Olimpiadi Italiane di Astronomia 2022
Corso di preparazione alla Gara Interregionale
Categoria Junior 2 - Lezione 2

1. Utilizzando le proprietà dei logaritmi in base 10 determinare:

log 10 = ? log 1000 = ? log 1 = ? log (a · b) = ? $\log \frac{a}{b}$ = ?

$\log (a)^3$ = ? $\log 10^6$ = ? $\log \sqrt{10}$ = ? $\sqrt[4.7]{36.54}$ = ?

Soluzione

log 10 = 1 log 1000 = 3 log 1 = 0 log (a · b) = log a + log b

$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ $\log (a)^3 = 3 \log a$ $\log 10^6 = 6$ $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2} \log 10 = 0.5$

Per risolvere l'ultimo poniamo $\sqrt[4.7]{36.54} = x$

e consideriamo il logaritmo di ambo i membri: $\frac{1}{4.7} \log 36.54 = \log x$ da cui: $0.3325 = \log x$

e passando agli esponenziali: $x = 10^{0.3325} = 2.150$

2. La stella Arturo (= α Boo) ha magnitudine apparente $m = -0.05$ e parallasse 0".088. Calcolate la sua distanza, in pc e in anni luce, e la sua magnitudine assoluta.

Soluzione

Dalla parallasse π di Arturo ricaviamo la distanza D in parsec e in anni luce:

$$D = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0''.088} \simeq 11.4\ pc \simeq 37.2\ anni\ luce$$

La magnitudine assoluta **M** vale:

$$\mathrm{M = m + 5 - 5 \log D\ (pc)} \simeq -0.05 + 5 - 5.28 = -0.33$$

3. Completare la seguente tabella, dove m è la magnitudine apparente, π la parallasse, d la distanza e M la magnitudine assoluta.

Nome	m	π (")	d (pc)	d (al)	M
α Cen A	-0.01	0.747			
α CMa (= Sirio)	-1.43		2.63		
61 Cyg A	5.21			11.4	
α Aql (= Altair)		0.194			2.21

Soluzione

Le relazioni che legano tra di loro le quantità in tabella sono:

$$\frac{1}{\pi''} = \mathrm{d\ (pc)} \qquad \mathrm{d\ (al)} \simeq 3.2616\ \mathrm{d\ (pc)} \qquad \mathrm{M = m + 5 - 5 \log\ d\ (pc)}$$

Nome	m	π (")	d (pc)	d (al)	M
α Cen A	-0.01	0.747	1.34	4.37	4.35
α CMa (= Sirio)	-1.43	0.380	2.63	8.58	1.47
61 Cyg A	5.21	0.286	3.50	11.4	7.49
α Aql (= Altair)	0.77	0.194	5.16	16.8	2.21

4. Verificate il valore della magnitudine assoluta del Sole $M_\odot = 4.83$, sapendo che dalla Terra la sua magnitudine apparente media è $m_\odot = -26.74$

Soluzione
Esprimiamo la distanza media della Terra dal Sole in parsec:

$$1 \text{ UA} = \frac{1}{206265} \ parsec$$

La magnitudine assoluta del Sole vale quindi:

$$M_\odot = -26.74 + 5 - 5\log\left(\frac{1}{206265}\right) \simeq 4.83$$

5. La magnitudine apparente del Sole visto dalla Terra è $m_\odot = -26.74$. Calcolate la magnitudine apparente media del Sole visto da: Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno.

Soluzione
La relazione che lega la magnitudine apparente del Sole $\boldsymbol{m_\odot}$ a quella assoluta $\boldsymbol{M_\odot}$ è:

$$m_\odot = M_\odot - 5 + 5\log d$$

La magnitudine assoluta del Sole vale $M_\odot = 4.83$. Poiché 1 km $\simeq \frac{1}{30857 \cdot 10^9}$ pc, per le distanze medie $\boldsymbol{d}$ dei pianeti dal Sole in parsec e per la magnitudine apparente del Sole avremo:

Pianeta	d (pc)	$m_\odot$
Mercurio	$1.877 \cdot 10^{-6}$	-28.80
Venere	$3.507 \cdot 10^{-6}$	-27.45
Marte	$7.386 \cdot 10^{-6}$	-25.83
Giove	$2.523 \cdot 10^{-5}$	-23.16
Saturno	$4.625 \cdot 10^{-5}$	-21.84

6. Sirio (= α CMa; $m = -1.43$) si trova a 8.58 anni luce dal Sole. Quanto varrebbe la sua magnitudine apparente se si trovasse a una distanza dieci volte maggiore?

Soluzione
La distanza della Terra dal Sole è ovviamente trascurabile rispetto alla distanza Sole-Sirio. Detti $\boldsymbol{m_1}$ la magnitudine di Sirio alla distanza **d** = 8.58 anni luce, $\boldsymbol{m_2}$ la magnitudine che avrebbe Sirio se si trovasse alla distanza **D** = 85.8 anni luce, $\boldsymbol{L_{Sirio}}$ la luminosità di Sirio e $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ i flussi in arrivo a Terra nei due casi vale la relazione:

$$m_1 - m_2 = -2.5\log\frac{F_1}{F_2} = -2.5\log\frac{L_{Sirio}}{4\,\pi\,d^2} \cdot \frac{4\,\pi\,D^2}{L_{Sirio}}$$

da cui si ricava:

$$m_2 = m_1 + 2.5\log\frac{D^2}{d^2} = -1.43 + 5\log 10 = 3.57$$

Generalmente si assume $\boldsymbol{m_{limite}} = 6$ come limite di visibilità a occhio nudo nelle migliori condizioni osservative, quindi Sirio risulterebbe ancora visibile.

7. La magnitudine apparente media della Luna Piena vale -12.74. Calcolate il valore della magnitudine assoluta della Luna Piena.

Soluzione
La relazione che lega la magnitudine assoluta della Luna Piena $\boldsymbol{M_{Luna}}$ a quella apparente $\boldsymbol{m_{Luna}}$ è:

$$M_{Luna} = m_{Luna} + 5 - 5\log d$$

poiché $1 \text{ pc} = 30857 \cdot 10^{9}$ km , la distanza media $\boldsymbol{d_{LT}}$ della Luna dalla Terra in parsec vale:

$$\mathrm{d_{LT}} \simeq \frac{384.4 \cdot 10^{3}\ km}{30857 \cdot 10^{9}\ \frac{km}{pc}} \simeq 1.246 \cdot 10^{-8}\ pc$$

La magnitudine assoluta della Luna Piena vale quindi:

$$\mathrm{M_{Luna}} = -12.74 + 5 - 5 \log\ (1.246 \cdot 10^{-8}) \simeq 31.78$$

8. Se potessero essere osservate individualmente, le componenti di una binaria spettroscopica avrebbero magnitudini apparenti pari a 3.74 e 4.15. Quanto vale la magnitudine apparente totale della binaria spettroscopica?

Soluzione
La magnitudine totale di due o più stelle NON è la somma delle singole magnitudini, ma la risposta del rivelatore (ad es. il nostro occhio) alla somma dei flussi delle singole stelle.
Si può dimostrare che per calcolare la magnitudine totale $\mathbf{m_T}$ di due stelle di magnitudine $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ possiamo usare una delle due seguenti relazioni:

$$\mathrm{m_T} = -2.5 \log\ (10^{-0.4\, \mathrm{m_1}} + 10^{-0.4\, \mathrm{m_2}})$$

$$\mathrm{m_T} = \mathrm{m_2} - 2.5 \log\ \left(10^{0.4\, (\mathrm{m_2} - \mathrm{m_1})} + 1\right)$$

ottenendo:

$$\mathrm{m_T} = -2.5 \log\ (10^{-1.496} + 10^{-1.66}) \simeq 3.17$$

$$\mathrm{m_T} = 4.15 - 2.5 \log\ \left(10^{0.4\, (4.15 - 3.74)} + 1\right) \simeq 3.17$$

Nota.
La prima delle due relazioni per il calcolo di $\mathrm{m_T}$ è utile quando si devono sommare i flussi di più di due stelle. Nel caso di due stelle è spesso di più rapido utilizzo la seconda formula, che si ottiene come segue dalla definizione di magnitudine:

$$\mathrm{m_T} = -2.5 \log\ (F_1 + F_2) \qquad \text{e} \qquad m_1 - m_2 = -2.5 \log\ \left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

Dalla seconda relazione si ricava $F_1 = F_2 \cdot 10^{-0.4\, (m_1 - m_2)}$ e sostituendo nella prima otteniamo:

$$\mathrm{m_T} = -2.5 \log\ \left(F_2 \cdot 10^{-0.4\, (m_1 - m_2)} + F_2\right) = -2.5 \log F_2 - 2.5 \log\ \left(10^{-0.4\, (m_1 - m_2)} + 1\right)$$

$$\mathrm{m_T} = \mathrm{m_2} - 2.5 \log\ \left(10^{0.4\, (\mathrm{m_2} - \mathrm{m_1})} + 1\right)$$

Relazione che si può ricavare nella forma del tutto equivalente:

$$\mathrm{m_T} = \mathrm{m_1} - 2.5 \log\ \left(10^{0.4\, (\mathrm{m_1} - \mathrm{m_2})} + 1\right)$$

9. Calcolate la differenza di magnitudine tra la Luna Piena osservata al perigeo e la Luna Piena osservata all'apogeo.

Soluzione
Trascurando la differenza del flusso solare incidente nei due casi (la differenza tra la distanza della Luna al perigeo e all'apogeo dalla Terra è $\simeq 2.9 \cdot 10^{-4}$ la distanza media della Terra dal Sole) il flusso riflesso dalla Luna, a parità di condizioni osservative, dipende unicamente dalla superficie illuminata visibile ed è ad essa proporzionale.
Dette $\mathbf{d_{ALuna}}$ e $\mathbf{d_{PLuna}}$ le distanze della Luna all'apogeo e al perigeo (calcolabili tramite le relative formule), i corrispondenti raggi apparenti $\boldsymbol{R_{ALuna}}$ e $\boldsymbol{R_{PLuna}}$ della Luna sono dati da:

$$R_{ALuna} = \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_{Luna}}}{\mathrm{d_{ALuna}}}\right) \simeq sin^{-1}\left(\frac{1738}{405.7 \cdot 10^{3}}\right) \simeq 14'.73$$

$$R_{PLuna} = \sin^{-1}\left(\frac{R_{Luna}}{d_{PLuna}}\right) \simeq sin^{-1}\left(\frac{1738}{363.1 \cdot 10^3}\right) \simeq 16'.46$$

Quindi le aree del disco lunare all'apogeo $\boldsymbol{A_{ALuna}}$ e al perigeo $\boldsymbol{A_{PLuna}}$ sono date da:

$$A_{ALuna} = \pi\, R_{ALuna}{}^2 \simeq 681.6\ arcmin^2 \qquad A_{PLuna} = \pi\, R_{PLuna}{}^2 \simeq 851.2\ arcmin^2$$

La differenza di magnitudine $\boldsymbol{\Delta m}$ vale quindi:

$$\Delta\mathrm{m} = m_p - m_A = -2.5 \log \frac{F_P}{F_A} \simeq -2.5 \log \frac{851.2\ arcmin^2}{681.6\ arcmin^2} \simeq -2.5 \log 1.249 \simeq -0.24$$

In alternativa, considerando che il flusso diminuisce con l'inverso del quadrato della distanza si ha:

$$\Delta\mathrm{m} = m_p - m_A = -2.5 \log \frac{F_P}{F_A} = -2.5 \log \frac{d_{ALuna}{}^2}{d_{PLuna}{}^2} = -5 \log \frac{405.7 \cdot 10^3\ km}{363.1 \cdot 10^3\ km} \simeq -5 \log 1.117 \simeq -0.24$$

10. Da una stella **γ** riceviamo sulla Terra un flusso luminoso 8560 volte minore rispetto a quello di una stella **β**. Se la magnitudine apparente della stella **β** è 2.86, calcolare la magnitudine apparente della stella **γ**.

Soluzione

Detti $\mathbf{F_\gamma}$ e $\mathbf{F_\beta}$ i flussi ricevuti dalle due stelle, la loro differenza di magnitudine apparente vale:

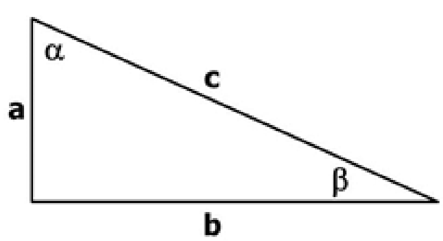
$$m_\gamma - m_\beta = -2.5 \log \frac{F_\gamma}{F_\beta} = -2.5 \log \frac{1}{8560} \simeq 9.83$$

La magnitudine apparente della stella **γ** vale quindi:

$$m_\gamma = m_\beta + 9.83 \simeq 12.69$$

11. In un triangolo rettangolo l'angolo formato dall'ipotenusa e dal cateto maggiore vale 25".88. Sapendo che il cateto maggiore ha una lunghezza pari a 384.4 · 10^3 km, calcolate la lunghezza del cateto minore.

Soluzione



Si consideri la figura a sinistra (non in scala). Detto **β** l'angolo formato dall'ipotenusa **c** e dal cateto maggiore **b**, per il cateto minore **a** otteniamo:

$$a = b \cdot \tan\beta = 384.4 \cdot 10^3\ km \cdot \tan\frac{25''.88}{3600}$$

$$a = 384.4 \cdot 10^3\ km \cdot \tan 7^\circ.189 \cdot 10^{-3} \simeq 48.23\ km$$

12. Disponiamo di un telescopio riflettore Cassegrain con uno specchio da 15 cm e rapporto di apertura f/10. Per osservare visualmente con questo strumento abbiamo acquistato un set di tre oculari, che hanno tutti un campo di vista (FoV) di 60° e lunghezza focale, rispettivamente, di 4 mm, 10 mm e 20 mm. Calcolate la focale del telescopio, quanti ingrandimenti e che FoV otterremo utilizzando i tre oculari e con quale oculare potremo osservare l'intero disco lunare.

Soluzione

Il rapporto di apertura f/n indica quante volte (n) la focale del telescopio $\boldsymbol{F_{Tel}}$ è maggiore dell'apertura (ovvero del diametro dello specchio). Detta **D** l'apertura, la focale del nostro telescopio vale:

$$F_{Tel} = D \cdot 10 = 15\ \mathrm{cm} \cdot 10 = 150\ \mathrm{cm} = 1500\ \mathrm{mm}$$

Detta f_{oc} la focale di un oculare, l'ingrandimento **I** che si ottiene da un telescopio è dato dalla relazione:

$$I = \frac{F_{Tel}}{f_{oc}}$$

Per ogni ingrandimento così ottenuto, detto $\mathbf{FoV_{oc}}$ il campo di vista dell'oculare, per il campo di vista $\mathbf{FoV_{Tel}}$ del telescopio vale la relazione:

$$\mathrm{FoV_{Tel}} = \frac{\mathrm{FoV_{oc}}}{\mathrm{I}}$$

Gli ingrandimenti e i corrispondenti campi di vista del telescopio per i tre oculari valgono quindi:

$$\mathrm{I_{4mm}} = \frac{\mathrm{F_{Tel}}}{\mathrm{f_{oc}}} = \frac{1500\ \mathrm{mm}}{4\ \mathrm{mm}} = 375 \qquad \mathrm{FoV_{4mm}} = \frac{\mathrm{FoV_{oculare}}}{\mathrm{I_{4mm}}} = \frac{60°}{375} = 0°.16 = 9'.6$$

$$\mathrm{I_{10mm}} = \frac{\mathrm{F_{Tel}}}{\mathrm{f_{oc}}} = \frac{1500\ \mathrm{mm}}{10\ \mathrm{mm}} = 150 \qquad \mathrm{FoV_{10mm}} = \frac{\mathrm{FoV_{oculare}}}{\mathrm{I_{10mm}}} = \frac{60°}{150} = 0°.4 = 24'$$

$$\mathrm{I_{20mm}} = \frac{\mathrm{F_{Tel}}}{\mathrm{f_{oc}}} = \frac{1500\ \mathrm{mm}}{20\ \mathrm{mm}} = 75 \qquad \mathrm{FoV_{20mm}} = \frac{\mathrm{FoV_{oculare}}}{\mathrm{I_{20mm}}} = \frac{60°}{75} = 0°.8 = 48'$$

Dette $\mathbf{R_{Luna}}$ il raggio della Luna e $\mathbf{d_{Luna}}$ la sua distanza media dalla Terra, il valore medio $\mathbf{D_{Luna}}$ del diametro apparente della Luna è dato dalla relazione:

$$\mathrm{D_{Luna}} = 2\ \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_{Luna}}}{\mathrm{d_{Luna}}}\right) \simeq 2\ \cdot \sin^{-1}\left(\frac{1738\ \mathrm{km}}{384.4 \cdot 10^3\ km}\right)\ \simeq 31'.09$$

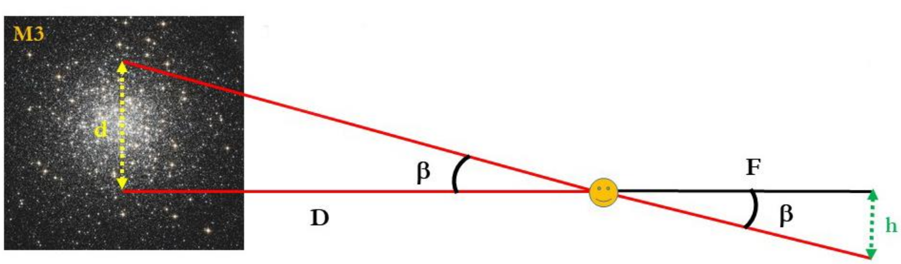
Quindi solo con il terzo oculare potremo osservarne l'intero disco.

Nota.
Notiamo che l'ingrandimento non è una caratteristica del telescopio, in quanto varia al variare della focale dell'oculare utilizzato. Esiste però un limite pratico alla possibilità di ingrandimento, che per un rifrattore Cassegrain è all'incirca pari al diametro dello specchio espresso in millimetri. Quindi il nostro telescopio può essere ben utilizzato con l'oculare da 10 mm (=150 ingrandimenti), mentre oculari con focali via via più corta (come ad esempio quello da 4 mm) forniscono in realtà immagini di qualità sempre più scadente. L'ingrandimento massimo utilizzabile dipende anche dalla turbolenza atmosferica e dallo schema ottico del telescopio. In particolare i rifrattori non soffrono della notevole ostruzione dei Cassegrain dovuta al secondario e al suo supporto e permettono ingrandimenti maggiori.

13. L'ammasso globulare M3 dista dal Sole 10.5 kpc e ha un diametro apparente pari a 18.0'. Stimate il diametro dell'ammasso in anni luce. Se osservate l'ammasso con un telescopio con apertura di 1 m e rapporto focale f/10, quanto varranno le sue dimensioni lineari sul piano focale?

Soluzione
Detto $\boldsymbol{\beta}$ il diametro apparente e $\boldsymbol{D}$ la distanza, il diametro vero $\boldsymbol{d}$ dell'ammasso si ricava dalla relazione:

$$\mathrm{d} = \mathrm{D} \tan\beta \simeq 10.5\ \cdot\ 10^3\ \cdot \tan 0°.300\ \ \simeq 55.0\ \mathrm{pc}\ \simeq 179\ \text{anni luce}$$



Poiché il telescopio ha un'apertura **A** di 1m e un rapporto focale f/10, la sua lunghezza focale **F** vale:

$$F = A\ \cdot 10 = 10m$$

Detta **h** la dimensione lineare dell'immagine dell'ammasso sul piano focale del telescopio, si ha:

$$\mathrm{h} = \mathrm{F}\ \cdot\ \tan\beta\ \simeq 10\ \mathrm{m}\ \cdot \tan 0°.300\ \ \simeq 0.052\ \mathrm{m} =\ 5.2\ \mathrm{cm}$$

14.

La foto a sinistra mostra il pianeta Venere osservato dalla Terra all'inizio del mese di giugno 2020. Il Sole illumina direttamente il bordo a destra di Venere, mentre il bordo sinistro risulta appena visibile grazie alla luce diffusa dall'atmosfera del pianeta.

1) A quale delle seguenti configurazioni era più vicina Venere? Giustificate la vostra risposta.

a) massima elongazione est; b) massima elongazione ovest;
c) congiunzione inferiore; d) congiunzione superiore.

2) A quale dei seguenti valori era più prossima la distanza Venere-Terra quando è stata scattata la foto?

a) 0.277 UA b) 0.695 UA c) 1.72 UA

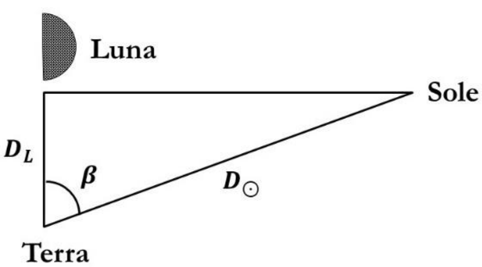
Soluzione

1) Congiunzione inferiore.
   Ciò in quanto Venere appare quasi in fase "nuova" con solo una piccolissima porzione direttamente illuminata. Alle massime elongazioni Venere appare in fase di "primo quarto" o di "ultimo quarto", mentre quando si avvicina alla congiunzione superiore la sua fase è prossima a "piena".
2) 0.277 UA.
   Infatti in congiunzione inferiore, considerando orbite circolari, la distanza $\boldsymbol{D_{VT}}$ Venere-Terra è data semplicemente dalla differenza tra i semiassi maggiori dell'orbita della Terra $\boldsymbol{a_T}$ e di Venere $\boldsymbol{a_V}$:

$$\mathrm{D_{VT}} = \mathrm{a_T} - \mathrm{a_V} \simeq 149.6 \cdot 10^6 \text{ km} - 108.2 \cdot 10^6 \text{ km} \simeq 41.4 \cdot 10^6 \text{ km} \simeq 0.277 \text{ UA}$$

15. Calcolare la distanza angolare media Luna-Sole vista dalla Terra quando la Luna è al primo quarto.

Soluzione



Quando la Luna è al primo quarto Terra, Luna e Sole si trovano ai vertici di un triangolo rettangolo, con la Luna in corrispondenza dell'angolo retto.

Detti $\boldsymbol{D_L}$ la distanza media Terra-Luna, $\boldsymbol{D_\odot}$ la distanza media Terra-Sole e $\boldsymbol{\beta}$ l'angolo tra Luna e Sole visti dalla Terra, si ha:

$$\beta = \arccos\left(\frac{\mathrm{D_L}}{\mathrm{D_\odot}}\right) = \arccos\left(\frac{384.4 \cdot 10^3\ km}{149.6 \cdot 10^6\ km}\right) \simeq 89° 51' 10''$$