Olimpiadi Italiane di Astronomia 2022
Corso di preparazione alla Finale Nazionale
Categoria Junior 1 - Lezione 2

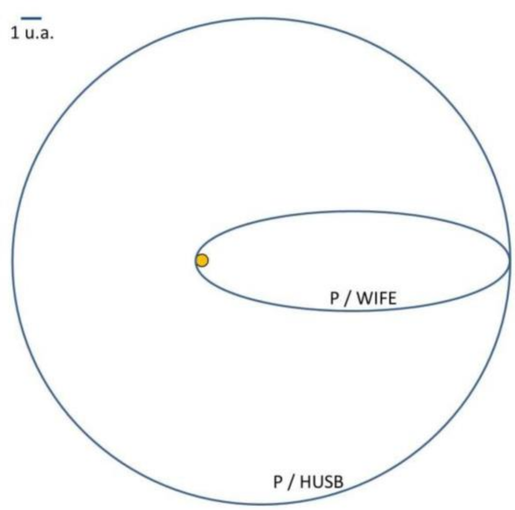
1. Disegnare sullo stesso grafico le orbite delle comete P/HUSB (e = 0.230) e P/WIFE (e = 0.950) che hanno la stessa linea degli apsidi e distanza all'afelio di 15.02 UA. Il 7 aprile 2016 le due comete si trovavano entrambe al perielio, quale sarà, all'incirca, la loro configurazione a fine Agosto 2037?

Soluzione

Dette $\boldsymbol{D_P}$ e $\boldsymbol{D_A}$ le distanze al perielio e all'afelio in UA, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ le lunghezze dei semiassi in UA e $\boldsymbol{T}$ il periodo di rivoluzione in anni, dalle relazioni:

$$D_P = D_a \frac{1-e}{1+e} \qquad a = \frac{D_a + D_p}{2} \qquad b = a\sqrt{1-e^2} \qquad T = \sqrt{a^3}$$

otteniamo per le due comete i valori riportati nella seguente tabella:



Nome	D_A	D_P	a	b	e	T
P/HUSB	15.02	9.40	12.2	11.9	0.230	42.6
P/WIFE	15.02	0.385	7.70	2.40	0.950	21.4

Sapendo che le due comete hanno la stessa linea degli apsidi, otteniamo infine il grafico a sinistra, con entrambe le comete al perielio il 7 aprile 2016.

A fine Agosto 2037 saranno trascorsi circa 21.4 anni (21 anni + 4.8 mesi), un tempo pari a quello di rivoluzione di P/WIFE e pari a circa la metà di quello di rivoluzione di P/HUSB. Quindi la cometa P/WIFE sarà nuovamente nei pressi del perielio, mentre P/HUSB si troverà nei pressi dell'afelio.

2. Due comete hanno i seguenti parametri orbitali.
Cometa 1: periodo orbitale 0.1543 anni, eccentricità dell'orbita 0.9842.
Cometa 2: periodo orbitale 0.2542 anni, eccentricità dell'orbita 0.9833.
Quale delle due comete ha un'orbita stabile intorno al Sole?

Soluzione

Dai periodi orbitali $\boldsymbol{T_1}$ e $\boldsymbol{T_2}$ ricaviamo i semiassi maggiori $\boldsymbol{a_1}$ e $\boldsymbol{a_2}$ delle due orbite:

$$a_1 = \sqrt[3]{T_1^{\,2}} = \sqrt[3]{2.381 \cdot 10^{-2}\ \text{anni}} \simeq 0.2877\ \text{UA} \simeq 4.304 \cdot 10^7\ \text{km}$$

$$a_2 = \sqrt[3]{T_2^{\,2}} = \sqrt[3]{6.462 \cdot 10^{-2}\ \text{anni}} \simeq 0.4013\ \text{UA} \simeq 6.003 \cdot 10^7\ \text{km}$$

Possiamo adesso ricavare la distanza al perielio $\boldsymbol{D_{P1}}$ e $\boldsymbol{D_{P2}}$ delle due comete:

$$D_{P1} = a_1\,(1 - e_1) = 4.304 \cdot 10^7\ \text{km} \cdot 0.0158 \simeq 6.80 \cdot 10^5\ \text{km}$$

$$D_{P2} = a_2\,(1 - e_2) = 6.003 \cdot 10^7\ \text{km} \cdot 0.0167 \simeq 1.00 \cdot 10^6\ \text{km}$$

Detto $\boldsymbol{R_\odot}$ il raggio del Sole, notiamo che il perielio della prima cometa si trova all'interno del Sole:

$$D_{P1} < R_\odot \simeq 6.955 \cdot 10^5\ \text{km}$$

Quindi la prima cometa potrebbe effettuare al più un passaggio al perielio, finendo però per cadere all'interno del Sole.

3. Supponete di comprimere radialmente, mantenendo invariata la loro massa, il Sole e la Terra. A partire da quali dimensioni (Raggio di Schwarzschild) diventerebbero dei buchi neri?

Soluzione

Per un corpo di massa $\boldsymbol{M}$ si definisce "Raggio di Schwarzchild" (o "raggio dell'orizzonte degli eventi") $\mathbf{R_S}$ la distanza dal centro del corpo alla quale la velocità di fuga (o seconda velocità cosmica) $\mathbf{v_f}$ è pari a quella della luce:

$$\mathrm{v_f} = \mathrm{c} = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{G}\,\mathrm{M}}{\mathrm{R_S}}} \qquad \text{da cui si ricava:} \quad R_s = \frac{2\,G\,M}{c^2}$$

Dette $\boldsymbol{M_\odot}$ e $\boldsymbol{M_T}$ le masse del Sole e della Terra, i due raggi di Schwarzchild $\boldsymbol{R_{S\odot}}$ e $\boldsymbol{R_{ST}}$ valgono:

$$R_{S\odot} = \frac{2\,G\,\boldsymbol{M_\odot}}{c^2} \simeq \frac{2\ \cdot 6.674\ \cdot\ 10^{-11}\dfrac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 1.989\ \cdot\ 10^{30}\,kg}{8.988\ \cdot\ 10^{16}\ \dfrac{m^2}{s^2}} \simeq 2.954\ \cdot 10^3\ m$$

$$R_{ST} = \frac{2\,G\,\boldsymbol{M_T}}{c^2} \simeq \frac{2\ \cdot 6.674\ \cdot\ 10^{-11}\dfrac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 5.972\ \cdot\ 10^{24}\,kg}{8.988\ \cdot\ 10^{16}\ \dfrac{m^2}{s^2}} \simeq 8.869\ \cdot 10^{-3}\ m$$

4. Calcolare il "Raggio di Schwarzchild" del buco nero supermassiccio che si trova al centro della Via Lattea, sapendo che ha una massa di $3.45 \cdot 10^6$ masse solari. Esprimere il risultato in km, anni luce, parsec e unità astronomiche.

Soluzione

Per un corpo di massa **M** il "Raggio di Schwarzchild" (o "raggio dell'orizzonte degli eventi") $\mathrm{R_S}$ è dato dalla relazione:

$$R_s = \frac{2\,G\,M}{c^2}$$

Detta $\boldsymbol{M_{BH}}$ la massa del buco nero supermassiccio al centro della Via Lattea, il suo "Raggio di Schwarzchild" $\boldsymbol{R_{BH}}$ vale:

$$R_{BH} = \frac{2\,G\,\boldsymbol{M_{BH}}}{c^2} \simeq \frac{2\ \cdot 6.674\ \cdot\ 10^{-11}\dfrac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 3.45\ \cdot\ 10^6\cdot 1.989\ \cdot\ 10^{30}\,kg}{8.988\ \cdot\ 10^{16}\ \dfrac{m^2}{s^2}} \simeq$$

$$\simeq 1.02\ \cdot\ 10^7\ km = 1.08\ \cdot\ 10^{-6}\ anni\ luce = 3.31\ \cdot\ 10^{-7}\ pc = 6.83\ \cdot\ 10^{-2}\ UA$$

5. Un pianeta di massa $1.6 \cdot 10^{26}$ kg si muove attorno a una stella su un'orbita il cui semiasse maggiore è di 9.00 UA con un periodo di 20.0 anni. Trovare la massa (in kg e in unità di masse solari) e il raggio (in km e in unità del raggio solare) della stella, sapendo che l'accelerazione di gravità sulla fotosfera della stella è 54 volte quella che si ha sulla superficie della Terra.

Soluzione

Detto **a** il semiasse maggiore dell'orbita e **T** il periodo di rivoluzione, trascurando la massa del pianeta (vedere nota alla fine), ricaviamo la massa della stella $\mathbf{M_s}$ dalla III legge di Keplero:

$$M_s = \frac{4\,\pi^2\,a^3}{G\,T^2} \simeq \frac{39.48\ \cdot 2.44\ \cdot 10^{36}\ m^3}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\frac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot 3.98\ \cdot\ 10^{17}\ s^2} \simeq 3.63\ \cdot\ 10^{30}\ kg \simeq 1.82\ M_\odot$$

Detta $\mathbf{g_S}$ l'accelerazione di gravità sulla fotosfera della stella e $\mathbf{g_T}$ l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra, possiamo ricavare il raggio della stella $\mathbf{R_s}$ dalla relazione:

$$R_s = \sqrt{\frac{G\ \cdot M_s}{g_S}} = \sqrt{\frac{G\ \cdot M_s}{54\ \cdot\ g_{Terra}}}$$

$$R_S\ \simeq\ \sqrt{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\frac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot\ 3.63\ \cdot\ 10^{30}\ kg}{54\ \cdot 9.807\ \frac{m}{s^2}}}\ \simeq\ 6.76\ \cdot\ 10^5\ km \simeq 0.973\ R_\odot$$

Nota.
L'assunzione iniziale massa del pianeta trascurabile rispetto a quella, non ancora nota, della stella, risulta giustificata in quanto sappiamo, dallo studio della struttura ed evoluzione stellare, che la massa minima di una stella è: $M_{\text{minima stella}}\ \geq 0.08\ \cdot M_\odot\ \simeq\ 1.59\ \cdot\ 10^{29}\ \text{kg}\ \simeq 1000\ \cdot M_{\text{pianeta}}$

6. Nel 1968, l'Apollo 8 è stata la prima missione della NASA con equipaggio umano a entrare in orbita lunare, dove rimase esattamente per 20 ore, compiendo 10 orbite circolari complete prima di rientrare a Terra. Calcolate la distanza dalla superficie lunare della navicella Apollo 8 durante le orbite e la sua velocità.

Soluzione.
Detto **n** il numero di orbite e **T** il tempo totale trascorso in orbita, il periodo orbitale **P** valeva:

$$P = \frac{T}{n} = \frac{20\ h}{10} = 2h = \ 7200\ s$$

Detta **M** la massa della Luna, dalla III legge di Keplero il raggio **a** dell'orbita valeva:

$$a = \sqrt[3]{\frac{G\,M\,P^2}{4\,\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 7.346 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot 5.184 \cdot 10^7\ s^2}{39.44}} \simeq \sqrt[3]{6.444\ \cdot\ 10^{18}} \simeq 1.861 \cdot 10^6\ m$$

Questo valore è la distanza dell'Apollo 8 dal centro della Luna, quindi detto **R** il raggio della Luna, l'altezza **h** dal suolo lunare era:

$$h = a\ - R\ \ \simeq 1861\ km\ - 1738\ km = 123\ km$$

Per calcolare la velocità orbitale $\boldsymbol{v}$, detta $\boldsymbol{L}$ la lunghezza di un'orbita dell'Apollo 8, si ha:

$$\text{v} = \frac{\text{L}}{\text{T}} = \frac{2\,\pi\,\text{a}}{\text{T}} \simeq \frac{2\,\pi\ \cdot\ 1861\ \text{km}}{7200\ \text{s}} \simeq 1.624\ \frac{\text{km}}{\text{s}} = 1624\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

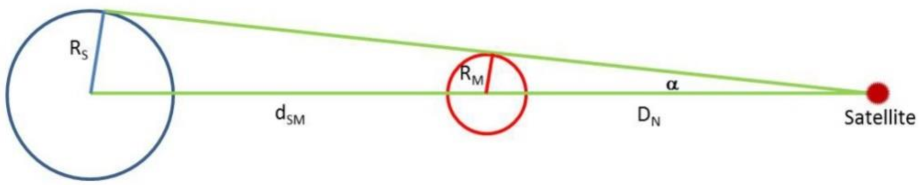
In alternativa possiamo considerare che $\boldsymbol{v}$ equivale alla prima velocità cosmica:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\frac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot\ 7.346\ \cdot\ 10^{22}\ kg}{1.861\ \cdot\ 10^6\ m}} \simeq 1623\ \frac{m}{s}$$

Nota.
I due valori ottenuti per la velocità sono del tutto equivalenti considerando la precisione dei dati.

7. Volete mettere in orbita intorno a Marte un satellite per fotografare eclissi totali di Sole, osservabili quando Marte, visto dal satellite, si sovrappone esattamente al Sole. Considerando per il satellite un'orbita circolare sul piano equatoriale di Marte, calcolate la sua distanza da Marte e il suo periodo orbitale. Trascurate l'eccentricità dell'orbita di Marte.

Soluzione



In occasione di un'eclisse totale di Sole vista dal satellite la configurazione dei tre corpi è quella mostrata in figura (disegno non è in scala), dove $\boldsymbol{D_N}$ è la distanza cercata.

Per la similitudine dei triangoli abbiamo che:

$$R_S : R_M = (d_{SM} + D_N) : D_N$$

dalla quale ricaviamo:

$$\mathrm{D_N} = \mathrm{R_M} \cdot \frac{\mathrm{d_{SM}} + \mathrm{D_N}}{\mathrm{R_S}}$$

e infine, trascurando l'eccentricità dell'orbita di Marte:

$$\mathrm{D_N} = \frac{\mathrm{d_{SM}} \cdot \mathrm{R_M}}{\mathrm{R_S} - \mathrm{R_M}} = \frac{227.9 \cdot 10^6\ \mathrm{km} \cdot 3397\ \mathrm{km}}{6.955 \cdot 10^5\ \mathrm{km} - 3397\ \mathrm{km}} \simeq 1.119 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

Detta $\mathrm{M_M}$ la massa di Marte, il periodo orbitale $\boldsymbol{T}$ del satellite è dato da:

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot \mathrm{D_N^3}}{\mathrm{G} \cdot \mathrm{M_M}}}$$

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 1.401 \cdot 10^{27}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 6.417 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}}} \simeq 3.594 \cdot 10^7 \mathrm{s} \simeq 1.139\ \text{anni terrestri}$$

Nota.
Si può dimostrare che l'orbita del satellite non è stabile, in quanto a $1.119 \cdot 10^6$ km da Marte la forza di gravità del pianeta non è in grado di trattenerlo in orbita.

8. Il Sistema solare si muove in direzione di un punto nella costellazione di Ercole, alla velocità di 19.5 km/s. Quale distanza, in km e in Unità Astronomiche, percorre in un anno?

Soluzione
Detta **D** la distanza percorsa alla velocità **v** e **T** il tempo, avremo in modulo:

$$D = v \cdot T \simeq 19.5\ \frac{km}{s} \cdot 365.26 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \simeq 6.15 \cdot 10^8\ km$$

Questa distanza in Unità Astronomiche D_{UA} vale:

$$D_{UA} = \frac{D}{UA} \simeq \frac{6.15 \cdot 10^8\ km}{149.6 \cdot 10^6\ km} \simeq 4.11\ UA$$

9. Calcolate il modulo della velocità di rotazione del pianeta Venere all'equatore.

Soluzione.
Detto **R** il raggio di Venere e **T** il suo periodo di rotazione, il modulo della velocità **v** di rotazione all'equatore si ottiene dalla relazione:

$$v = \frac{2\,\pi\,R}{T}$$

Venere (unico caso nel Sistema Solare insieme a Urano) ha una rotazione retrograda (cioè da ovest verso est), per cui il periodo viene indicato con segno negativo.
Avremo quindi:

$$v = \frac{2\,\pi\,R}{T} \simeq \frac{2\,\pi\,\cdot\,6052\,km}{-20998\,\cdot\,10^3\,s} \simeq -1.811\,\cdot\,10^{-3}\,\frac{km}{s} = -1.811\,\frac{m}{s}$$

10. Vi trovate sulla Luna esattamente al centro della faccia visibile dalla Terra. Sapendo che il periodo sinodico della Luna è di circa 29.5 giorni, ogni quanto tempo vedrete sorgere il Sole? Quando per voi sorge il Sole, con che fase appare la Luna vista dalla Terra? Dalla vostra posizione, ogni quanto tempo vedrete sorgere la Terra?

Soluzione.
Il giorno solare sulla Luna (che in analogia con la Terra possiamo definire come l'intervallo tra due passaggi consecutivi del Sole al meridiano, oppure come due configurazioni analoghe quali due albe consecutive) corrisponde al periodo delle fasi lunari, e vale, in media, 29.5 giorni. Dalla vostra posizione vedrete quindi che il Sole sorge in media una volta ogni 29.5 giorni.
Se sulla Luna vedete sorgere il Sole, visti dalla Terra vi trovate sul cosiddetto "terminatore", la linea che separa la parte illuminata da quella non illuminata dal Sole. Se siete su un punto al centro della faccia visibile della Luna, dalla Terra la Luna sarà al "primo quarto".
La faccia della Luna visibile dalla Terra è, a causa della rotazione sincrona della Luna, sempre la stessa. Quindi dal centro della Luna la Terra apparirà quasi immobile nel cielo, a parte gli effetti dovuti alle librazioni, e non la vedrete mai né sorgere né tramontare.

11. Supponete di osservare la Luna Piena al meridiano. La luce che ricevete è stata emessa dal Sole e riflessa dalla superficie della Luna. Quanto vale il tempo massimo e minimo che la luce impiega per percorrere il tragitto Sole - Luna Piena - Terra? Trascurate gli effetti dovuti all'inclinazione dell'orbita della Luna rispetto all'eclittica e alle dimensioni dei corpi.

Soluzione.
Poiché le orbite non sono circolari, il tempo minimo $\boldsymbol{T_{MIN}}$ si avrà con la Terra al perielio e la Luna Piena al perigeo, mentre il tempo massimo $\boldsymbol{T_{MAX}}$ si avrà con la Terra all'afelio e la Luna all'apogeo. Indichiamo con $\boldsymbol{a_T}$, $\boldsymbol{e_T}$, $\boldsymbol{a_L}$ ed $\boldsymbol{e_L}$ il semiasse maggiore e l'eccentricità delle orbite della Terra e della Luna. Dette $\boldsymbol{D_{T\odot-A}}$ e $\boldsymbol{D_{T\odot-P}}$ le distanze della Terra dal Sole all'afelio e al perielio, e $\boldsymbol{D_{LT-A}}$ e $\boldsymbol{D_{LT-P}}$ le distanze della Luna dalla Terra all'apogeo e al perigeo, si ha:

$$D_{T\odot-A} = a_T\,(1 + e_T) \simeq 149.6\,\cdot\,10^6\,km\,\cdot 1.01673 \simeq 152.1\,\cdot 10^6\,km$$

$$D_{T\odot-P} = a_T\,(1 - e_T) \simeq 149.6\,\cdot\,10^6\,km\,\cdot 0.9833 \simeq 147.1\,\cdot 10^6\,km$$

$$D_{LT-A} = a_L\,(1 + e_L) \simeq 384.4\,\cdot\,10^3\,km\,\cdot 1.05490 \simeq 405.5\,\cdot 10^3\,km$$

$$D_{LT-P} = a_L\,(1 - e_L) \simeq 384.4\,\cdot\,10^3\,km\,\cdot 0.9451 \simeq 363.3\,\cdot 10^3\,km$$

Le distanze massima $\boldsymbol{D_{MAX}}$ e minima $\boldsymbol{D_{MIN}}$ che la luce dovrà percorrere varranno quindi:

$$D_{MAX} = D_{T\odot-A} + 2\,\cdot\,D_{LT-A} \simeq 152.1\,\cdot\,10^6\,km + 811.0\,\cdot 10^3\,km \simeq 152.9\,\cdot 10^6\,km$$

$$D_{MIN} = D_{T\odot-P} + 2\,\cdot D_{LT-P} \simeq 147.1\,\cdot\,10^6\,km + 726.6\,\cdot 10^3\,km \simeq 147.8\,\cdot 10^6\,km$$

e impiegherà un tempo massimo $\boldsymbol{T_{MAX}}$ e minimo $\boldsymbol{T_{MIN}}$ pari a:

$$T_{MAX} = \frac{D_{MAX}}{c} \simeq \frac{152.9 \cdot 10^6\ km}{299792\ \frac{km}{s}} \simeq 510.0\ s = 8m\ 30\ s$$

$$T_{MIN} = \frac{D_{MIN}}{c} \simeq \frac{147.8 \cdot 10^6\ km}{299792\ \frac{km}{s}} \simeq 493.0\ s = 8m\ 13.0\ s$$

12. Nel film "Il pianeta proibito" i protagonisti scappano da un pianeta simile alla Terra dopo aver attivato un sistema che ne provocherà la distruzione dopo 24h dalla loro partenza. Se l'astronave con cui fuggono viaggia a una velocità pari a 0.180 di quella della luce, a che distanza si troveranno dal pianeta quando lo vedranno esplodere?

Soluzione

Nella soluzione dobbiamo considerare il fatto che l'astronave non è ferma, ma si sta allontanando dal pianeta. Quindi la luce emessa nell'esplosione, che viaggia alla velocità **c**, deve "inseguire" l'astronave che viaggia a una velocità $\mathrm{v_A}$ pari a:

$$\mathrm{v_A} = 0.180 \cdot \mathrm{c}$$

Detto **t** il tempo necessario alla luce per raggiungere l'astronave, al momento in cui dall'astronave si assisterà all'esplosione il tempo **T** trascorso dalla partenza sarà:

$$\mathrm{T} = 24\ \mathrm{h} + \mathrm{t}$$

Lo spazio $\mathbf{s_0}$ percorso dall'astronave in 24h vale:

$$\mathbf{s_0} = \mathrm{v_A} \cdot 24\mathrm{h} = 0.180 \cdot \mathrm{c} \cdot 86400\ \mathrm{s} \simeq 4.66 \cdot 10^9\ \mathrm{km}$$

Lo spazio totale $\mathbf{s_A}$ percorso dall'astronave dal momento della partenza fino a quando viene raggiunta dalla luce dell'esplosione è dato dalla relazione:

$$\mathrm{s_A} = \mathrm{s_0} + \mathrm{v_A} \cdot \mathrm{t}$$

Infine lo spazio $\mathbf{s_L}$ percorso dalla luce dal momento dell'esplosione fino a quando raggiungerà l'astronave è dato dalla relazione:

$$\mathrm{s_L} = \mathrm{c} \cdot \mathrm{t}$$

Quando la luce dell'esplosione raggiunge l'astronave avremo:

$$\mathrm{s_a} = s_L$$

$$\mathrm{s_0} + \mathrm{v_A} \cdot \mathrm{t} = \mathrm{c} \cdot \mathrm{t}$$

da cui si ricava:

$$t = \frac{\mathrm{s_0}}{\mathrm{c} - \mathrm{v_A}} = \frac{\mathrm{s_0}}{0.820\ \mathrm{c}}$$

e infine:

$$\mathrm{T} = 24\ \mathrm{h} + \mathrm{t} = 24\ \mathrm{h} + \frac{\mathrm{s_0}}{0.820\ \mathrm{c}} \simeq 86400\ \mathrm{s} + \frac{4.66 \cdot 10^9\ \mathrm{km}}{246 \cdot 10^3\ \frac{km}{s}} \simeq 105 \cdot 10^3\ \mathrm{s} \simeq 29\mathrm{h}\ 10\mathrm{m}$$

ovvero quando l'astronave si troverà a una distanza dal pianeta:

$$\mathrm{s_A} = \mathrm{s_0} + \mathrm{v_A} \cdot \mathrm{t} = \mathrm{v_A} \cdot \mathrm{T} \simeq 0.180 \cdot \mathrm{c} \cdot 105 \cdot 10^3\ \mathrm{s} \simeq 5.67 \cdot 10^9\ \mathrm{km} \simeq 37.9\ \mathrm{UA}$$

13. L'atmosfera della Terra ha una densità media di $3.3 \cdot 10^{-4}\ g/cm^3$. Assumendo che dopo i 30 km di altezza l'atmosfera diventi così rarefatta da non essere più influente nel calcolo, stimate la massa dell'atmosfera della Terra in kg e il suo rapporto con la massa totale della Terra.

Soluzione

Detto $\boldsymbol{R_T}$ il raggio della Terra, con l'approssimazione indicata nel testo il volume $\boldsymbol{V_A}$ occupato dall'atmosfera risulta pari al volume di una sfera di raggio $\boldsymbol{R_T}$ + 30 km, meno il volume di una sfera di raggio $\boldsymbol{R_T}$:

$$V_A = \frac{4}{3}\pi\,(\mathrm{R_T} + 30\ \mathrm{km})^3 - \frac{4}{3}\pi\,(\mathrm{R_T})^3 \simeq$$

$$1.102 \cdot 10^{12}\ \mathrm{km}^3 - 1.087 \cdot 10^{12}\ \mathrm{km}^3 \simeq 1.50 \cdot 10^{10}\ \mathrm{km}^3$$

La densità media $\boldsymbol{\rho_m}$ dell'atmosfera della Terra vale:

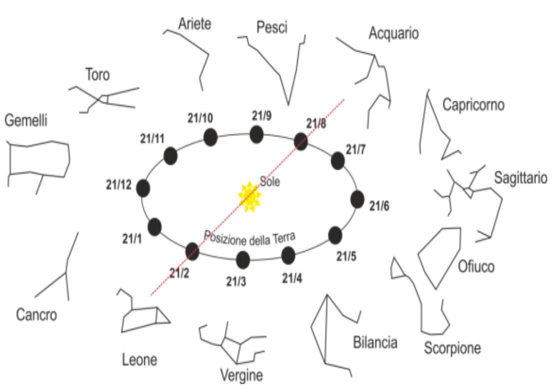
$$\rho_m = 3.3 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 3.3 \cdot 10^{-4}\ \frac{10^{-3}}{10^{-15}}\ \frac{kg}{\mathrm{km}^3} = 3.3 \cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{km}^3}$$

Detta $\mathbf{M_A}$ la massa dell'atmosfera e $\mathbf{M_T}$ la massa della Terra avremo:

$$\mathrm{M_A} = \rho_m\,\mathrm{V_A} \simeq 3.3 \cdot 10^{8} \cdot \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{km}^3} \cdot 1.50 \cdot 10^{10}\ \mathrm{km}^3 \simeq 5.0 \cdot 10^{18}\ \mathrm{kg}$$

$$\frac{M_A}{M_T} \simeq \frac{5.0 \cdot 10^{18}\ \mathrm{kg}}{5.972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}} \simeq 8.4 \cdot 10^{-7}$$

14.



La figura a sinistra rappresenta la posizione della Terra, durante il suo moto di rivoluzione attorno al Sole il 21 di ogni mese, rispetto alle costellazioni dello zodiaco.

Se oggi è il 21 febbraio (21/2):

a) In quale costellazione dello zodiaco vediamo il Sole?

b) Quale costellazione dello zodiaco passerà al meridiano in direzione sud a mezzanotte?

c) Quale costellazione dello zodiaco si troverà questa sera più prossima all'orizzonte a ovest appena dopo il tramonto del Sole?

Soluzione

Tracciamo la retta (visibile in rosso) passante per la posizione della Terra il 21 febbraio e per il Sole.

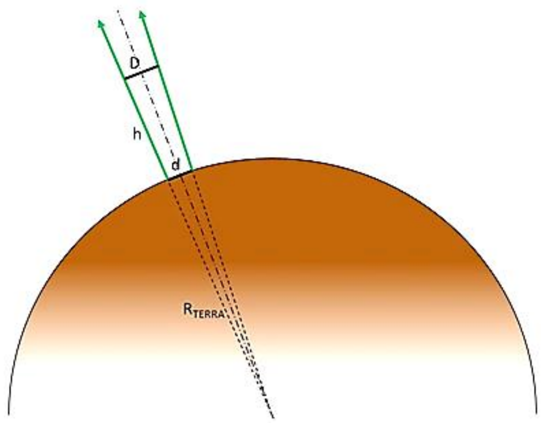
a) Il 21 febbraio vedremo il Sole proiettato nella costellazione dell'Acquario.

b) Il Sole passa al meridiano in direzione sud a mezzogiorno, quindi a mezzanotte passa al meridiano in direzione sud la costellazione dello zodiaco opposta rispetto a quella in cui si trova il Sole, ovvero, nella data del 21 febbraio, il Leone.

c) A causa della rotazione della Terra se a un certo istante una costellazione dello zodiaco tramonta a ovest, quella che tramonterà subito dopo sarà quella collocata immediatamente a est rispetto a essa. Poiché il 21 febbraio il Sole si trova nell'Acquario, appena dopo il tramonto verso l'orizzonte in direzione ovest troveremo i Pesci.

15. Due puntatori laser di alta potenza distanti 20.0 m l'uno dall'altro, inviano entrambi un sottilissimo fascio di luce in direzione esattamente verticale. Assumendo la superficie della Terra perfettamente sferica, quale sarà la distanza tra i due fasci a un'altezza dal suolo di 70 km?

Soluzione



La situazione descritta nel problema è rappresentata nella figura a sinistra. Detta **d** la distanza tra i due laser, vogliamo calcolare la separazione **D** dei fasci luminosi all'altezza **h** dalla superficie.

Poiché i due laser puntano esattamente in verticale, i loro prolungamenti all'indietro si incontrerebbero al centro del nostro pianeta. Detto $\boldsymbol{R_T}$ il raggio della Terra si ha:

$$d \ll \mathrm{R_T}$$

e possiamo quindi trascurare l'effetto della curvatura terrestre e considerare i due triangoli simili in figura con vertice al centro della Terra per i quali si può scrivere:

$$\mathrm{R_T} : d = (\mathrm{R_T} + h) : D$$

Da cui ricaviamo:

$$\mathrm{D} = \frac{(\mathrm{R_T} + \mathrm{h}) \cdot \mathrm{d}}{\mathrm{R_T}} = \frac{6448 \cdot 10^3\ \mathrm{m} \cdot 20.0\ \mathrm{m}}{6378 \cdot 10^3\ m} \simeq 20.2\ m$$