

Olimpiadi Italiane di Astronomia 2022

Corso di preparazione alla Gara Interregionale

Categoria Senior - Lezione 1

1. La cometa di Halley dista dal Sole $8.767 \cdot 10^{10}$ m al perielio e $5.248 \cdot 10^{12}$ m all'afelio. Il modulo della sua velocità orbitale al perielio è di 54.6 km/s. Calcolare la velocità all'afelio in km/s e in m/s. Sapendo che l'ultimo passaggio della cometa di Halley al perielio si è verificato il 9 febbraio 1986, calcolate l'anno del più prossimo ritorno al perielio.

Soluzione

Dette D_A, V_A, D_P e V_P le distanze e le velocità della cometa all'afelio e al perielio, dalla II legge di Keplero sappiamo che:

$$V_A \cdot D_A = V_P \cdot D_P$$

quindi:

$$V_A = \frac{D_P}{D_A} V_P = \frac{8.767 \cdot 10^{10} \text{ m}}{5.248 \cdot 10^{12} \text{ m}} \cdot 54.6 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 0.912 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 912 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Note le distanze all'afelio e al perielio ricaviamo il semiasse maggiore a dell'orbita:

$$a = \frac{D_a + D_p}{2} = \frac{8.767 \cdot 10^{10} \text{ m} + 5.248 \cdot 10^{12} \text{ m}}{2} \approx 2.668 \cdot 10^{12} \text{ m} \approx 17.83 \text{ UA}$$

Poiché la cometa di Halley orbita intorno al Sole, il suo periodo di rivoluzione T in anni vale:

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{17.83^3} \approx 75.29 \text{ anni}$$

L'anno A del ritorno al perielio (arrotondando all'intero più prossimo) sarà quindi:

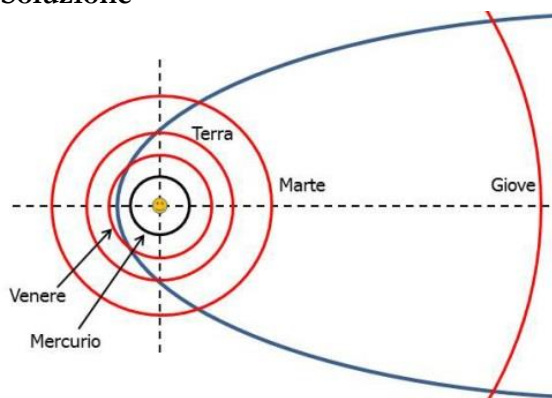
$$A = 1986 + 75 = 2061$$

Nota.

Il periodo orbitale della Halley non è perfettamente costante a causa dell'influenza gravitazionale dei pianeti (in particolare Giove). La data attualmente prevista per il prossimo passaggio al perielio è il 29 luglio 2061.

2. L'orbita di un asteroide ha semiasse maggiore di 7.143 UA e semiasse minore di 2.635 UA. Calcolate l'eccentricità dell'orbita e la distanza dell'asteroide dal Sole al perielio e all'afelio. Supponendo che l'asteroide orbiti in prossimità del piano dell'eclittica, quali sono i pianeti con cui potrebbe entrare in collisione? Questo asteroide fa parte della "Fascia principale degli Asteroidi"? Includete nella soluzione uno o più disegni, possibilmente in scala, con le orbite dei pianeti e dell'asteroide.

Soluzione



Dalle dimensioni dei semiasse maggiore a e minore b ricaviamo l'eccentricità e :

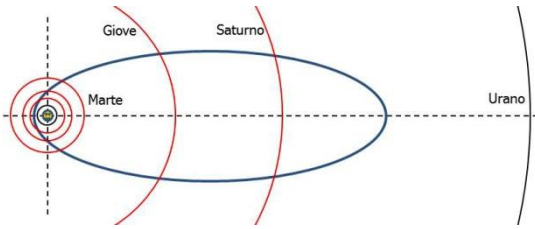
$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{6.943}{51.02}\right)} = 0.9295$$

Le distanze dal Sole al perielio d_P e all'afelio d_A valgono:

$$d_P = a(1 - e) \approx 0.5036 \text{ UA}$$

$$d_A = a(1 + e) \approx 13.78 \text{ UA}$$

La distanza dei pianeti dal Sole in UA è circa: Mercurio = 0.4, Venere = 0.7, Terra = 1, Marte = 1.5, Giove = 5.2; Saturno = 9.5, Urano = 19.6, Nettuno = 30



L'asteroide potrebbe incrociare le orbite dei pianeti con distanza D dal Sole compresa nell'intervallo:

$$0.5036 < D < 13.78$$

cioè Venere, Terra, Marte, Giove e Saturno. La "Fascia principale degli Asteroidi" è compresa tra le orbite di Marte e di Giove, l'asteroide non ne fa parte.

3. L'orbita di un asteroide ha semiasse maggiore e minore rispettivamente pari a 7.143 UA e 2.635 UA. Si determini il periodo orbitale dell'asteroide e il valore del rapporto tra le velocità orbitali all'afelio e al perielio. Da quali parametri orbitali dipende il valore di detto rapporto?

Soluzione:

Detto a il semiasse maggiore dell'orbita, il periodo orbitale T dell'asteroide in anni vale:

$$T = \sqrt{a^3} \approx \sqrt{364.5} \approx 19.09 \text{ anni}$$

L'eccentricità e dell'orbita vale:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{6.943 \text{ UA}^2}{51.02 \text{ UA}^2}\right)} \approx 0.9295$$

Dette D_A, V_A, D_P e V_P le distanze e le velocità dell'asteroide all'afelio e al perielio, dalla II legge di Keplero sappiamo che:

$$V_A \cdot D_A = V_P \cdot D_P$$

quindi:

$$\frac{V_A}{V_P} = \frac{D_P}{D_A} = \frac{a(1-e)}{a(1+e)} = \frac{1-e}{1+e} \approx 0.03654 = 3.654 \cdot 10^{-2}$$

Nota.

il rapporto delle velocità dipende unicamente dall'eccentricità dell'orbita.

4. Un satellite artificiale orbita attorno alla Terra su un'orbita ellittica con semiasse maggiore e minore rispettivamente pari a $1.522 \cdot 10^4 \text{ km}$ e $1.321 \cdot 10^4 \text{ km}$. Calcolate la distanza minima del satellite al perigeo e all'apogeo rispetto alla superficie della Terra e il suo periodo di rivoluzione.

Soluzione

Detti a e b la lunghezza dei due semiasse, l'eccentricità e dell'orbita del satellite è data dalla relazione:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} \approx \sqrt{1 - \left(\frac{1.745 \cdot 10^8 \text{ km}^2}{2.316 \cdot 10^8 \text{ km}^2}\right)} \approx 0.4965$$

Le distanze del satellite dal centro della Terra al perigeo D_P e all'apogeo D_A valgono quindi:

$$D_P = a(1-e) \approx 7663 \text{ km} \quad D_A = a(1+e) \approx 2.278 \cdot 10^4 \text{ km}$$

La distanza minima di un satellite dalla superficie terrestre si ha quando un osservatore lo vede transitare allo zenith. Quindi per ottenere la distanza minima nei due casi (H_P e H_A) basta sottrarre il raggio della Terra alle distanze all'afelio e al perielio:

$$H_P = D_P - R_T \approx 1285 \text{ km} \quad H_A = D_A - R_T \approx 1.640 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Applicando la III legge di Keplero generalizzata e considerando che la massa del satellite è ovviamente trascurabile rispetto a quella della Terra, il periodo di rivoluzione T è dato da:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M_T}} \approx \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.526 \cdot 10^{21} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} \approx$$

$$\approx \sqrt{3.493 \cdot 10^8 s^2} \approx 1.869 \cdot 10^4 s \approx 311.5 \text{ minuti} \approx 5 \text{ h } 12 \text{ minuti}$$

5. Un asteroide di forma sferica ha un raggio di 200 km e la sua densità media è pari a quella di Mercurio. Calcolate il valore dell'accelerazione di gravità alla superficie dell'asteroide in m/s^2 .

Soluzione

La massa M di un corpo, nota la sua densità media ρ e il volume V , vale:

$$M = \rho V$$

In particolare, per un asteroide sferico di raggio R_a , la sua massa M_a vale:

$$M_a = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R_a^3$$

Il problema si può quindi risolvere calcolando la densità ρ di Mercurio e inserendo il valore ottenuto nella formula per il calcolo della massa dell'asteroide.

In alternativa, detti R_M e M_M il raggio e la massa di Mercurio e ρ_a e ρ_M le densità dell'asteroide e di Mercurio, consideriamo il rapporto tra la massa dell'asteroide e quella di Mercurio:

$$\frac{M_a}{M_M} = \frac{\rho_a \frac{4}{3} \pi R_a^3}{\rho_M \frac{4}{3} \pi R_M^3}$$

Poiché le densità dei due corpi sono uguali avremo infine:

$$M_a = M_M \left(\frac{R_a}{R_M} \right)^3$$

$$M_a \approx 3.301 \cdot 10^{23} kg \left(\frac{200 \text{ km}}{2440 \text{ km}} \right)^3 \approx 3.301 \cdot 10^{23} kg \cdot 5.51 \cdot 10^{-4} \approx 1.82 \cdot 10^{20} kg$$

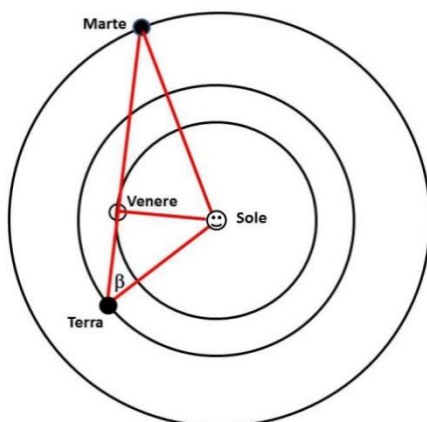
Nota la massa possiamo calcolare l'accelerazione di gravità g_a sulla superficie dell'asteroide:

$$g_a = \frac{G \cdot M_a}{R_a^2} \approx \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 1.82 \cdot 10^{20} kg}{(200 \cdot 10^3 m)^2} \approx 0.304 \frac{m}{s^2}$$

6. Osservate una configurazione planetaria molto particolare, con Venere visibile al tramonto alla massima elongazione e angularmente vicinissimo (in congiunzione) con Marte. Calcolate la distanza Terra-Marte in quel momento, assumendo tutte le orbite circolari e trascurando le loro inclinazioni sull'eclittica.

Suggerimento: realizzate un disegno (in scala) dell'orbita dei tre pianeti attorno al Sole. Posizionate i pianeti assumendo che Venere e Marte siano angularmente così vicini da poter essere collocati sulla stessa retta.

Soluzione



Quando Venere è a una massima elongazione, la retta Terra-Venere è tangente all'orbita di Venere. Con le approssimazioni usate possiamo assumere che Sole, Terra, Venere e Marte si trovino ai vertici di due triangoli rettangoli, con il lato Venere-Sole in comune. Detti VT la distanza Terra-Venere, MV la distanza Marte-Venere, VS la distanza Venere-Sole, MS la distanza Marte-Sole, TS la distanza Terra-Sole e MT la distanza Marte-Terra possiamo risolvere il problema con il teorema di Pitagora.

$$VT = \sqrt{TS^2 - VS^2} \approx \sqrt{2.238 \cdot 10^{16} \text{ km}^2 - 1.171 \cdot 10^{16} \text{ km}^2} \approx 103.3 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$MV = \sqrt{MS^2 - VS^2} \approx \sqrt{5.194 \cdot 10^{16} \text{ km}^2 - 1.171 \cdot 10^{16} \text{ km}^2} \approx 200.6 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$MT = VT + MV \approx 103.3 \cdot 10^6 \text{ km} + 200.6 \cdot 10^6 \text{ km} \approx 303.9 \cdot 10^6 \text{ km}$$

7. Calcolare il periodo sinodico di Nettuno se osservato da un corpo il cui semiasse maggiore dell'orbita intorno al Sole vale $227.9 \cdot 10^6 \text{ km}$.

Soluzione

Dal valore del semiasse maggiore deduciamo che il corpo da cui è fatta l'osservazione è Marte, il cui periodo siderale P è:

$$P \approx 686.97 \text{ giorni} \approx 1.8808 \text{ anni}$$

Detto E il periodo siderale di Nettuno, il suo periodo sinodico S visto da Marte varrà quindi:

$$S = \frac{E \cdot P}{|E - P|} \approx \frac{309.93 \text{ anni}^2}{162.91 \text{ anni}} \approx 1.9025 \text{ anni} \approx 694.89 \text{ giorni}$$

Nota:

il valore calcolato è espresso in giorni terrestri, ma un osservatore su Marte calcolerebbe tutte le grandezze in unità (giorni o anni) marziane. Il giorno marziano è chiamato "sol".

8. Calcolate il peso di un corpo di massa $m = 100 \text{ kg}$ all'equatore di Mercurio e all'equatore di Saturno, considerando l'effetto della forza centrifuga dovuta alla rotazione. Il periodo di rotazione dei due pianeti è, rispettivamente, di 1407.5 h e 10h 33m. Poiché Saturno non ha una superficie solida, si assuma come distanza dal centro il raggio medio del pianeta.

Soluzione

Detta g l'accelerazione di gravità, il peso P di un corpo è la forza di gravità tra corpo e pianeta:

$$P = m g$$

Dalla relazione: $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$ l'accelerazione di gravità alla superficie di Mercurio g_M e di Saturno g_S vale:

$$g_M = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 3.301 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{(2440 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 3.700 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad g_S = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26} \text{ kg}}{(60267 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 10.45 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

In assenza di rotazione il peso del corpo su Mercurio P_M e su Saturno P_S sarà quindi:

$$P_M = m \cdot g_M \approx 370 \text{ N} \quad P_S = m \cdot g_S \approx 1045 \text{ N}$$

Detti T il periodo di rotazione, $v (= \frac{2\pi R}{T})$ il modulo della velocità tangenziale alla superficie e R il raggio di un pianeta, la forza centrifuga F_c è data dalla relazione:

$$F_c = m \frac{v^2}{R} = m \frac{4\pi^2 \cdot R}{T^2}$$

e all'equatore è diretta esattamente in senso opposto alla gravità e rende minore il peso del corpo. Per i due pianeti avremo:

$$F_{cM} \approx 100 \text{ kg} \frac{39.48 \cdot 2440 \cdot 10^3 \text{ m}}{25.67 \cdot 10^{12} \text{ s}^2} \approx 3.75 \cdot 10^{-4} \text{ N} \quad F_{cS} \approx 100 \text{ kg} \frac{39.48 \cdot 60267 \cdot 10^3 \text{ m}}{144.2 \cdot 10^7 \text{ s}^2} \approx 165 \text{ N}$$

Tenendo conto della rotazione il peso del corpo all'equatore di Mercurio P_{M-R} e di Saturno P_{S-R} vale:

$$P_{M-R} \approx 370 \text{ N} - 3.75 \cdot 10^{-4} \text{ N} \approx P_M \quad P_{S-R} \approx 1045 \text{ N} - 165 \text{ N} \approx 880 \text{ N}$$

9. Un astronauta, il cui peso sulla Terra è di 686.7 N, si trova sulla superficie di un pianeta e lasciando cadere un oggetto misura che per percorrere 5.41 m esso impiega 1.01 secondi. La lunghezza dell'equatore del pianeta, supposto sferico, è pari a $3.657 \cdot 10^4 \text{ km}$. Quanto vale la massa del pianeta e quanto pesa, trascurando gli effetti dovuti alla rotazione, l'astronauta sul pianeta?

Soluzione

La caduta libera del corpo segue la legge del moto uniformemente accelerato, detto S lo spazio percorso nel tempo t e g_P l'accelerazione sulla superficie del pianeta si ha:

$$S = \frac{1}{2} g_P t^2 \quad g_P = \frac{2S}{t^2} \approx \frac{10.82 \text{ m}}{1.02 \text{ s}^2} \approx 10.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Detta C la lunghezza dell'equatore, il raggio R del pianeta vale:

$$R = \frac{C}{2\pi} \approx \frac{3.657 \cdot 10^4 \text{ km}}{2\pi} \approx 5.820 \cdot 10^3 \text{ km} = 5.820 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La massa M del pianeta è data dalla relazione:

$$M = g_P \frac{R^2}{G} = \frac{10.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3.387 \cdot 10^{13} \text{ m}^2}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}} \approx 5.38 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

La massa dell'astronauta M_a si può ricavare dal suo peso sulla Terra P_T e, detta g_T l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre, vale:

$$M_a = \frac{P_T}{g_T} \approx \frac{686.7 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9.807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 70.02 \text{ kg}$$

Il suo peso P_P sul pianeta sarà quindi:

$$P_P = M_a \cdot g_P \approx 70.02 \text{ kg} \cdot 10.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 742 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 742 \text{ N}$$

10. Un pianeta di massa $1.6 \cdot 10^{26} \text{ kg}$ si muove attorno a una stella su un'orbita il cui semiasse maggiore è di 9.00 UA con un periodo di 20.0 anni. Trovare la massa (in kg e in unità di masse solari) e il raggio (in km e in unità del raggio solare) della stella, sapendo che l'accelerazione di gravità sulla fotosfera della stella è 54 volte quella che si ha sulla superficie della Terra.

Soluzione

Detto a il semiasse maggiore dell'orbita e T il periodo di rivoluzione, trascurando la massa del pianeta (vedere nota alla fine), ricaviamo la massa della stella M_s dalla III legge di Keplero:

$$M_s = \frac{4 \pi^2 a^3}{G T^2} \approx \frac{39.48 \cdot 2.44 \cdot 10^{36} \text{ m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 3.98 \cdot 10^{17} \text{ s}^2} \approx 3.63 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 1.82 M_\odot$$

Detta g_s l'accelerazione di gravità sulla fotosfera della stella e g_T l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra, possiamo ricavare il raggio della stella R_s dalla relazione:

$$R_s = \sqrt{\frac{G \cdot M_s}{g_s}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_s}{54 \cdot g_{Terra}}}$$
$$R_s \approx \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 3.63 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{54 \cdot 9.807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 6.76 \cdot 10^5 \text{ km} \approx 0.973 R_\odot$$

Nota.

L'assunzione iniziale massa del pianeta trascurabile rispetto a quella, non ancora nota, della stella, risulta giustificata in quanto sappiamo, dallo studio della struttura ed evoluzione stellare, che la massa minima di una stella è: $M_{\text{minima stella}} \geq 0.08 \cdot M_\odot \approx 1.59 \cdot 10^{29} \text{ kg} \approx 1000 \cdot M_{\text{pianeta}}$

11. Calcolate il minimo periodo di rivoluzione di un corpo di piccola massa che si muove su un'orbita circolare attorno a una nana bianca (White Dwarf = WD) il cui raggio è pari a quello della Terra. A che frazione della velocità della luce si muove il corpo? Nella soluzione si tenga conto che il massimo valore possibile per la massa di una WD è pari a 1.44 volte quella del Sole.

Soluzione

Il periodo di rivoluzione T di un corpo di massa trascurabile in orbita a una distanza a intorno a una stella di massa M vale:

$$T = \sqrt{\frac{4 \pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M}}$$

Il valore minimo del periodo T_{MIN} si avrà quando il raggio dell'orbita è minimo (poiché si trova al numeratore), e quando la massa della WD è massima (poiché si trova al denominatore). Il raggio minimo dell'orbita è pari al raggio R_{WD} della WD, che sappiamo essere pari al raggio della Terra R_T . Dalla teoria dell'evoluzione stellare sappiamo che il valore massimo M_{WD-max} della massa di una WD è pari a 1.44 volte la massa del Sole M_{\odot} . Avremo quindi:

$$T_{MIN} = \sqrt{\frac{4 \pi^2 \cdot R_T^3}{G \cdot 1.44 M_{\odot}}}$$

$$T_{MIN} \approx \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 2.595 \cdot 10^{20} m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 1.44 \cdot 1.989 \cdot 10^{30} kg}} \approx 7.32 s$$

Detta C la lunghezza dell'orbita del corpo, la sua velocità v è data da:

$$v = \frac{C}{T} = \frac{2 \pi R_T}{T} \approx \frac{40074 km}{7.32 s} \approx 5.47 \cdot 10^3 \frac{km}{s} \approx 0.0183 c = 1.83 \cdot 10^{-2} c$$

12. Un satellite artificiale ruota attorno alla Terra, che assumiamo perfettamente sferica, su un'orbita equatoriale circolare a una distanza di 4325 km dalla superficie. Un osservatore lo vede passare al meridiano a mezzanotte. Dopo quanto tempo lo vedrà passare nuovamente al meridiano se:
- il satellite si muove da Ovest verso Est;
 - il satellite si muove da Est verso Ovest?

Soluzione

Detta h l'altezza del satellite dalla superficie e R_T il raggio della Terra, la distanza D del satellite dal centro della Terra vale:

$$D = R_T + h = 6378 + 4325 = 10703 km$$

Possiamo ricavare il periodo di rivoluzione T_s del satellite dalla III legge di Keplero:

$$T_s = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 D^3}{G \cdot M_T}} \approx \sqrt{\frac{39.478 \cdot 1.2261 \cdot 10^{21} m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} kg}} \approx 11020 s \approx 183.7 m \approx 3h 4m$$

I passaggi successivi del satellite al meridiano di un luogo avvengono a intervalli di tempo pari al suo periodo sinodico S riferito al periodo di rotazione siderale della Terra T_T ($= 23h 56m 4s = 86164 s$)

- a. Se il satellite si muove da Ovest verso Est, ovvero nello stesso senso della rotazione della Terra vale la relazione:

$$S = \frac{T_s \cdot T_T}{|T_s - T_T|} \approx \frac{11020 s \cdot 86164 s}{75144} \approx 12640 s \approx 210.6 m \approx 3h 31m$$

- b. Se il satellite si muove da Est verso Ovest, ovvero in direzione opposta alla rotazione della Terra vale la relazione:

$$S = \frac{T_S \cdot T_T}{|T_S + T_T|} \simeq \frac{11020 \text{ s} \cdot 86164 \text{ s}}{97184} \simeq 9770 \text{ s} \simeq 162.8 \text{ m} \simeq 2 \text{ h } 43 \text{ m}$$

13. Considerate un ipotetico osservatore posto al centro della Terra e calcolate le dimensioni angolari (diametro apparente) che misurerebbe per il Sole quando la Terra si trova all'afelio e al perielio. Confrontate questi valori con quelli che misurerebbe per le dimensioni angolari della Luna al perigeo e all'apogeo.

Soluzione

Detti \mathbf{a}_T il semiasse maggiore ed \mathbf{e}_T l'eccentricità dell'orbita della Terra, le distanze dell'osservatore dal Sole all'afelio $\mathbf{d}_{A\odot}$ e al perielio $\mathbf{d}_{P\odot}$ valgono:

$$d_{A\odot} = a_T (1 + e_T) \simeq 152.1 \cdot 10^6 \text{ km} \quad d_{P\odot} = a_T (1 - e_T) \simeq 147.1 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Quindi, detto \mathbf{R}_\odot il raggio del Sole, per un osservatore al centro della Terra le dimensioni angolari minime $\mathbf{D}_{A\odot}$ (Terra all'afelio) e massime $\mathbf{D}_{P\odot}$ (Terra al perielio) del Sole valgono:

$$D_{A\odot} = 2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{R_\odot}{d_{A\odot}} \right) \simeq 31'.44 \quad D_{P\odot} = 2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{R_\odot}{d_{P\odot}} \right) \simeq 32'.51$$

Detti \mathbf{a}_L il semiasse maggiore ed \mathbf{e}_L l'eccentricità dell'orbita della Luna, le distanze dell'osservatore dalla Luna all'apogeo \mathbf{d}_{AL} e al perigeo \mathbf{d}_{PL} valgono:

$$d_{AL} = a_L (1 + e_L) \simeq 405.5 \cdot 10^3 \text{ km} \quad d_{PL} = a_L (1 - e_L) \simeq 363.3 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Quindi, detto \mathbf{R}_L il raggio della Luna, per un osservatore al centro della Terra le dimensioni angolari minime \mathbf{D}_{AL} (Luna all'apogeo) e massime \mathbf{D}_{PL} (Luna al perigeo) della Luna valgono:

$$D_{AL} = 2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{R_L}{d_{AL}} \right) \simeq 29'.47 \quad D_{PL} = 2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{R_L}{d_{PL}} \right) \simeq 32'.89$$

Notiamo che quando la Luna si trova all'apogeo la sua dimensione angolare è minore di quella del Sole anche quando la Terra è all'afelio, mentre quando la Luna si trova al perigeo la sua dimensione angolare è maggiore di quella del Sole anche quando la Terra è al perielio.

14. Le stelle di neutroni sono corpi estremamente densi e in rapida rotazione. Consideriamo una di tali stelle con raggio di 15.1 km e periodo di rotazione pari a $1.41 \cdot 10^{-3}$ s.
1. Stimate la velocità tangenziale all'equatore in frazione della velocità della luce;
 2. Stimate la sua massa minima per trattenere oggetti all'equatore altrimenti espulsi a causa della rotazione;
 3. Spiegate perché una stella di neutroni ruota così velocemente.

Soluzione

1. Detti \mathbf{R} il raggio della stella e \mathbf{M} la sua massa, la velocità tangenziale \mathbf{v}_t all'equatore è data dalla relazione:

$$v_t = \frac{2 \pi R}{T} \simeq \frac{2 \pi \cdot 15.1 \text{ km}}{1.41 \cdot 10^{-3} \text{ s}} \simeq 6.73 \cdot 10^4 \frac{\text{km}}{\text{s}} \simeq 0.224 c$$

2. Per impedire che un corpo di piccola massa sfugga a causa della rotazione, la forza di gravità deve essere almeno uguale alla forza centrifuga. Ciò equivale a dire che il modulo della velocità tangenziale all'equatore deve essere al massimo pari alla prima velocità cosmica:

$$v_t = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

da cui ricaviamo il valore minimo della massa \mathbf{M}_{min} della stella di neutroni:

$$M_{min} = \frac{R \cdot v_t^2}{G} \simeq \frac{15.1 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot 4.53 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}} \simeq 1.02 \cdot 10^{30} \text{ kg} \simeq 0.515 M_\odot$$

3. Una stella di neutroni è il resto di una stella di grande massa ($> 10 M_{\odot}$) esplosa come supernova. Prima di esplodere la stella era una gigante o supergigante rossa. La conservazione del momento angolare (anche se in realtà nel corso dell'esplosione gran parte del momento angolare viene perso) fa sì che la stella di neutroni abbia un periodo di rotazione estremamente breve.

Nota. Il valore ottenuto per la massa è un limite minimo; le stelle di neutroni hanno masse M comprese nell'intervallo:

$$1.5 M_{\odot} < M < 2.1 M_{\odot}$$

15. Una stella di neutroni ha raggio di 15.0 km e massa pari al doppio di quella del Sole. Calcolare: la densità media della stella, l'accelerazione di gravità sulla sua superficie, la velocità di arrivo al suolo di un corpo che, partendo da fermo, cade da un'altezza di 2 m e il tempo di caduta del corpo. Calcolare inoltre il peso sulla superficie della Terra di 1 cm³ di materia della stella di neutroni e le dimensioni di un cubo di ferro (densità del ferro $\rho_{FE} = 7870 \text{ kg/m}^3$) con la stessa massa di 1 cm³ di materia della stella di neutroni.

Soluzione

Detti M la massa, V il volume e R il raggio, la densità media ρ della stella di neutroni è data dalla relazione:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} \approx \frac{3 \cdot 3.978 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{12.57 \cdot 3.38 \cdot 10^{12} \text{ m}^3} \approx 2.81 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 2.81 \cdot 10^{11} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

L'accelerazione di gravità a_{gN} sulla superficie della stella di neutroni vale:

$$a_{gN} = \frac{GM}{R^2} \approx \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 3.978 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{225 \cdot 10^6 \text{ m}^2} \approx 1.18 \cdot 10^{12} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Poiché il rapporto K tra la distanza iniziale h del corpo dalla superficie e il raggio della stella vale:

$$K = \frac{h}{R} = \frac{2 \text{ m}}{15 \text{ km}} \approx 1.3 \cdot 10^{-4}$$

possiamo considerare costante l'accelerazione di gravità lungo il percorso e calcolare la velocità di arrivo v considerando un moto uniformemente accelerato con partenza da fermo:

$$v = \sqrt{2 a_{gN} h} \approx \sqrt{2 \cdot 1.18 \cdot 10^{12} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m}} \approx 2.17 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2.17 \cdot 10^3 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 7 \cdot 10^{-3} c$$

Il tempo t di caduta è dato dalla relazione:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_{gN}}} = \sqrt{\frac{4 \text{ m}}{1.18 \cdot 10^{12} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 1.84 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

La massa M_1 di 1 cm³ di materia della stella di neutroni vale:

$$M_1 = V \cdot \rho \approx 1 \text{ cm}^3 \cdot 2.81 \cdot 10^{11} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \approx 2.81 \cdot 10^{11} \text{ kg}$$

Detta a_{gT} l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra, il peso P_1 della massa M_1 sarebbe:

$$P_1 = M_1 a_{gT} \approx 2.81 \cdot 10^{11} \text{ kg} \cdot 9.807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2.76 \cdot 10^{12} \text{ N}$$

Per avere una massa di ferro M_{Fe} pari a M_1 avremo bisogno di un volume di ferro V_{Fe} pari a:

$$V_{Fe} = \frac{M_{Fe}}{\rho_{Fe}} \approx \frac{2.81 \cdot 10^{11} \text{ kg}}{7870 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \approx 3.57 \cdot 10^7 \text{ m}^3$$

e quindi di un cubo con lato L pari a:

$$L = \sqrt[3]{V_{Fe}} \approx \sqrt[3]{3.57 \cdot 10^7 \text{ m}^3} \approx 329 \text{ m}$$