Olimpiadi Italiane di Astronomia 2022
Corso di preparazione alla Finale Nazionale
Categoria Junior 1 - Lezione 1

1. Sapendo che tre rivoluzioni di Nettuno corrispondono esattamente a due rivoluzioni di Plutone (i due corpi si trovano in quella che viene chiamata "risonanza orbitale"), determinare il periodo di rivoluzione di Plutone e il semiasse maggiore della sua orbita in UA.

Soluzione

Detto $\boldsymbol{T_N}$ il periodo orbitale di Nettuno e $\boldsymbol{T_P}$ il periodo orbitale di Plutone, sappiamo che:

$$3 \cdot \mathrm{T_N} = 2 \cdot \mathrm{T_P}$$

da cui:

$$\mathrm{T_P} = \frac{3 \cdot \mathrm{T_N}}{2} \simeq \frac{3 \cdot 164.79 \text{ anni}}{2} \simeq 247.19 \text{ anni}$$

Sappiamo che per tutti i corpi in orbita attorno al Sole vale la relazione:

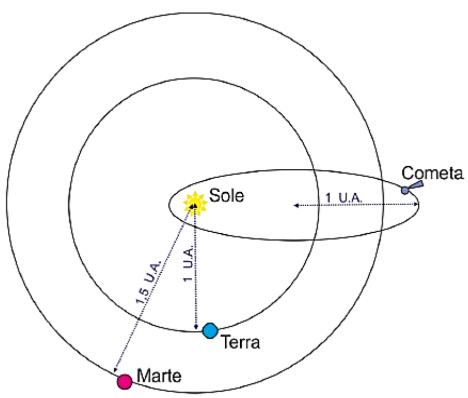
$$T^2\,(anni) = a^3\,(UA)$$

detto quindi $\boldsymbol{a_P}$ il semiasse maggiore dell'orbita di Plutone avremo:

$$a_P = \sqrt[3]{T^2} \simeq \sqrt[3]{(247.19)^2} \simeq 39.387\ UA$$

2. Una cometa percorre un'orbita che la porta molto vicina al Sole al perielio e poco oltre l'orbita di Marte all'afelio. Il semiasse maggiore dell'orbita è di 1 UA. Disegnate le orbite di Terra e Marte in scala e includete una rappresentazione realistica dell'orbita della cometa. Quanto vale il periodo orbitale della cometa?

Soluzione



Una rappresentazione in scala delle orbite della Terra e di Marte è mostrata nella figura a sinistra.
Sapendo che la cometa si avvicina molto al Sole a perielio e si trova poco oltre l'orbita di Marte all'afelio, possiamo includere una rappresentazione realistica della sua orbita.

Poiché la cometa ha un semiasse maggiore pari a 1 UA, il suo periodo di rivoluzione è ovviamente pari a un anno:

$$T^2\,(anni) = a^3\,(UA)$$

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{1} = 1\ anno$$

3. Il raggio vettore che unisce una cometa periodica al Sole spazza $1/15$ dell'area totale racchiusa dall'orbita in otto mesi. Determinare il periodo di rivoluzione della cometa.

Soluzione

Detti $\mathbf{A_1}$ l'area spazzata dal raggio vettore nel tempo $\mathbf{t_1}$ pari a 8 mesi e $\mathbf{A}$ l'area totale spazzata dal raggio vettore nell'intero periodo di rivoluzione $\mathbf{T}$, dalla II Legge di Keplero si ha:

$$\mathrm{A_1} : \mathrm{t_1} = \mathrm{A} : \mathrm{T}$$

ed essendo:

$$\mathrm{A} = 15 \cdot \mathrm{A_1}$$

ricaviamo:

$$T = \frac{A \cdot t_1}{A_1} = \frac{15\, A_1 \cdot t_1}{A_1} \simeq 15 \cdot 8\, mesi \simeq 120\, mesi = 10\, anni$$

4. Una cometa descrive un'orbita ellittica con eccentricità di 0.921 e distanza dal Sole al perielio di 0.451 UA. Calcolate quando tempo impiega per percorrere ognuna delle due semi-orbite separate dall'asse minore dell'ellisse.

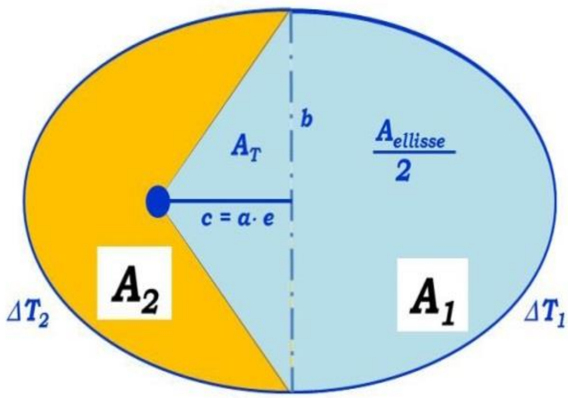
Soluzione

Detta $\boldsymbol{d_P}$ la distanza al perielio ed $\boldsymbol{e}$ l'eccentricità dell'orbita, i semiassi $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ valgono:

$$a = \frac{d_P}{(1-e)} \simeq \frac{0.451}{0.079} \simeq 5.71\ \mathrm{UA} \qquad\qquad b = a\sqrt{1 - e^2} \simeq 5.71 \cdot 0.390 \simeq 2.23\ \mathrm{UA}$$

Il periodo orbitale $\mathbf{T}$ in anni vale:

$$T = \sqrt{a^3} \simeq \sqrt{186} \simeq 13.6\ \text{anni}$$



Rappresentazione non in scala

L'area totale $\boldsymbol{A_{ellisse}}$ dell'orbita è data dalla relazione:

$$A_{ellisse} = \pi\, a\, b \simeq 40.0\ \mathrm{UA}^2$$

La distanza $\boldsymbol{c}$ del fuoco che contiene il Sole dal centro dell'orbita della cometa vale:

$$c = a \cdot e \simeq 5.71\ \mathrm{UA} \cdot 0.921 \simeq 5.26\ \mathrm{UA}$$

L'area delle due semi-orbite è:

$$A_1 = \frac{A_{ellisse}}{2} + c \cdot b \simeq 31.7\ \mathrm{UA}^2$$

$$A_2 = \frac{A_{ellisse}}{2} - c \cdot b \simeq 8.3\ \mathrm{UA}^2$$

Detta $\boldsymbol{\Delta T_n}$ una qualsiasi frazione del periodo orbitale e $\boldsymbol{A_n}$ l'area spazzata dal raggio vettore nell'intervallo $\boldsymbol{\Delta T_n}$, dalla II legge di Keplero sappiamo che:

$$\Delta T_n : A_n = T : A_{ellisse}$$

da cui, detti $\boldsymbol{\Delta T_1}$ e $\boldsymbol{\Delta T_2}$ i tempi impiegati per percorrere le due semi-orbite, si ricava:

$$\Delta T_1 = \frac{A_1 \cdot T}{A_{ellisse}} \simeq \frac{31.7\ \mathrm{UA}^2 \cdot 13.6\ \text{anni}}{40.0\ \mathrm{UA}^2} \simeq 10.8\ \text{anni}$$

$$\Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A_{ellisse}} \simeq \frac{8.3\ \mathrm{UA}^2 \cdot 13.6\ \text{anni}}{40.0\ \mathrm{UA}^2} \simeq 2.8\ \text{anni}$$

Nota.

Soluzione alternativa

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{A_1}{A_2} \qquad \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} + 1 = \frac{A_1}{A_2} + 1 \qquad \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{\Delta T_2} = \frac{A_1 + A_2}{A_2} \qquad \frac{T}{\Delta T_2} = \frac{A}{A_2} \qquad \Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A}$$

$$A_2 = \frac{\pi\, a\, b}{2} - a \cdot e \cdot b = \left(\frac{\pi}{2} - e\right) ab \qquad \Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - e\right) ab \cdot T}{\pi\, a\, b} = \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{\pi}\right) T \simeq 2.8\ \text{anni}$$

$$\Delta T_1 = \frac{A_1 \cdot T}{A} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + e\right) ab \cdot T}{\pi\, a\, b} = \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{\pi}\right) T \simeq 10.8\ \text{anni}$$

5. La stazione spaziale Endurance del film Interstellar, che si trova nello spazio a grande distanza dalle stelle più vicine, ruota su sé stessa a velocità costante per creare, nella sua parte più esterna, una gravità pari a un terzo di quella presente sulla superficie della Terra. Sapendo che il raggio dell'Endurance è di 298.0 m, calcolate quanti giri su sé stessa effettua ogni ora e quanto vale l'accelerazione di gravità nella sala motori, posta al centro della stazione spaziale.

Soluzione.

Per la Endurance possiamo trascurare gli effetti della gravità dovuta alle stelle. Detta $\boldsymbol{g_T}$ l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra, l'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g_E}$ nella parte più esterna dell'Endurance vale:

$$g_E = \frac{g_T}{3} \simeq \frac{9.807\,\frac{m}{s^2}}{3} \simeq 3.269\,\frac{m}{s^2}$$

Detti $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare, $\mathbf{V_T}$ la velocità tangenziale e $\mathbf{r}$ il raggio della stazione spaziale, il modulo dell'accelerazione centrifuga $\mathbf{a_c}$ dovuta alla rotazione vale:

$$a_c = g_E = \omega^2 \cdot r = \frac{{V_T}^2}{r}$$

da cui ricaviamo:

$$V_T = \sqrt{g_E \cdot r} \simeq \sqrt{3.269\,\frac{m}{s^2} \cdot 298.0\ m} \simeq 31.21\,\frac{m}{s}$$

Il periodo di rotazione **T** vale:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{V_T} \simeq \frac{2 \cdot \pi \cdot 298.0\ m}{31.21\,\frac{m}{s}} \simeq 60\ s \simeq 1\ m$$

Quindi in un'ora l'Endurance effettua un numero di giri **N** su sé stessa pari a:

$$N = \frac{3600\ s}{60\ s} = \frac{60\ m}{1\ m} = 60\ \text{giri}$$

Poiché a parità di velocità angolare l'accelerazione centrifuga diminuisce con il raggio, al centro dell'Endurance il raggio da considerare è nullo e avremo quindi:

$$g_E = \omega^2 \cdot r = 0$$

6. Un'astronave si trova tra la Terra e il Sole nel punto in cui l'attrazione gravitazionale della Terra è un centesimo di quella del Sole. A che distanza dalla Terra si trova e quanto tempo impiegherà un segnale radio per raggiungere i radiotelescopi terrestri? Trascurate gli effetti dovuti al moto di rivoluzione della Terra, gli effetti gravitazionali della Luna e degli altri pianeti, le dimensioni della Terra e considerate la sua orbita circolare.

Soluzione.

Detta **d** la distanza a cui si trova l'astronave dalla Terra, $\boldsymbol{M_T}$, $\boldsymbol{M_S}$ e $\boldsymbol{m_a}$ le masse della Terra, del Sole e dell'astronave e **D** la distanza Terra-Sole, poiché l'astronave si trova tra la Terra e il Sole nel punto in cui l'attrazione gravitazionale della Terra è 1/100 di quella del Sole si ha:

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m_a}{d^2} = \frac{1}{100} \cdot \frac{G \cdot M_S \cdot m_a}{(D-d)^2}$$

da cui ricaviamo:

$$\frac{D-d}{d} = \sqrt{\frac{M_S}{100\ M_T}} \qquad \frac{D}{d} - 1 = \sqrt{\frac{M_S}{100\ M_T}}$$

e infine:

$$d = \frac{D}{\sqrt{\frac{M_s}{100\ M_T}} + 1} \simeq \frac{149.6\ \cdot\ 10^6\ km}{\sqrt{\frac{1.989\ \cdot\ 10^{30}\ kg}{5.972\ \cdot\ 10^{26}\ kg}} + 1} \simeq\ 2.548\ \cdot\ 10^6\ km\,.$$

Per calcolare il tempo **t** che un segnale radio impiega per raggiungere i radiotelescopi terrestri, dobbiamo ricordare che i segnali radio sono onde elettromagnetiche e pertanto viaggiano alla velocità della luce **c**:

$$t = \frac{d}{c} \simeq \frac{2.548\ \cdot\ 10^6\ km}{299792\ \frac{km}{s}} \simeq 8.50\ s$$

7. Il Telescopio Spaziale Hubble (HST) orbita attorno alla Terra dalle ore 12:00 UT del 25 aprile 1990 a un'altezza sulla superficie di 539 km. Quante orbite attorno alla Terra ha completato HST alle ore 12:00 UT del 25 aprile 2020?

Soluzione

Detti $\boldsymbol{R_T}$ e $\boldsymbol{M_T}$ raggio e massa della Terra e $\mathbf{h_{HST}}$ l'altezza sulla superficie della Terra di HST, il suo periodo orbitale $\mathbf{T_{HST}}$ si ottiene dalla III legge di Keplero:

$$T_{HST} = \sqrt{\frac{4\pi^2\ \cdot (R_T +\ h_{HST})^3}{G\ M_T}}$$

$$\simeq \sqrt{\frac{39.48\ \cdot\ 3.309\ \cdot 10^{20}\ m^3}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\ \frac{m}{s^2 \cdot kg}\ \cdot\ 5.972 \cdot\ 10^{24}\ kg}} \simeq 5725\ s\ \simeq 95.42\ minuti$$

Dalle 12:00 UT del 25 aprile 1990 alle 12:00 UT del 25 aprile 2020 sono trascorsi un numero di giorni $\boldsymbol{\Delta T}$ pari a:

$$\Delta T = 365\ \cdot 30 + 8 = 10958$$

in quanto dobbiamo considerare che gli anni 1992, 1996, 2000, 2004, 2008, 2012, 2016 e 2020 sono stati bisestili. Il numero di orbite $\boldsymbol{N_{HST}}$ di HST sarà stato quindi:

$$N_{HST} = \frac{\Delta T}{T_{HST}} \simeq \frac{10958\ giorni\ \cdot\ 86400\frac{s}{giorno}}{5725\ s} \simeq 165.4\ \cdot 10^3$$

8. Calcolate il minimo periodo di rivoluzione di un piccolo corpo di massa trascurabile che si muove:

1. su un'orbita circolare attorno a Sole;
2. su un'orbita circolare attorno alla Terra.

Assumete il Sole e la Terra perfettamente sferici e trascurate la presenza dell'atmosfera terrestre.

Soluzione.

In entrambi i casi il periodo minimo si ha quando il semiasse maggiore (raggio) **a** dell'orbita del corpo è praticamente coincidente con il raggio del Sole $\boldsymbol{R_\odot}$ e della Terra $\boldsymbol{R_T}$.

1. Il periodo minimo $\boldsymbol{T_{Min\odot}}$ di rivoluzione attorno al Sole si può ricavare dalla relazione:

$$T_{Min\odot}{}^2\ (anni) =\ R_\odot{}^3\ (UA)$$

$$T_{Min\odot} = \sqrt{\left(\frac{R_\odot}{1\ UA}\right)^3} \simeq \sqrt{\left(\frac{6.955\ \cdot\ 10^5\ km}{149.6\ \cdot\ 10^6\ km}\right)^3} \simeq 3.170\ \cdot\ 10^{-4}\ anni\ \simeq 2h\ 46.7m$$

e, detta $\boldsymbol{M_\odot}$ la massa del Sole, anche dalla relazione:

$$T_{Min\odot} = \sqrt{\frac{4\,\pi^2\, R_\odot{}^3}{G\ M_\odot}} \simeq \sqrt{\frac{39.48\ \cdot 3.364\ \cdot\ 10^{26}\, m^3}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\, s^2}\cdot 1.989\ \cdot\ 10^{30}\ \text{kg}}} \simeq 10^4\, s\ \simeq 2h\, 46.7\, m$$

2. Il periodo minimo $\boldsymbol{T_{Min-T}}$ di rivoluzione attorno alla Terra, detta $\boldsymbol{M_T}$ la sua massa, si può ricavare dalla relazione:

$$T_{Min-T} = \sqrt{\frac{4\,\pi^2\, R_T{}^3}{G\ M_T}} \simeq \sqrt{\frac{39.48\ \cdot 2.595\ \cdot\ 10^{20}\, m^3}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\, s^2}\cdot 5.972\ \cdot\ 10^{24}\ \text{kg}}} \simeq 5070\, s\ \simeq 1h\, 24.5\, m$$

9. Il pianeta "Papalla" ruota, su un'orbita circolare, attorno a una stella esattamente uguale al Sole. La sua distanza dalla stella è di $230.7\ \cdot\ 10^6$ km. Gli astronomi di Papalla misurano il tempo e le distanze con unità di misura fondamentali (il secondo e il metro) identiche a quelle degli astronomi della Terra e anche loro chiamano "anno" il tempo impiegato dal loro pianeta per compiere una rivoluzione completa attorno alla loro stella. Quanto vale, in km, un anno luce per gli astronomi del pianeta Papalla?

Soluzione.

Poiché la stella attorno a cui ruota Papalla è esattamente uguale al Sole, detto $\boldsymbol{a}$ il semiasse maggiore (ovvero il raggio) dell'orbita e $\boldsymbol{T}$ il periodo di rivoluzione, vale relazione:

$$a^3\ (UA) = T^2\ (anni)$$

da cui ricaviamo:

$$T \simeq \sqrt{\left(\frac{230.7\ \cdot\ 10^6\ km}{149.6\ \cdot\ 10^6\ km}\right)^3} \simeq \sqrt{1.542^3} \simeq 1.915\ anni\ terrestri$$

La velocità della luce è una costante universale, mentre l'anno luce è la distanza che la luce percorre in un anno. Poiché l'anno di Papalla è 1.915 volte più lungo di quello terrestre, l'anno luce per gli astronomi di Papalla $\boldsymbol{al_{Papalla}}$ sarà più lungo della stessa quantità e varrà quindi:

$$al_{Papalla} \simeq 9460.7\ \cdot\ 10^9\ km\ \cdot 1.915\ \simeq 1.812\ \cdot 10^{13}\ km$$

10. I satelliti geostazionari orbitano intorno alla Terra sul piano dell'equatore. Osservati dalla superficie della Terra appaiono fermi nel cielo. Si determini l'altezza dal suolo di un satellite geostazionario rispetto a un punto sull'equatore della Terra.

Soluzione

Per un qualsiasi corpo in orbita stabile, il modulo della velocità orbitale è pari alla prima velocità cosmica $\boldsymbol{v_1}$. Detta $\boldsymbol{D}$ la distanza del satellite dal centro della Terra, $\boldsymbol{T}$ il suo periodo orbitale, $\boldsymbol{M_T}$ e $\boldsymbol{R_T}$ massa e raggio della Terra, valgono le relazioni:

$$v_1 = \sqrt{\frac{G\ \cdot\ M_T}{D}} \qquad\qquad v_1 = \frac{2\,\pi\ \cdot D}{T}$$

da cui si ricava:

$$D = \sqrt[3]{\frac{G\ \cdot\ M_T\ \cdot\ T^2}{4\,\pi^2}}$$

$$D \simeq \sqrt[3]{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\, s^2}\ \cdot\ 5.972\ \cdot\ 10^{24}\, kg\ \cdot\ 7.424\ \cdot\ 10^9\, s^2}{4\,\pi^2}} \simeq 4.216\ \cdot\ 10^7\, m\ \simeq 42160\, km$$

Per un osservatore posto all'equatore nel punto in cui il satellite sarà visibile allo zenith, l'altezza del satellite sulla superficie $\boldsymbol{H}$ vale:

$$\mathrm{H} = \mathrm{D} - \mathrm{R_T} \simeq 42160 \text{ km} - 6378 \text{ km} \simeq 35780 \text{ km}$$

11. La stella Kepler-101 ha due pianeti, Kepler-101b e Kepler-101c. Kepler-101b ha un raggio 0.520 volte quello di Giove e una massa 51.0 volte quella della Terra. Kepler-101c ha un raggio 1.23 volte quello della Terra e una massa $1.20 \cdot 10^{-2}$ volte quella di Giove. Calcolare:

1. l'accelerazione di gravità alla superficie dei due pianeti;
2. a quale altezza dalla superficie di Kepler-101c si avrà un'accelerazione di gravità pari a quella sulla superficie di Kepler-101b;
3. la densità dei due pianeti, valutando se sono rocciosi o gassosi.

Soluzione.

1. Detti $\boldsymbol{M_T}$, $\boldsymbol{M_G}$, $\boldsymbol{R_T}$, e $\boldsymbol{R_G}$ le masse e i raggi della Terra e di Giove, l'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g_b}$ e $\boldsymbol{g_c}$ alla superficie dei due pianeti vale:

$$g_b = \frac{G \cdot 51 \cdot M_T}{(0.520 \cdot R_G)^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 51 \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg}{(0.520 \cdot 71490 \cdot 10^3\, m)^2} \simeq 14.7 \frac{m}{s^2}$$

$$g_c = \frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{(1.23 \cdot R_T)^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27}\, kg}{(1.23 \cdot 6378 \cdot 10^3\, m)^2} \simeq 24.7 \frac{m}{s^2}$$

2. L'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g_{ch}}$ a un'altezza $\boldsymbol{h}$ sulla superficie di Kepler-101c vale:

$$g_{ch} = \frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{(1.23 \cdot R_T + h)^2}$$

relazione dalla quale, ponendo $g_{ch} = g_b$, otteniamo il valore di $\boldsymbol{h}$ richiesto :

$$h = \sqrt{\frac{G \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{g_b}} - 1.23 \cdot R_T$$

$$h \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27}\, kg}{14.7 \frac{m}{s^2}}} - 7.84 \cdot 10^6\, m \simeq 2.33 \cdot 10^6\, m$$

3. La densità media $\boldsymbol{\rho_b}$ e $\boldsymbol{\rho_c}$ dei due pianeti è data dal rapporto tra la loro massa e il loro volume:

$$\boldsymbol{\rho_b} = \frac{3 \cdot 51 \cdot M_T}{4\pi \cdot (0.520 \cdot R_G)^3} \simeq \frac{3 \cdot 51 \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg}{4\pi \cdot (0.520 \cdot 71490 \cdot 10^3\, m)^3} \simeq 1.42 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

$$\boldsymbol{\rho_c} = \frac{3 \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_G}{4\pi \cdot (1.23 \cdot R_T)^3} \simeq \frac{3 \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27}\, kg}{4\pi \cdot (1.23 \cdot 6378 \cdot 10^3\, m)^3} \simeq 1.13 \cdot 10^4 \frac{kg}{m^3}$$

Dalle densità ottenute si deduce che il pianeta Kepler-101b è di tipo gassoso, mentre Kepler-101c è di tipo roccioso. Si consideri infatti che Giove ha una densità media di $1.33 \cdot 10^3\ kg/m^3$, mentre la densità media della Terra è di $5.51 \cdot 10^3\ kg/m^3$.

12. A che distanza dalla Terra sulla congiungente Terra-Sole le forze di gravità esercitate su un corpo di piccola massa dalla Terra e dal Sole sono uguali in modulo? Trascurate gli effetti dovuti alla rivoluzione della Terra.

Soluzione

Detti $\boldsymbol{m_s}$, $\boldsymbol{M_\odot}$, e $\boldsymbol{M_T}$ le masse del piccolo corpo, del Sole e della Terra, $\boldsymbol{d_{\odot s}}$ la distanza del corpo dal Sole e $\boldsymbol{d_{Ts}}$ la distanza del corpo dalla Terra, quando le due forze sono uguali in modulo (e quindi avendo stessa direzione ma verso opposto si equilibrano) si ha:

$$G\,\frac{M_{\odot}\;\cdot\;m_s}{{d_{\odot s}}^2} = G\,\frac{M_T\;\cdot\;m_s}{{d_{Ts}}^2}$$

da cui ricaviamo:

$$d_{Ts} = d_{\odot s}\,\sqrt{\frac{M_T}{M_{\odot}}}$$

ed essendo:

$$d_{\odot s} = 1UA - d_{Ts}$$

si ricava infine:

$$d_{Ts} = \frac{1\,UA\;\cdot\;\sqrt{\frac{M_T}{M_{\odot}}}}{1+\sqrt{\frac{M_T}{M_{\odot}}}} \simeq \frac{149.6\;\cdot\;10^6\,km\;\cdot\;\sqrt{\frac{5.972\;\cdot\;10^{24}\,kg}{1.989\;\cdot\;10^{30}\,kg}}}{1+\sqrt{\frac{5.972\;\cdot\;10^{24}\,kg}{1.989\;\cdot\;10^{30}\,kg}}} \simeq 2.588\;\cdot\;10^5\,km$$

Nota.
Questa posizione di equilibrio non va confusa con il punto lagrangiano ***L1*** del sistema Sole-Terra. La posizione del punto ***L1*** è quella dove la risultante delle accelerazioni gravitazionali dovute al Sole e alla Terra è uguale all'accelerazione centripeta necessaria a mantenere in orbita il corpo di piccola massa a quella particolare distanza dal Sole con lo stesso periodo orbitale della Terra. Il punto ***L1*** si trova sulla congiungente Sole-Terra a circa 1.5 milioni di km dalla Terra in direzione del Sole.

13. Schematizzando la Via Lattea come un disco uniforme con un diametro di $1.06\;\cdot\;10^5$ anni luce e spessore trascurabile, si fornisca una stima della sua massa totale in masse solari, sapendo che il Sole si trova a una distanza dal centro di circa 8.34 kpc e assumendo per l'anno galattico una durata di $233\;\cdot\;10^6$ anni terrestri. Stimate infine la velocità di fuga dalla Via Lattea a una distanza dal centro pari al doppio del suo diametro.

Soluzione
L'anno galattico ***T*** vale:

$$\mathbf{T} \simeq 233\;\cdot\;10^6\;\cdot 365.256\;\cdot 24\;\cdot 60\;\cdot 60 \simeq 7.35\;\cdot\;10^{15}\ \mathrm{s}$$

la massa $\boldsymbol{M_g}$ della Via Lattea entro una distanza ***a*** di 8.34 kpc ($\simeq 27.2\;\cdot\;10^3$ anni luce $\simeq 2.57\;\cdot\;10^{20}$ m) dal centro vale:

$$\mathrm{M_g} = \frac{4\,\pi^2\;\cdot\;\mathrm{a}^3}{\mathrm{G}\;\cdot\;\mathrm{T}^2} \simeq \frac{39.48\;\cdot 1.70\;\cdot\;10^{61}\,m^3}{6.674\;\cdot\;10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}\;\cdot\;5.41\;\cdot\;10^{31}\,s^2} \simeq 1.86\;\cdot\;10^{41}\ \mathrm{kg} \simeq 93.5\;\cdot\;10^9\ \mathrm{M}_{\odot}$$

Avendo schematizzato la Via Lattea come un disco uniforme, la massa è proporzionale all'area del disco. Per ottenere la massa totale $\boldsymbol{M_G}$ della Via Lattea entro il suo raggio ***R*** ($\simeq$53000 anni luce $\simeq$ 16.2 kpc), possiamo quindi usare la proporzione:

$$\mathrm{M_G} : \pi\,\mathrm{R}^2 = \mathrm{M_g} : \pi\,\mathrm{a}^2$$

da cui si ottiene:

$$\mathrm{M_G} = \mathrm{M_g}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{a}}\right)^2 \simeq 1.86\;\cdot\;10^{41}\mathrm{kg}\left(\frac{16.2\ \mathrm{kpc}}{8.34\ \mathrm{kpc}}\right)^2 \simeq 7.06\;\cdot\;10^{41}\mathrm{kg} \simeq 355\;\cdot\;10^9\ \mathrm{M}_{\odot}$$

La velocità di fuga $\boldsymbol{v_f}$ a una distanza ***d*** dal centro di un corpo di massa ***M*** è data dalla relazione:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{d}}$$

Quindi nel nostro caso detto ***D*** il diametro della galassia:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M_G}{2\,D}} \simeq \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 7.06 \cdot 10^{41} kg}{2.01 \cdot 10^{21}\ m}} \simeq 217 \cdot 10^3\ \frac{m}{s} = 217\ \frac{km}{s}$$

Nota.
In questa semplice schematizzazione della Via Lattea non si sta tenendo conto degli effetti della "materia oscura" e della sua distribuzione.

14. Calcolate il periodo di rivoluzione e il modulo della velocità tangenziale di un corpo che si muove su un'orbita circolare a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi di un buco nero con massa pari a 2.51 masse solari.

Soluzione
Dette $\mathbf{M_{BN}}$ e $\mathbf{M_\odot}$ le masse del buco nero e del Sole, il "Raggio di Schwarzchild" $\boldsymbol{R_s}$ del buco nero vale:

$$R_s = \frac{2\,G\,M_{BN}}{c^2} = \frac{2\,G \cdot 2.51 \cdot M_\odot}{c^2} \simeq$$

$$\simeq \frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 4.99 \cdot 10^{30}\ kg}{8.988 \cdot 10^{16} \frac{m^2}{s^2}} \simeq 7410\ m = 7.41\ km$$

Detto **a** (= $\boldsymbol{R_s}$+ 10 km) il raggio dell'orbita, dalla III Legge di Keplero il periodo di rivoluzione **T** vale:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2\,a^3}{G \cdot 2.51 \cdot M_\odot}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 5.277 \cdot 10^{12}\,m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 4.99 \cdot 10^{30}\ kg}} \simeq 7.91 \cdot 10^{-4}\,s$$

Con tale periodo il modulo **v** della velocità tangenziale vale:

$$v = \frac{2\,\pi\,a}{T} = \frac{109.4\ km}{7.91 \cdot 10^{-4}\ s} \simeq 138 \cdot 10^3\ \frac{km}{s} \simeq 0.461\ c$$

Nota: nella soluzione stiamo assumendo che le leggi di Keplero siano valide a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi del buco nero. La soluzione rigorosa del problema richiede l'uso di relazioni derivate dalla teoria della Relatività Generale.

15. Nel 2015 il team internazionale LIGO/VIRGO ha rivelato le onde gravitazionali prodotte dalla fusione di due buchi neri con 29 e 36 volte la massa del Sole, che hanno formato un unico buco nero con 62 volte la massa del Sole. Calcolare:

1. la quantità totale di energia emessa utilizzando la relazione $E = \Delta m\, c^2$;
2. il raggio massimo del buco nero risultante dalla fusione.

Soluzione.
Espressa in masse solari $\boldsymbol{M_\odot}$, la massa $\boldsymbol{\Delta m}$ che si trasforma in energia vale:

$$\Delta m = (29M_\odot + 36M_\odot) - 62M_\odot = 3M_\odot \simeq 3 \cdot 1.989 \cdot 10^{30} kg \simeq 5.967 \cdot 10^{30} kg$$

La massa del buco nero risultante è quindi di $3M_\odot$ minore della somma della massa dei due buchi neri che si sono fusi. La quantità totale di energia **E** emessa nello spazio sotto forma di onda gravitazionale è stata:

$$E = \Delta m \cdot c^2 \simeq 5.967 \cdot 10^{30} kg \cdot 8.988 \cdot 10^{16} \frac{m^2}{s^2} \simeq 5.363 \cdot 10^{47} \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 5.363 \cdot 10^{47} \text{ J}$$

La velocità di fuga **v** dalla superfice di un corpo di massa **M** e raggio **R** (seconda velocità cosmica) vale:

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2\ \mathrm{G\ M}}{\mathrm{R}}}$$

Nel caso in cui v = c, il corrispondente raggio $\boldsymbol{R_S}$ è detto "raggio di Schwarzschild" e rappresenta il limite (raggio) massimo di un buco nero di massa M (pari a $62 M_{\odot}$ nel nostro caso):

$$R_S = \frac{2 \cdot G \cdot 62\ M_{\odot}}{c^2} \simeq \frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 1.233 \cdot 10^{32} kg}{8.988 \cdot 10^{16} \frac{m^2}{s^2}} \simeq 183 \cdot 10^3\ m = 183\ km$$