di secondi in un anno}$$

$$1 \text{ anno luce} \approx 299792 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 4.463 \cdot 10^7 \text{ s} \approx 1.338 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

e il nuovo rapporto  $K$  parsec/anno luce sarebbe:

$$K = \frac{\text{parsec}}{\text{anno luce}} \approx \frac{3.0857 \cdot 10^{13} \text{ km}}{1.338 \cdot 10^{13} \text{ km}} \approx 2.306$$

### Nota.

Il valore attuale dell'anno luce è definito utilizzando l'Anno Giuliano (=365.25 giorni solari medi), mentre nella soluzione per il suo calcolo si utilizza il nuovo anno siderale, che fornisce comunque una buona approssimazione del valore cercato.

6. Calcolate la velocità orbitale della Terra intorno al Sole al perielio e all'afelio. Trascurate la massa della Terra rispetto a quella del Sole.

### Soluzione

Detti  $M_{\odot}$  la massa del Sole,  $a$  il semiasse maggiore dell'orbita della Terra e  $P$  il periodo di rivoluzione, la media delle velocità della Terra intorno al Sole  $v_{mT}$  può essere ricavata con le relazioni:

$$v_{mT} = \frac{2\pi a}{P} \approx \frac{2\pi \cdot 149.6 \cdot 10^6 \text{ km}}{3.1558 \cdot 10^7 \text{ s}} \approx 29.79 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v_{mT} = \sqrt{\frac{G M_{\odot}}{a}} \approx \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{149.6 \cdot 10^9 \text{ m}}} \approx 2.979 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 29.79 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

I due risultati sono ovviamente coincidenti nei limiti di precisione delle grandezze utilizzate.

Detta  $e$  l'eccentricità dell'orbita della Terra, per le velocità al perielio  $v_{pT}$  e all'afelio  $v_{aT}$  si ha:

$$v_{pT} = v_{mT} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \approx 29.79 \frac{\text{km}}{\text{s}} \sqrt{\frac{1+0.01673}{1-0.01673}} \approx 30.29 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v_{aT} = v_{mT} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \approx 29.79 \frac{\text{km}}{\text{s}} \sqrt{\frac{1-0.01673}{1+0.01673}} \approx 29.30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

7. Schematizzando la Via Lattea come un disco uniforme con un diametro di  $1.06 \cdot 10^5$  anni luce e spessore trascurabile, si fornisca una stima della sua massa totale in masse solari, sapendo che il Sole si trova a una distanza dal centro di circa 8.34 kpc e assumendo per l'anno galattico una durata di  $233 \cdot 10^6$  anni terrestri. Stimare infine la velocità di fuga dalla Via Lattea a una distanza dal centro pari al doppio del suo diametro.

### Soluzione

L'anno galattico  $T$  vale:

$$T \approx 233 \cdot 10^6 \cdot 365.256 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 7.35 \cdot 10^{15} \text{ s}$$

la massa  $M_g$  della Via Lattea entro una distanza  $a$  di 8.34 kpc ( $\approx 27.2 \cdot 10^3$  anni luce  $\approx 2.57 \cdot 10^{20}$  m) dal centro vale:

$$M_g = \frac{4 \pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} \approx \frac{39.48 \cdot 1.70 \cdot 10^{61} m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 5.41 \cdot 10^{31} s^2} \approx 1.86 \cdot 10^{41} \text{ kg} \approx 93.5 \cdot 10^9 M_\odot$$

Avendo schematizzato la Via Lattea come un disco uniforme, la massa è proporzionale all'area del disco. Per ottenere la massa totale  $M_G$  della Via Lattea entro il suo raggio  $R$  ( $\approx 53000$  anni luce  $\approx 16.2$  kpc), possiamo quindi usare la proporzione:

$$M_G : \pi R^2 = M_g : \pi a^2$$

da cui si ottiene:

$$M_G = M_g \left(\frac{R}{a}\right)^2 \approx 1.86 \cdot 10^{41} \text{ kg} \left(\frac{16.2 \text{ kpc}}{8.34 \text{ kpc}}\right)^2 \approx 7.06 \cdot 10^{41} \text{ kg} \approx 355 \cdot 10^9 M_\odot$$

La velocità di fuga  $v_f$  a una distanza  $d$  dal centro di un corpo di massa  $M$  è data dalla relazione:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 G M}{d}}$$

Quindi nel nostro caso detto  $D$  il diametro della galassia:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 G M_G}{2 D}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 7.06 \cdot 10^{41} \text{ kg}}{2.01 \cdot 10^{21} \text{ m}}} \approx 217 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 217 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

### Nota.

In questa semplice schematizzazione della Via Lattea non si sta tenendo conto degli effetti della “materia oscura” e della sua distribuzione.

8. Calcolate il periodo di rivoluzione e il modulo della velocità tangenziale di un corpo che si muove su un'orbita circolare a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi di un buco nero con massa pari a 2.51 masse solari.

### Soluzione

Dette  $M_{BN}$  e  $M_\odot$  le masse del buco nero e del Sole, il “Raggio di Schwarzschild”  $R_s$  del buco nero vale:

$$R_s = \frac{2 G M_{BN}}{c^2} = \frac{2 G \cdot 2.51 \cdot M_\odot}{c^2} \approx$$

$$\approx \frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 4.99 \cdot 10^{30} kg}{8.988 \cdot 10^{16} \frac{m^2}{s^2}} \approx 7410 m = 7.41 km$$

Detto  $a$  ( $= R_S + 10 km$ ) il raggio dell'orbita, dalla III Legge di Keplero il periodo di rivoluzione  $T$  vale:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G \cdot 2.51 \cdot M_\odot}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 5.277 \cdot 10^{12} m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 4.99 \cdot 10^{30} kg}} \approx 7.91 \cdot 10^{-4} s$$

Con tale periodo il modulo  $v$  della velocità tangenziale vale:

$$v = \frac{2 \pi a}{T} = \frac{109.4 km}{7.91 \cdot 10^{-4} s} \approx 138 \cdot 10^3 \frac{km}{s} \approx 0.461 c$$

**Nota:** nella soluzione stiamo assumendo che le leggi di Keplero siano valide a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi del buco nero. La soluzione rigorosa del problema richiede l'uso di relazioni derivate dalla teoria della Relatività Generale.

9. Nel 2015 il team internazionale LIGO/VIRGO ha rivelato le onde gravitazionali prodotte dalla fusione di due buchi neri con 29 e 36 volte la massa del Sole, che hanno formato un unico buco nero con 62 volte la massa del Sole. Calcolare:

- la quantità totale di energia emessa utilizzando la relazione  $E = \Delta m c^2$ ;
- il raggio massimo del buco nero risultante dalla fusione.

**Soluzione.**

Espressa in masse solari  $M_\odot$ , la massa  $\Delta m$  che si trasforma in energia vale:

$$\Delta m = (29M_\odot + 36M_\odot) - 62M_\odot = 3M_\odot \approx 3 \cdot 1.989 \cdot 10^{30} kg \approx 5.967 \cdot 10^{30} kg$$

La massa del buco nero risultante è quindi di  $3M_\odot$  minore della somma della massa dei due buchi neri che si sono fusi. La quantità totale di energia  $E$  emessa nello spazio sotto forma di onda gravitazionale è stata:

$$E = \Delta m \cdot c^2 \approx 5.967 \cdot 10^{30} kg \cdot 8.988 \cdot 10^{16} \frac{m^2}{s^2} \approx 5.363 \cdot 10^{47} \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 5.363 \cdot 10^{47} J$$

La velocità di fuga  $v$  dalla superficie di un corpo di massa  $M$  e raggio  $R$  (seconda velocità cosmica) vale:

$$v = \sqrt{\frac{2 G M}{R}}$$

Nel caso in cui  $v = c$ , il corrispondente raggio  $R_S$  è detto "raggio di Schwarzschild" e rappresenta il limite (raggio) massimo di un buco nero di massa  $M$  (pari a  $62M_\odot$  nel nostro caso):

$$R_S = \frac{2 \cdot G \cdot 62 M_\odot}{c^2} \approx \frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 1.233 \cdot 10^{32} kg}{8.988 \cdot 10^{16} \frac{m^2}{s^2}} \approx 183 \cdot 10^3 m = 183 km$$

10. La Luna si allontana dalla Terra a una velocità di circa 3.8 cm/anno. Tra quanto tempo non sarà più possibile osservare dalla Terra eclissi totali di Sole?

**Soluzione**

Le eclissi totali di Sole non avranno più luogo quando da un qualsiasi punto sulla superficie della Terra il diametro apparente della Luna al perigeo sarà minore del diametro apparente del Sole all'afelio  $D_{\odot A}$ . Detta

$d_{TA}$  la distanza della Terra dal Sole all'afelio e  $R_{\odot}$  il raggio del Sole, il diametro angolare del Sole all'afelio vale:

$$D_{\odot A} = 2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{R_{\odot}}{d_{TA}} \right) \approx 2 \cdot \sin^{-1} \left( \frac{6.955 \cdot 10^5 \text{ km}}{152.1 \cdot 10^6 \text{ km}} \right) \approx 0^{\circ}.5240 \approx 31'.44$$

Detto  $R_L$  il raggio della Luna, la distanza di fine eclissi  $d_{FE}$  è quella dalla quale il disco lunare sottende un angolo pari a  $D_{\odot A}$  ed è data da:

$$d_{FE} = \frac{2 R_{Luna}}{\sin D_{\odot A}} \approx \frac{3476 \text{ km}}{\sin 0^{\circ}.5240} \approx 380.1 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Detti  $a_L$  ed  $e_L$  il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita lunare, la distanza attuale del centro della Luna al perigeo  $d_{LP}$  dal centro della Terra vale:

$$d_{LP} = a_L (1 - e_L) \approx 363.3 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Detto  $R_T$  il raggio della Terra, la distanza minima di un punto sulla superficie della Terra dal centro della Luna  $d_{TP}$  si ha quando la Luna è al perigeo ed è vista allo zenith (circostanza che può verificarsi solo per la fascia di latitudini tra circa  $+28^{\circ}$  e  $-28^{\circ}$ ) e attualmente vale:

$$d_{TP} = d_{LP} - R_T \approx 356.9 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Quindi il tempo  $T$  necessario affinché la distanza della Luna al perigeo diventi uguale a  $d_{FE}$  è dato da:

$$T = \frac{d_{FE} - d_{TP}}{V_a} \approx \frac{380.1 \cdot 10^8 \text{ cm} - 356.9 \cdot 10^8 \text{ cm}}{3.8 \frac{\text{cm}}{\text{anno}}} \approx 61 \cdot 10^7 \text{ anni}$$

#### Nota.

Nella soluzione si assume che la velocità di allontanamento, le eccentricità dell'orbita lunare e dell'orbita della Terra e il raggio del Sole rimangano costanti. Anche considerando le loro variazioni si stima un tempo di fine eclissi simile a quello calcolato.

11. Intorno a una stella a 10 anni luce dal Sole è stato scoperto un pianeta di massa  $6.5 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , che percorre intorno a essa, in 20 anni, un'orbita circolare il cui piano è perpendicolare alla direzione di osservazione e il cui raggio sottende un angolo di  $4''.89$ . Si calcoli la massa della stella in unità di masse solari e quanto varrebbe il periodo di rivoluzione del pianeta se orbitasse intorno al Sole.

#### Soluzione.

Poiché il piano dell'orbita è perpendicolare alla direzione di osservazione, detta  $D$  la distanza della stella dal Sole, il valore del raggio dell'orbita  $a$  si ricava dalla relazione:

$$a = D \cdot \tan \alpha \approx 9460.7 \cdot 10^{10} \text{ km} \cdot \tan \left( \frac{4''.89}{3600} \right) \approx 224 \cdot 10^7 \text{ km}$$

Detti  $M_S$  e  $M_P$  le masse della stella e del pianeta e  $T$  il periodo orbitale del pianeta, dalla III Legge di Keplero ricaviamo:

$$M_S + M_P = \frac{4 \pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} = \frac{39.48 \cdot 1.12 \cdot 10^{37} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 3.98 \cdot 10^{17} \text{ s}} \approx 1.66 \cdot 10^{31} \text{ kg}$$

Poiché la massa del pianeta è trascurabile rispetto a tale valore, il risultato corrisponde alla massa della stella e in masse solari si ha:

$$M_S \approx 1.66 \cdot 10^{31} \text{ kg} \approx 8.35 M_{\odot}$$

Il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta in unità astronomiche vale:

$$a \approx 224 \cdot 10^7 \text{ km} \approx 15.0 \text{ UA}$$

Quindi il periodo di rivoluzione  $T_S$  del pianeta attorno al Sole in anni varrebbe:

$$T_S = \sqrt{a^3} \approx 58 \text{ anni}$$

**Nota.**

Il corpo in orbita attorno alla stella è sicuramente un pianeta, in quanto il limite inferiore per la massa delle stelle più piccole, le "Brown Dwarf", è di circa:  $M_{BD} \approx 0.012 \cdot M_{\odot} \approx 2.4 \cdot 10^{28} \text{ kg} \approx 3.7 \cdot 10^3 \cdot M_p$ .

12. La stella  $\epsilon$  Eri si trova a 10.5 anni luce dal Sole e intorno a essa ruota un pianeta,  $\epsilon$  Eri b, che percorre un'orbita circolare il cui raggio vale 3.39 UA e il cui piano risulta perpendicolare alla direzione di osservazione. Calcolate la parallasse annua di  $\epsilon$  Eri osservata dalla Terra, la parallasse annua del Sole osservato da  $\epsilon$  Eri b e a quanto corrisponde un pc misurato da  $\epsilon$  Eri b.

**Soluzione**

La parallasse annua, in secondi d'arco, è pari all'inverso della distanza in parsec. Dalla Terra 1 parsec è pari a circa 3.2616 anni luce. Quindi, detta  $d$  la distanza dal Sole in anni luce,  $\epsilon$  Eri si trova a una distanza  $D_{\epsilon-Eri}$  in parsec:

$$D_{\epsilon-Eri} = \frac{d}{3.2616} \approx \frac{10.5 \text{ anni luce}}{3.2616 \text{ anni} \frac{\text{luce}}{\text{parsec}}} \approx 3.22 \text{ parsec} \approx 664 \cdot 10^3 \text{ UA}$$

e quindi la sua parallasse  $\pi_{\epsilon-Eri}$  vale:

$$\pi_{\epsilon-Eri} = \frac{1}{3.22 \text{ parsec}} \approx 0''.311$$

Per calcolare la parallasse del Sole visto da  $\epsilon$  Eri b, dobbiamo considerare che il suo valore dipende dalle dimensioni della "base", ovvero dal semiasse maggiore dell'orbita. Tanto maggiore è la base, tanto maggiore, a parità di distanza di una stella, sarà la sua parallasse. Detto  $\pi_{\odot}$  l'angolo di parallasse del Sole visto da  $\epsilon$  Eri b e  $a_{\epsilon-Eri b}$  il raggio dell'orbita di  $\epsilon$  Eri b avremo:

$$\pi_{\odot} = \tan^{-1} \left( \frac{a_{\epsilon-Eri b}}{D_{\epsilon-Eri}} \right) \approx \tan^{-1} \left( \frac{3.39 \text{ UA}}{664 \cdot 10^3 \text{ UA}} \right) \approx 2^\circ.93 \cdot 10^{-4} \approx 1''.05$$

Si noti che questo valore corrisponde a 3.39 volte la parallasse misurata dalla Terra per  $\epsilon$  Eri, ovvero al rapporto tra il semiasse maggiore dell'orbita di  $\epsilon$  Eri b e quello della Terra. La conversione tra parsec definiti con osservazioni dalla Terra e da  $\epsilon$  Eri b segue la stessa correzione, quindi:

$$1 \text{ parsec di } \epsilon \text{ Eri b} \approx 3.39 \text{ parsec terrestri}$$

13. L'asteroide Pallas ha un raggio medio di 512 km; l'accelerazione di gravità in superficie vale:  $0.210 \text{ m/s}^2$ . Calcolare la densità dell'asteroide in  $\text{kg/m}^3$  e in  $\text{g/cm}^3$  e la velocità di fuga sulla superficie. Calcolare la velocità di impatto con l'asteroide di un corpo di piccola massa lasciato cadere, da fermo, da una distanza di 800 km dalla superficie.

**Soluzione**

Detto  $R$  il raggio, l'asteroide ha un volume  $V$  pari a:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = 56.2 \cdot 10^7 \text{ km}^3 = 56.2 \cdot 10^{16} \text{ m}^3$$

Nota l'accelerazione di gravità alla sua superficie ricaviamo la massa  $M$  e la densità  $\rho$  di Pallas:

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G} \approx \frac{0.210 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2.62 \cdot 10^{11} \text{ m}^2}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}} \approx 8.24 \cdot 10^{20} \text{ kg}$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{8.25 \cdot 10^{20} \text{ kg}}{56.2 \cdot 10^{16} \text{ m}^3} \approx 1470 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1.47 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

La velocità di fuga  $\mathbf{v}_f$  dall'asteroide vale:

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20} kg}{512000 m}} \approx 463 \frac{m}{s} = 0.463 \frac{km}{s}$$

La distanza  $\mathbf{h}$  da cui cade il corpo è dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni di Pallas. Non possiamo quindi applicare le leggi del moto uniformemente accelerato, ma utilizziamo la legge di conservazione dell'energia meccanica. Posto  $\mathbf{H} = h + R$  e dette  $\mathbf{v}_i$  e  $\mathbf{v}_0$  le velocità di impatto e iniziale si ha:

$$\frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{H}$$

da cui, essendo la velocità iniziale nulla, si ricava:

$$v_i = \sqrt{2GM \left( \frac{H-R}{HR} \right)} = \sqrt{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20} kg \left( \frac{800 \cdot 10^3 m}{6.72 \cdot 10^{11} \cdot m^2} \right)} \approx 362 \frac{m}{s}$$

14. La stella Castore (=  $\alpha$  Gem) ha una parallasse di  $0''.0761$  ed è un sistema binario visuale con periodo di rivoluzione di 306 anni. Il semiasse maggiore dell'orbita delle componenti forma un angolo di  $90^\circ$  rispetto alla direzione di osservazione e le sue dimensioni angolari sono di  $6.0''$ . Determinare la somma delle masse delle due componenti in unità della massa del Sole.

### Soluzione

Detta  $\mathbf{D}$  la distanza di Castore dal Sole e  $\mathbf{\pi}$  la sua parallasse si ha:

$$D = \frac{1}{\pi} \approx \frac{1}{0''.0761} \approx 13.1 pc \approx 4.05 \cdot 10^{14} km$$

Possiamo calcolare le dimensioni lineari  $\mathbf{a}$  del semiasse maggiore dell'orbita a partire dalle sue dimensioni apparenti  $\mathbf{\beta}$ . Poiché il piano dell'orbita è perpendicolare alla direzione di osservazione sarà:

$$a = D \cdot \tan \beta \approx 4.05 \cdot 10^{14} km \cdot \tan \left( \frac{6.0''}{3600} \right) \approx 1.2 \cdot 10^{10} km$$

Dette  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{m}$  le masse delle due componenti e  $\mathbf{T}$  il periodo di rivoluzione, vale la relazione:

$$M + m = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} \approx \frac{39.48 \cdot 1.7 \cdot 10^{39} m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 9.33 \cdot 10^{19} s^2} \approx 1.1 \cdot 10^{31} kg \approx 5.5 M_\odot$$

15. La stazione spaziale Internazionale (ISS) orbita intorno alla Terra su un'orbita circolare con una velocità di 7.66 km/s. Determinare l'altezza sulla superficie della ISS e il suo periodo di rivoluzione. Se un osservatore posto al livello del mare vede la ISS transitare allo zenith, quanto dura, trascurando la rotazione della Terra, la visibilità della ISS da un lato all'altro dell'orizzonte?

### Soluzione

Poiché la ISS è in orbita circolare stabile, la sua velocità è pari alla prima velocità cosmica. Detti  $\mathbf{V}_{ISS}$  il modulo della velocità orbitale,  $\mathbf{h}$  l'altezza sulla superficie  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{R}$  la massa e il raggio della Terra, si ha:

$$V_{ISS} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R+h}}$$

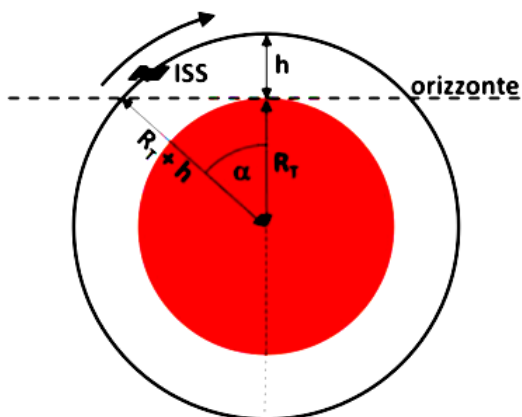
da cui ricaviamo:

$$h = \frac{G \cdot M}{V_{ISS}^2} - R \approx \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} kg}{5.87 \cdot 10^7 \frac{m^2}{s^2}} - 6378 km \approx 415 km$$



Il periodo di rivoluzione  $T$  è dato dalla relazione:

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{V_{ISS}} \approx \frac{2\pi \cdot 6793 \cdot 10^3 \text{ m}}{7.66 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 5570 \text{ s} \approx 1\text{h } 32.8 \text{ m}$$



La configurazione di un passaggio zenitale, trascurando la rotazione della Terra, è illustrata nella figura a sinistra.

La ISS risulterà visibile per tutto il tempo impiegato per percorrere un angolo  $\varphi = 2\alpha$ .

Se, in prima approssimazione, assumiamo che la rifrazione atmosferica all'orizzonte (il cui valore è di circa  $35'$ ) possa essere semplicemente aggiunta ad  $\alpha$ , avremo:

$$\varphi = 2\alpha + 70'$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{R}{R+h}\right) = 19^\circ.97$$

$$\varphi = 2\alpha + 70' = 41^\circ.11$$

Detto  $T_p$  il tempo per cui la ISS rimane visibile, per un passaggio zenitale vale la proporzione

$$T : 360^\circ = T_p : \varphi$$

e quindi:

$$T_p = \frac{\varphi \cdot T}{360^\circ} \approx \frac{41^\circ.11 \cdot 5570 \text{ s}}{360^\circ} \approx 636 \text{ s} = 10.6 \text{ m}$$

16. Il limite inferiore dell'anello D e il limite superiore dell'anello A di Saturno ruotano intorno al pianeta con velocità tangenziali:  $v_D \approx 23.80 \text{ km/s}$  e  $v_A \approx 16.65 \text{ km/s}$ . Sapendo che gli anelli sono composti in massima parte da acqua allo stato ghiacciato (per la densità del ghiaccio si assuma  $\rho_g \approx 920 \text{ kg/m}^3$ ), verificate se gli anelli si trovano all'interno del limite di Roche di Saturno. Considerate accettabile una tolleranza del 10% sui risultati ottenuti.

### Soluzione

Indicando con  $M_S$  la massa di Saturno, dalla formula della prima velocità cosmica, si ottiene che il limite inferiore dell'anello D e il limite superiore dell'anello A si trovano a distanze  $d_D$  e  $d_A$  dal centro di Saturno rispettivamente pari a:

$$d_D = \frac{G M_S}{v_D^2} \approx \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26} \text{ kg}}{566.4 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 67.00 \cdot 10^6 \text{ m} = 67.00 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$d_A = \frac{G M_S}{v_A^2} \approx \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26} \text{ kg}}{277.2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 136.9 \cdot 10^6 \text{ m} = 136.9 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Per gli anelli una buona approssimazione del limite di Roche di Saturno è data dalla relazione:

$$d \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{M_S}{\rho_g}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{5.685 \cdot 10^{26} \text{ kg}}{920 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 129 \cdot 10^6 \text{ m} = 129 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Quindi, considerando le approssimazioni usate e una tolleranza del 10% (pari a circa  $12.9 \cdot 10^3 \text{ km}$ ), possiamo affermare che fino al bordo superiore dell'anello A l'intera struttura degli anelli si trova all'interno del limite di Roche di Saturno.