Olimpiadi Italiane di Astronomia 2022
Corso di preparazione alla Gara Interregionale
Categoria Junior 2 - Lezione 1

1. Un asteroide dista dal Sole 2.978 UA al perielio e 9.022 UA all'afelio. Determinate il semiasse maggiore, in UA e in km, e l'eccentricità dell'orbita. Calcolate il periodo di rivoluzione dell'asteroide. Stimate di quanto cambierebbe il periodo di rivoluzione se l'eccentricità dell'orbita si dimezzasse.

Soluzione:
Dette $\boldsymbol{D_a}$ e $\boldsymbol{D_p}$ le distanze all'afelio e al perielio, il semiasse maggiore $\boldsymbol{a}$ dell'orbita dell'asteroide è dato da:

$$a = \frac{\mathrm{D_p} + \mathrm{D_a}}{2} = \frac{2.978\ \mathrm{UA} + 9.022\ \mathrm{UA}}{2} = 6.000\ \mathrm{UA} \simeq 897.6 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

Noto $\boldsymbol{D_a}$ per l'eccentricità $\boldsymbol{e}$, ricordando che $D_a = \mathrm{a}\,(1 + \mathrm{e})$, si ha:

$$e = \frac{D_a}{a} - 1 = \frac{9.022\ UA}{6.000\ UA} - 1 \simeq 0.5037$$

Il periodo di rivoluzione $\boldsymbol{T}$ in anni si ottiene dalla III legge di Keplero:

$$\mathrm{T} = \sqrt{a^3} \simeq \sqrt{6.000^3} \simeq 14.70\ anni$$

Poiché nella formula del calcolo del periodo l'eccentricità non compare, segue che il periodo di rivoluzione non dipende dall'eccentricità dell'orbita, ma solo dal semiasse maggiore.

2. La cometa di Halley dista dal Sole $8.767 \cdot 10^{10}$ m al perielio e $5.248 \cdot 10^{12}$ m all'afelio. Il modulo della sua velocità orbitale al perielio è di 54.6 km/s. Calcolare la velocità all'afelio in km/s e in m/s. Sapendo che l'ultimo passaggio della cometa di Halley al perielio si è verificato il 9 febbraio 1986, calcolate l'anno del più prossimo ritorno al perielio.

Soluzione
Dette $\boldsymbol{D_A}, \boldsymbol{V_A}, \boldsymbol{D_P}$ e $\boldsymbol{V_P}$ le distanze e le velocità della cometa all'afelio e al perielio, dalla II legge di Keplero sappiamo che:

$$\mathrm{V_A} \cdot \mathrm{D_A} = \mathrm{V_P} \cdot \mathrm{D_P}$$

quindi:

$$\mathrm{V_a} = \frac{\mathrm{D_p}}{\mathrm{D_a}}\,\mathrm{V_p} = \frac{8.767 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m}}{5.248 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m}} \cdot 54.6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \simeq 0.912\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 912\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Note le distanze all'afelio e al perielio ricaviamo il semiasse maggiore $\boldsymbol{a}$ dell'orbita:

$$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{D_a} + \mathrm{D_p}}{2} = \frac{8.767 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m} + 5.248 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m}}{2} \simeq 2.668 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m} \simeq 17.83\ \mathrm{UA}$$

Poiché la cometa di Halley orbita intorno al Sole, il suo periodo di rivoluzione $\boldsymbol{T}$ in anni vale:

$$\mathrm{T} = \sqrt{a^3} = \sqrt{17.83^3} \simeq 75.29\ anni$$

L'anno $\boldsymbol{A}$ del ritorno al perielio (arrotondando all'intero più prossimo) sarà quindi:

$$A = 1986 + 75 = 2061$$

Nota.
Il periodo orbitale della Halley non è perfettamente costante a causa dell'influenza gravitazionale dei pianeti (in particolare Giove). La data attualmente prevista per il prossimo passaggio al perielio è il 29 luglio 2061.

3. L'orbita di un asteroide ha semiasse maggiore e minore rispettivamente pari a 7.143 UA e 2.635 UA. Si determini il periodo orbitale dell'asteroide e il valore del rapporto tra le velocità orbitali all'afelio e al perielio. Da quali parametri orbitali dipende il valore di detto rapporto?

Soluzione:
Detto **a** il semiasse maggiore dell'orbita, il periodo orbitale **T** dell'asteroide in anni vale:

$$T = \sqrt{a^3} \simeq \sqrt{364.5} \simeq 19.09\ anni$$

L'eccentricità **e** dell'orbita vale:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{6.943\ UA^2}{51.02\ UA^2}\right)} \simeq 0.9295$$

Dette $\boldsymbol{D_A}, \boldsymbol{V_A}, \boldsymbol{D_P}$ e $\boldsymbol{V_P}$ le distanze e le velocità dell'asteroide all'afelio e al perielio, dalla II legge di Keplero sappiamo che:

$$\mathrm{V_A} \cdot \mathrm{D_A} = \mathrm{V_P} \cdot \mathrm{D_P}$$

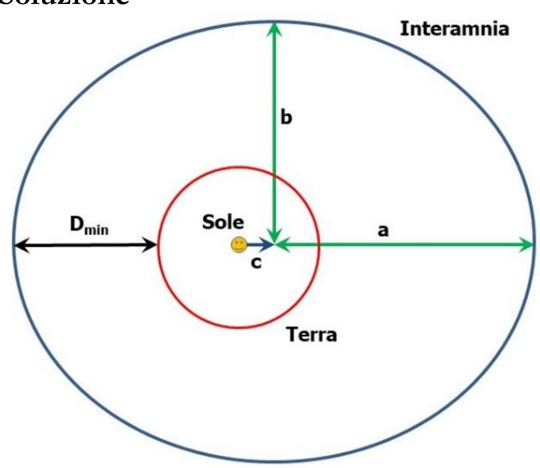
quindi:

$$\frac{V_A}{V_P} = \frac{D_P}{D_A} = \frac{a\,(1-e)}{a\,(1+e)} = \frac{1-e}{1+e} \simeq 0.03654 = 3.654 \cdot 10^{-2}$$

Nota.
il rapporto delle velocità dipende unicamente dall'eccentricità dell'orbita.

4. L'Asteroide 704 "Interamnia", scoperto nel 1910, percorre in 5.35 anni un'orbita stabile intorno al Sole, molto prossima al piano dell'eclittica, con eccentricità pari a 0.151. Con l'ausilio di un disegno si dica se l'asteroide costituisce una minaccia per la Terra, ovvero se può collidere con essa, stimando la sua distanza minima dal nostro pianeta.

Soluzione



Detto $\boldsymbol{T}$ il periodo di rivoluzione, il semiasse maggiore $\boldsymbol{a}$ dell'orbita di 704 Interamnia in UA vale:

$$a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{5.35^2} \simeq 3.06\ UA$$

Nota l'eccentricità **e**, il semiasse minore **b** dell'orbita si ricava dalla relazione:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \simeq 3.06\ UA \cdot \sqrt{1 - 0.0228} \simeq 3.02\ UA$$

La distanza **c** del Sole rispetto all'intersezione dei semiassi è data da:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \simeq \sqrt{3.06^2 - 3.02^2} \simeq 0.493\ UA$$

L'orbita dell'asteroide (sul piano dell'eclittica e stabile) si trova ben all'esterno di quella della Terra (vedere il disegno non in scala qui sopra). La minima distanza possibile $\boldsymbol{D_{min}}$ dalla Terra si ha nel caso in cui si verificano contemporaneamente le tre seguenti circostanze: asteroide in opposizione, asteroide al perielio, Terra all'afelio. In questa configurazione, detti $\boldsymbol{D_{Ap}}$ la distanza dal Sole dell'asteroide al perielio, $\mathbf{a_T}$ ed $\mathbf{e_T}$ semiasse maggiore ed eccentricità dell'orbita della Terra e $\boldsymbol{D_{Ta}}$ la distanza della Terra dal Sole all'afelio, la distanza di Interamnia dalla Terra in UA sarebbe:

$$D_{min} = D_{Ap} - D_{Ta} = a\,(1-e) - a_T\,(1 + e_T)$$

$$D_{min} \simeq 3.06\ UA\,(1 - 0.151) - 1\ UA\,(1 + 0.0167) \simeq 1.58\ UA$$

Quindi l'asteroide non costituisce una minaccia per la Terra.

5. Un satellite artificiale orbita attorno alla Terra su un'orbita ellittica con semiassi maggiore e minore rispettivamente pari a $1.522 \cdot 10^4\ km$ e $1.321 \cdot 10^4\ km$. Calcolate la distanza minima del satellite al perigeo e all'apogeo rispetto alla superficie della Terra e il suo periodo di rivoluzione.

Soluzione
Detti **a** e **b** la lunghezza dei due semiassi, l'eccentricità **e** dell'orbita del satellite è data dalla relazione:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} \simeq \sqrt{1 - \left(\frac{1.745 \cdot 10^8\ km^2}{2.316 \cdot 10^8\ km^2}\right)} \simeq 0.4965$$

Le distanze del satellite dal centro della Terra al perigeo $\mathbf{D_P}$ e all'apogeo $\mathbf{D_A}$ valgono quindi:

$$D_P = a\,(1 - e) \simeq 7663 \text{ km} \qquad D_A = a\,(1 + e) \simeq 2.278 \cdot 10^4 \text{ km}$$

La distanza minima di un satellite dalla superficie terrestre si ha quando un osservatore lo vede transitare allo zenith. Quindi per ottenere la distanza minima nei due casi ($\boldsymbol{H_P}$ e $\boldsymbol{H_A}$) basta sottrarre il raggio della Terra alle distanze all'afelio e al perielio:

$$H_P = D_p - R_T \simeq 1285 \text{ km} \qquad H_A = D_A - R_T \simeq 1.640 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Applicando la III legge di Keplero generalizzata e considerando che la massa del satellite è ovviamente trascurabile rispetto a quella della Terra, il periodo di rivoluzione **T** è dato da:

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M_T}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.526 \cdot 10^{21}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{3.493 \cdot 10^8\ s^2} \simeq 1.869 \cdot 10^4\ s \simeq 311.5\ minuti \simeq 5\ h\ \ 12\ minuti$$

6. Un asteroide di forma sferica ha un raggio di 200 km e la sua densità media è pari a quella di Mercurio. Calcolate il valore dell'accelerazione di gravità alla superficie dell'asteroide in m/s^2.

Soluzione
La massa **M** di un corpo, nota la sua densità media **ρ** e il volume **V**, vale:

$$M = \rho\, V$$

In particolare, per un asteroide sferico di raggio $\mathbf{R_a}$, la sua massa $\mathbf{M_a}$ vale:

$$M_a = \rho\, V = \rho\, \frac{4}{3}\, \pi\, {R_a}^3$$

Il problema si può quindi risolvere calcolando la densità **ρ** di Mercurio e inserendo il valore ottenuto nella formula per il calcolo della massa dell'asteroide.
In alternativa, detti $\mathbf{R_M}$ e $\mathbf{M_M}$ il raggio e la massa di Mercurio e $\boldsymbol{\rho_a}$ e $\boldsymbol{\rho_M}$ le densità dell'asteroide e di Mercurio, consideriamo il rapporto tra la massa dell'asteroide e quella di Mercurio:

$$\frac{M_a}{M_M} = \frac{\rho_a\ \frac{4}{3}\pi\, {R_a}^3}{\rho_M\ \frac{4}{3}\pi\, {R_M}^3}$$

Poiché le densità dei due corpi sono uguali avremo infine:

$$M_a = M_M \left(\frac{R_a}{R_M}\right)^3$$

$$M_a \simeq 3.301 \cdot 10^{23} kg \left(\frac{200\ km}{2440\ km}\right)^3 \simeq 3.301 \cdot 10^{23} kg \cdot 5.51 \cdot 10^{-4} \simeq 1.82 \cdot 10^{20} kg$$

Nota la massa possiamo calcolare l'accelerazione di gravità $\mathbf{g_a}$ sulla superficie dell'asteroide:

$$g_a = \frac{G \cdot M_a}{{R_a}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 1.82 \cdot 10^{20}\,kg}{(200 \cdot 10^3\,m)^2} \simeq 0.304\,\frac{m}{s^2}$$

7. La forza di gravità che si esercita tra due corpi di forma sferica vale $10^4\ N$. Il primo corpo ha un raggio di 30.20 km e una densità di $1.420\ g/cm^3$, il secondo corpo ha un raggio di 15.10 km e una densità di $3.440\ g/cm^3$. A che distanza si trovano i centri dei due corpi?

Soluzione
Esprimiamo le densità dei due corpi in kg/m^3 utilizzando il fattore di conversione:

$$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = \frac{10^{-3}}{10^{-6}}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Le densità $\boldsymbol{\rho_1}$ e $\boldsymbol{\rho_2}$ dei due corpi valgono quindi:

$$\rho_1 = 1.420\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 1.420 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \qquad \rho_2 = 3.440\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 3.440 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Essendo i due corpi sferici con raggi $\mathbf{R_1} = 3.020 \cdot 10^4\ m$ e $\mathbf{R_2} = 1.510 \cdot 10^4\ m$, per le masse $\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$ otteniamo:

$$M_1 = \rho\ \frac{4}{3}\,\pi\,{R_1}^3 \simeq 1.420 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \frac{4}{3}\,\pi \cdot 2.754 \cdot 10^{13}\,m^3 \simeq 1.638 \cdot 10^{17}\,kg$$

$$M_2 = \rho\ \frac{4}{3}\,\pi\,{R_2}^3 \simeq 3.440 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \frac{4}{3}\,\pi \cdot 3.443 \cdot 10^{12}\,m^3 \simeq 4.961 \cdot 10^{16}\,kg$$

Detta **F** la forza tra i due corpi, ricaviamo infine la distanza **d** tra i loro centri dalla legge di Gravitazione Universale:

$$\mathrm{d} = \sqrt{\frac{\mathrm{G\,M_1\,M_2}}{\mathrm{F}}}$$

$$\mathrm{d} \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 1.638 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg} \cdot 4.961 \cdot 10^{16}\,\mathrm{kg}}{10^4\ \frac{kg\,m}{s^2}}} \simeq 7.364 \cdot 10^9\,m = 7.364 \cdot 10^6\,km$$

8. Supponete di raddoppiare la massa del Sole. Mantenendo inalterato il valore dell'UA, quanto varrebbe il nuovo periodo di rivoluzione della Terra? Se, mantenendo invariata la massa del Sole, la massa di Mercurio raddoppiasse, quale sarebbe il suo nuovo periodo di rivoluzione supponendo invariato il semiasse maggiore dell'orbita?

Soluzione
Scriviamo la III Legge di Keplero con $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{T}$ i valori attuali del semiasse maggiore dell'orbita e del periodo di rivoluzione della Terra e con $\boldsymbol{M_\odot}$ e $\boldsymbol{M_T}$ le masse del Sole e della Terra. Poichè $\mathrm{M_\odot} \gg \mathrm{M_T}$ avremo:

$$\frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{T}^2} = \frac{\mathrm{G\,(M_\odot + M_T)}}{4\,\pi^2} \simeq \frac{\mathrm{G\,M_\odot}}{4\,\pi^2}$$

Raddoppiando la massa del Sole e detto $\boldsymbol{T_1}$ il nuovo periodo di rivoluzione della Terra si ha:

$$\frac{\mathrm{a}^3}{{\mathrm{T}_1}^2} = \frac{\mathrm{G\,(2\,M_\odot + M_T)}}{4\,\pi^2} \simeq \frac{2\,\mathrm{G\,M_\odot}}{4\,\pi^2} = \frac{\mathrm{G\,M_\odot}}{2\,\pi^2}$$

Dividendo membro a membro queste due relazioni si ottiene il nuovo periodo di rivoluzione della Terra:

$$\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{1}{2} = 0.5 \qquad \text{da cui:} \qquad T_1 = T\sqrt{0.5} \simeq 0.7071\ anni \simeq 258.3\ g$$

Ovviamente si può arrivare alla soluzione calcolando direttamente il nuovo periodo di rivoluzione:

$$T_1 = \sqrt{\frac{2\,\pi^2\,a^3}{G\ M_\odot}} \simeq \sqrt{\frac{19.74\ \cdot 3.348\ \cdot\ 10^{33}\ m^3}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\ s^2}\cdot 1.989\ \cdot\ 10^{30}\ \mathrm{kg}}} \simeq 2.231\ \cdot\ 10^7\ \mathrm{s}\ \simeq 258.3\ \mathrm{g}$$

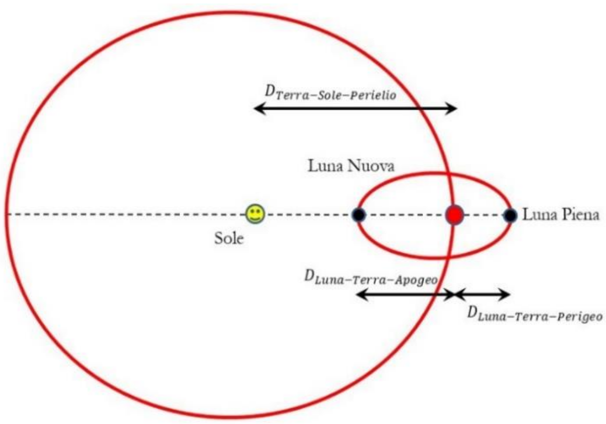
Detti $\boldsymbol{a_M}$, $\boldsymbol{T_M}$, e $\boldsymbol{M_M}$ i valori attuali del semiasse maggiore dell'orbita, del periodo di rivoluzione e della massa di Mercurio, raddoppiando la massa il periodo di rivoluzione $\boldsymbol{T_{1M}}$ resterebbe invariato, in quanto:

$$\frac{{a_M}^3}{{T_M}^2} = \frac{G\,(M_\odot\ +\ M_M)}{4\,\pi^2} \simeq \frac{G\,M_\odot}{4\,\pi^2}$$

$$\frac{{a_M}^3}{{T_1}^2} = \frac{G\,(M_\odot\ +\ 2\,M_M)}{4\,\pi^2} \simeq \frac{G\,M_\odot}{4\,\pi^2}$$

9. Calcolate, trascurando l'inclinazione dell'orbita lunare sull'eclittica, la distanza minima della Luna Piena e della Luna Nuova dal Sole. Per le eccentricità si assumano i valori: $e_L = 0.05490$ per l'orbita della Luna attorno alla Terra ed $e_T = 0.01671$ per l'orbita della Terra attorno al Sole.

Soluzione



La Luna è Piena quando vista dalla Terra è in direzione opposta al Sole. La sua distanza minima dal Sole $\mathbf{D_{m-LP-\odot}}$ si ha quando la Terra è al perielio e la Luna Piena al perigeo (vedere il disegno, non in scala, a sinistra). Detti $\boldsymbol{a_T}$ e $\boldsymbol{a_L}$ i semiassi maggiori delle orbite della Terra e della Luna, per la distanza della Terra dal Sole al perielio $\mathbf{D_{T\odot-P}}$ e per la distanza della Luna dalla Terra al perigeo $\mathbf{D_{LT-P}}$ si ha:

$$D_{T\odot-P} = a_T\,(1 - e_T) \simeq 147.1\ \cdot\ 10^6\ km$$

$$D_{LT-P} = a_L\,(1 - e_L) \simeq 363.3\ \cdot\ 10^3\ km$$

e quindi:

$$D_{m-LP-\odot} = D_{T\odot-P} + D_{LT-P} \simeq 147.5\ \cdot 10^6\ km$$

La Luna è Nuova quando si trova nella stessa direzione e dalla stessa parte del Sole rispetto alla Terra. La sua distanza minima dal Sole $\mathbf{D_{m-LN-\odot}}$ si avrà quando la Terra è al perielio e la Luna all'apogeo. Per la distanza della Luna dalla Terra al perigeo $\mathbf{D_{LT-A}}$ si ha:

$$D_{LT-A} = a_L\,(1 + e_L) \simeq 405.5\ \cdot\ 10^3\ km$$

e quindi:

$$D_{m-LN-\odot} = D_{T\odot-P} - D_{LT-A} \simeq 146.7\ \cdot 10^6\ km$$

10. Calcolare il periodo sinodico di Nettuno osservato dalla Terra, in anni e in giorni.

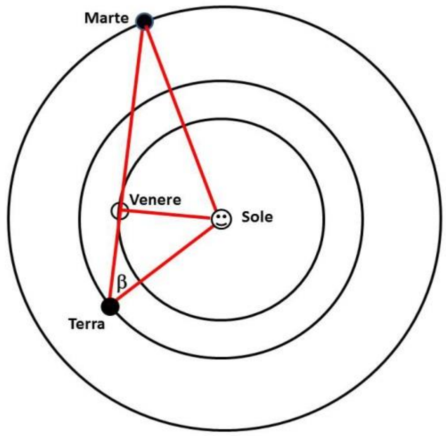
Soluzione

Il periodo sinodico $\boldsymbol{S}$ è il tempo che impiega un corpo, osservato in questo caso dalla Terra, per tornare nella stessa posizione rispetto al Sole (per esempio l'intervallo tra due opposizioni consecutive). Detto $\boldsymbol{E}$ il periodo siderale della Terra e $\boldsymbol{P}$ il periodo siderale di Nettuno vale la relazione:

$$S = \frac{E\ \cdot P}{|\,E - P\,|} \simeq \frac{1\ anno\ \cdot\ 164.79\ anni}{|1\ anno -\ 164.79\ anni|} \simeq \frac{164.79\ anni^2}{163.79\ anni} \simeq 1.0061\ anni\ \simeq 367.49\ giorni$$

11. Osservate una configurazione planetaria molto particolare, con Venere visibile al tramonto alla massima elongazione e angolarmente vicinissimo (in congiunzione) con Marte. Calcolate la distanza Terra-Marte in quel momento, assumendo tutte le orbite circolari e trascurando le loro inclinazioni sull'eclittica.
Suggerimento: realizzate un disegno (in scala) dell'orbita dei tre pianeti attorno al Sole. Posizionate i pianeti assumendo che Venere e Marte siano angolarmente così vicini da poter essere collocati sulla stessa retta.

Soluzione



Quando Venere è a una massima elongazione, la retta Terra-Venere è tangente all'orbita di Venere. Con le approssimazioni usate possiamo assumere che Sole, Terra, Venere e Marte si trovino ai vertici di due triangoli rettangoli, con il lato Venere-Sole in comune. Detti **VT** la distanza Terra-Venere, **MV** la distanza Marte-Venere, **VS** la distanza Venere-Sole, **MS** la distanza Marte-Sole, **TS** la distanza Terra-Sole e **MT** la distanza Marte-Terra possiamo risolvere il problema con il teorema di Pitagora.

$$\mathrm{VT} = \sqrt{\mathrm{TS}^2 - \mathrm{VS}^2} \simeq$$

$$\simeq \sqrt{2.238 \cdot 10^{16}\ \mathrm{km}^2 - 1.171 \cdot 10^{16}\ \mathrm{km}^2} \simeq 103.3 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

$$\mathrm{MV} = \sqrt{\mathrm{MS}^2 - \mathrm{VS}^2} \simeq \sqrt{5.194 \cdot 10^{16}\ \mathrm{km}^2 - 1.171 \cdot 10^{16}\ \mathrm{km}^2} \simeq 200.6 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

$$\mathrm{MT} = \mathrm{VT} + \mathrm{MV} \simeq 103.3 \cdot 10^6\ \mathrm{km} + 200.6 \cdot 10^6\ \mathrm{km} \simeq 303.9 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

12. Calcolate il peso di un corpo di massa m = 100 kg all'equatore di Mercurio e all'equatore di Saturno, considerando l'effetto della forza centrifuga dovuta alla rotazione. Il periodo di rotazione dei due pianeti è, rispettivamente, di 1407.5 h e 10h 33m. Poiché Saturno non ha una superficie solida, si assuma come distanza dal centro il raggio medio del pianeta.

Soluzione

Detta **g** l'accelerazione di gravità, il peso **P** di un corpo è la forza di gravità tra corpo e pianeta:

$$\mathrm{P} = \mathrm{m\,g}$$

Dalla relazione: $\mathrm{g} = \frac{\mathrm{G \cdot M}}{\mathrm{R}^2}$ l'accelerazione di gravità alla superficie di Mercurio $\mathbf{g_M}$ e di Saturno $\mathbf{g_S}$ vale:

$$\mathrm{g_M} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot 3.301 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}}{(2440 \cdot 10^3\ \mathrm{m})^2} \simeq 3.700\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \mathrm{g_S} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kg}}{(60267 \cdot 10^3\ \mathrm{m})^2} \simeq 10.45\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

In assenza di rotazione il peso del corpo su Mercurio $\mathbf{P_M}$ e su Saturno $\mathbf{P_S}$ sarà quindi:

$$\mathrm{P_M} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{g_M} \simeq 370\ N \qquad \mathrm{P_S} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{g_S} \simeq 1045\ N$$

Detti **T** il periodo di rotazione, **v** $\left(= \frac{2\,\pi\,\mathrm{R}}{\mathrm{T}}\right)$ il modulo della velocità tangenziale alla superficie e **R** il raggio di un pianeta, la forza centrifuga $\mathbf{F_c}$ è data dalla relazione:

$$\mathrm{F_c} = \mathrm{m}\,\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}} = \mathrm{m}\,\frac{4\,\pi^2 \cdot \mathrm{R}}{\mathrm{T}^2}$$

e all'equatore è diretta esattamente in senso opposto alla gravità e rende minore il peso del corpo. Per i due pianeti avremo:

$$F_{cM} \simeq 100\ kg\ \frac{39.48 \cdot 2440 \cdot 10^3\ m}{25.67 \cdot 10^{12}\ s^2} \simeq 3.75 \cdot 10^{-4}\ N \qquad F_{cS} \simeq 100\ kg\ \frac{39.48 \cdot 60267 \cdot 10^3\ m}{144.2 \cdot 10^7\ s^2} \simeq 165\ N$$

Tenendo conto della rotazione il peso del corpo all'equatore di Mercurio $\mathbf{P_{M-R}}$ e di Saturno $\mathbf{P_{S-R}}$ vale:

$$\mathrm{P_{M-R}} \simeq 370\ N - 3.75 \cdot 10^{-4}\ N \simeq \mathrm{P_M} \qquad \mathrm{P_{S-R}} \simeq 1045\ N - 165\ N \simeq 880\ N$$

13. Un pianeta di massa $1.6 \cdot 10^{26}$ kg si muove attorno a una stella su un'orbita il cui semiasse maggiore è di 9.00 UA con un periodo di 20.0 anni. Trovare la massa (in kg e in unità di masse solari) e il raggio (in km e in unità del raggio solare) della stella, sapendo che l'accelerazione di gravità sulla fotosfera della stella è 54 volte quella che si ha sulla superficie della Terra.

Soluzione

Detto **a** il semiasse maggiore dell'orbita e **T** il periodo di rivoluzione, trascurando la massa del pianeta (vedere nota alla fine), ricaviamo la massa della stella $\mathbf{M_s}$ dalla III legge di Keplero:

$$M_s = \frac{4\,\pi^2\,a^3}{G\,T^2} \simeq \frac{39.48 \cdot 2.44 \cdot 10^{36}\,m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 3.98 \cdot 10^{17}\,s^2} \simeq 3.63 \cdot 10^{30}\,kg \simeq 1.82\,M_\odot$$

Detta $\mathbf{g_S}$ l'accelerazione di gravità sulla fotosfera della stella e $\mathbf{g_T}$ l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra, possiamo ricavare il raggio della stella $\mathbf{R_s}$ dalla relazione:

$$R_s = \sqrt{\frac{G \cdot M_s}{g_s}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_s}{54 \cdot g_{Terra}}}$$

$$R_S \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 3.63 \cdot 10^{30}\,kg}{54 \cdot 9.807\,\frac{m}{s^2}}} \simeq 6.76 \cdot 10^5\,km \simeq 0.973\,R_\odot$$

Nota.

L'assunzione iniziale massa del pianeta trascurabile rispetto a quella, non ancora nota, della stella, risulta giustificata in quanto sappiamo, dallo studio della struttura ed evoluzione stellare, che la massa minima di una stella è: $M_{\text{minima stella}} \geq 0.08 \cdot M_\odot \simeq 1.59 \cdot 10^{29}\text{ kg} \simeq 1000 \cdot M_{\text{pianeta}}$

14. Considerate un ipotetico osservatore posto al centro della Terra e calcolate le dimensioni angolari (diametro apparente) che misurerebbe per il Sole quando la Terra si trova all'afelio e al perielio. Confrontate questi valori con quelli che misurerebbe per le dimensioni angolari della Luna al perigeo e all'apogeo.

Soluzione

Detti $\mathbf{a_T}$ il semiasse maggiore ed $\mathbf{e_T}$ l'eccentricità dell'orbita della Terra, le distanze dell'osservatore dal Sole all'afelio $\mathbf{d_{A\odot}}$ e al perielio $\mathbf{d_{P\odot}}$ valgono:

$$d_{A\odot} = a_T\,(1 + e_T) \simeq 152.1 \cdot 10^6\,km \qquad d_{P\odot} = a_T\,(1 - e_T) \simeq 147.1 \cdot 10^6\,km$$

Quindi, detto $\mathbf{R_\odot}$ il raggio del Sole, per un osservatore al centro della Terra le dimensioni angolari minime $\mathbf{D_{A\odot}}$ (Terra all'afelio) e massime $\mathbf{D_{P\odot}}$ (Terra al perielio) del Sole valgono:

$$D_{A\odot} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_\odot}{d_{A\odot}}\right) \simeq 31'.44 \qquad D_{P\odot} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_\odot}{d_{P\odot}}\right) \simeq 32'.51$$

Detti $\mathbf{a_L}$ il semiasse maggiore ed $\mathbf{e_L}$ l'eccentricità dell'orbita della Luna, le distanze dell'osservatore dalla Luna all'apogeo $\mathbf{d_{AL}}$ e al perigeo $\mathbf{d_{PL}}$ valgono:

$$d_{AL} = a_L\,(1 + e_L) \simeq 405.5 \cdot 10^3\,km \qquad d_{PL} = a_L\,(1 - e_L) \simeq 363.3 \cdot 10^3\,km$$

Quindi, detto $\boldsymbol{R_L}$ il raggio della Luna, per un osservatore al centro della Terra le dimensioni angolari minime $\mathbf{D_{AL}}$ (Luna all'apogeo) e massime $\mathbf{D_{PL}}$ (Luna al perigeo) della Luna valgono:

$$D_{AL} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_L}{d_{AL}}\right) \simeq 29'.47 \qquad D_{PL} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_L}{d_{PL}}\right) \simeq 32'.89$$

Notiamo che quando la Luna si trova all'apogeo la sua dimensione angolare è minore di quella del Sole anche quando la Terra è all'afelio, mentre quando la Luna si trova al perigeo la sua dimensione angolare è maggiore di quella del Sole anche quando la Terra è al perielio.

15. A quale distanza dalla superficie della Terra un uomo con massa di 80.0 kg ha un peso di 600 N?

Soluzione

Detta **g** l'accelerazione di gravità, il peso **P** è dato dalla relazione: P = m g. Detta **r** la distanza dal centro della Terra, per avere P = 600 N occorre che l'accelerazione di gravità $\mathbf{g_r}$ sia:

$$g_r = \frac{P}{m} = \frac{600\ \frac{kg\ m}{s^2}}{80.0\ kg} = 7.50\ \frac{m}{s^2}$$

Detta **h** l'altezza sulla superficie e **R** e $\mathbf{M_T}$ raggio e massa della Terra, si ha: r = R + h e quindi:

$$g_r = \frac{G\ M_T}{r^2} = \frac{G\ M_T}{(R+h)^2}$$

Risolvendo rispetto ad **h** si ha:

$$(R+h)^2 = \frac{G\ M_T}{g_r} \qquad \text{da cui: } R + h = \sqrt{\frac{G\ M_T}{g_r}} \qquad \text{e infine: } h = \sqrt{\frac{G\ M_T}{g_r}} - R$$

$$h \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}{7.50\ \frac{m}{s^2}}} - 6378 \cdot 10^3\ km \simeq 912 \cdot 10^3\ m = 912\ km$$

Nota:

Sulla superficie della Terra una massa di 80.0 kg ha un peso di 784 N.