XIX OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA

Finale Nazionale – 3 luglio 2021

Prova Teorica - Categoria Senior

1. Vega

La stella Vega (α Lyra) ha una luminosità di 37 luminosità solari, una temperatura della fotosfera di 9600 K e si trova a una distanza di 25.3 anni luce dal Sole. Determinate:

1. il suo flusso di energia misurato alla sommità dell'atmosfera terrestre;
2. il suo raggio in unità di raggi solari;
3. a quale lunghezza d'onda si trova il suo picco di emissione.

Soluzione

1. Dette $\mathbf{R}_{\odot}$ e $\mathbf{T}_{\odot}$ il raggio e la temperatura del Sole, dalla legge di Stefan-Boltzmann sappiamo che la sua luminosità bolometrica $\mathbf{L}_{\odot}$ è:

$$L_{\odot} = 4\pi \cdot R_{\odot}{}^{2} \cdot \sigma \cdot T_{\odot}{}^{4}$$

Detta $\mathbf{d_V}$ la distanza di Vega, il flusso di energia $\mathbf{F_V}$ che riceviamo alla sommità dell'atmosfera terrestre è:

$$F_V = \frac{L_V}{4\pi \cdot d_V{}^{2}} = \frac{37 \cdot L_{\odot}}{4\pi \cdot d_V{}^{2}} = \frac{37 \cdot R_{\odot}{}^{2} \cdot \sigma \cdot T_{\odot}{}^{4}}{d_V{}^{2}}$$

e poiché:

$$d_V = 25.3 \; anni \; luce \; \simeq 25.3 \cdot 9.4607 \cdot 10^{15} \, m \simeq 2.39 \cdot 10^{17} \, m$$

otteniamo:

$$F_V = \frac{37 \cdot 4.837 \cdot 10^{17}\ \mathrm{m}^2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4} \cdot 1.115 \cdot 10^{15}\ \mathrm{K}^4}{5.71 \cdot 10^{34}\ \mathrm{m}^2} \simeq 1.98 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

2. Detta $\mathbf{T_V}$ **la temperatura di Vega e** $\mathbf{R_V}$ il suo raggio, dalla legge di Stefan-Boltzmann si ha:

$$L_V = 4\pi \cdot R_V{}^{2} \cdot \sigma \cdot T_V{}^{2}$$

da cui:

$$R_V = \sqrt{\frac{L_V}{4\pi \cdot \sigma \cdot T_V{}^{4}}} = \sqrt{\frac{37 \cdot L_{\odot}}{4\pi \cdot \sigma \cdot T_V{}^{4}}} = \sqrt{\frac{37 \cdot R_{\odot}{}^{2} \cdot T_{\odot}{}^{4}}{T_V{}^{4}}} = \sqrt{37}\, \frac{T_{\odot}{}^{2}}{T_V{}^{2}}\, R_{\odot}$$

$$R_V \simeq \sqrt{37}\, \frac{3.339 \cdot 10^{7}\, K^2}{9.216 \cdot 10^{7}\, K^2}\, R_{\odot} \simeq 2.20\, R_{\odot} \simeq 1.53 \cdot 10^{9}\ \mathrm{m}$$

3. Detta $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{max}}$ la lunghezza d'onda del massimo di emissione di Vega, dalla legge dello spostamento di Wien otteniamo:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T_V} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{K}}{9600\ \mathrm{K}} \simeq 3.019 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} \simeq 300\ \mathrm{nm}$$

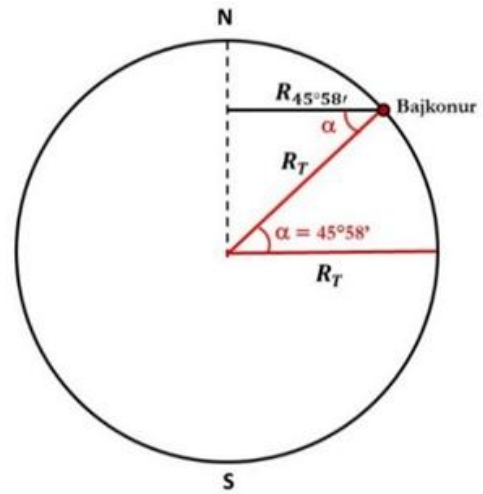
Nota: Il picco di emissione di Vega non si trova nella regione "visibile" dello spettro elettromagnetico, ma in quella del vicino ultravioletto.

2. L'orbita di Gagarin

Il 12 aprile 1961 Jurij Gagarin completa la prima storica orbita attorno alla Terra. Partito dalla base di Bajkonur (φ = +45° 58', λ = 63° 20' E) a bordo della Vostok 1, atterra nei pressi della città di Éngel's dopo un volo di durata totale pari a 108 minuti. Tuttavia, approssimando la salita e la discesa a traiettorie perpendicolari alla superficie terrestre, la Vostok 1 impiega solo 67 minuti per percorrere l'orbita completa. Assumete che le località di arrivo e partenza si trovino alla stessa latitudine e stimate:

1. la distanza, misurata lungo il parallelo che li unisce, tra Bajkonur ed Éngel's;
2. la longitudine di Éngel's.

Soluzione



1. L'orbita della Vostok 1 è fissa nello spazio, per cui dopo un'orbita completa Gagarin torna al punto iniziale, ma nel frattempo la Terra sottostante ha ruotato e questo causa una differenza in longitudine tra luogo di lancio e luogo di atterraggio.

   Con riferimento alla figura a sinistra, detto $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra, la lunghezza $\mathbf{C_{45°58'}}$ della circonferenza terrestre alla latitudine 45° 58' è data dalla relazione:

   $$C_{45°58'} = 2\pi \cdot R_{45°58'} = 2\pi \cdot R_T \cdot \cos(45°\ 58') \simeq 2.785 \cdot 10^4 \text{ km}.$$

   La Terra effettua una rotazione completa in un giorno siderale, la cui durata è **P** ≃ 23h 56m 4s (≃ 23.9344 ore)

   Nel tempo ($\mathbf{\Delta T}$ = 67 m ≃ 1.117 h) impiegato da Gagarin a percorrere l'orbita completa, per un punto a latitudine 45° 58' la rotazione della Terra comporta uno spostamento in longitudine $\mathbf{\Delta X}$, con le due quantità legate dalla proporzione:

   $$P : C_{45°58'} = \Delta T : \Delta X.$$

   avremo quindi:

   $$\Delta X = \frac{C_{45°58'} \cdot \Delta T}{P} \simeq \frac{2.785 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot 1.117 \text{ h}}{23.9344 \text{ h}} \simeq 1300 \text{ km}.$$

2. La località di arrivo si trova a ovest rispetto a quella di partenza di un angolo $\boldsymbol{\alpha}$ e poiché vale la proporzione:

   $$360° : \alpha = C_{45°58'} : \Delta X$$

   ricaviamo:

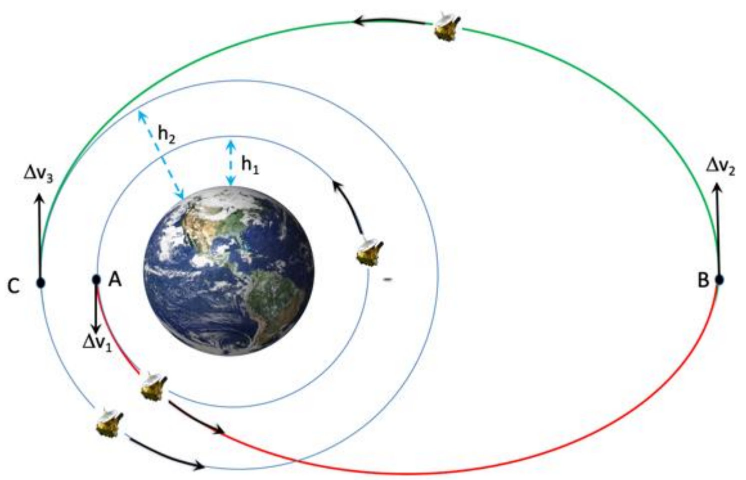
   $$\alpha = \frac{360° \cdot 1300 \text{ km}}{2.785 \cdot 10^4 \text{ km}} \simeq 16°.8 \simeq 16°\ 50'.$$

   e infine:

   longitudine Éngel's ≃ longitudine Bajkonur – 16° 50' ≃ 46° 30' E.

   Nota: le coordinate esatte del punto di atterraggio di Gagarin sono state φ = 51° 16' N e λ = 46° E, con la vera distanza tra località di arrivo e partenza che risulta di circa 1400 km.

3. Scuola guida spaziale



La figura a sinistra (non in scala) descrive una manovra di trasferimento orbitale detta "alla Sternfeld", che permette a un satellite di trasferirsi da una orbita circolare a un'altra di raggio maggiore, utilizzando due mezze orbite ellittiche. Nel caso in esame il satellite parte da una quota h_1 = 400 km dalla superficie terrestre effettuando dapprima nel punto A un aumento di velocità Δv_1 = 500 m/s che lo immette su un'orbita ellittica. Dopo mezza orbita ellittica, giunto al punto B, il satellite viene ulteriormente accelerato di Δv_2 = 200 m/s, per poi arrivare al punto C, a una distanza h_2 dalla superficie della Terra, dove viene frenato di Δv_3 per stabilizzarsi sulla nuova orbita circolare.

Determinate:
1. semiasse maggiore ed eccentricità della prima semi-orbita ellittica;
2. semiasse maggiore ed eccentricità della seconda semi-orbita ellittica;
3. quali sono la quota h_3 dell'orbita circolare finale e il Δv_3 necessario a stabilizzare il satellite sulla nuova orbita;
4. il tempo totale necessario per completare la manovra da A a C.

Soluzione

1. Dette $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra e $\mathbf{h_1}$ la quota iniziale del satellite si ha:

$$R_1 = R_T + h_1 = 6378\,km + 400\,km = 6778\,km$$

Detta $\mathbf{M_T}$ la massa della Terra, la velocità del satellite $\boldsymbol{v_0}$ nel punto A valeva quindi:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{G \cdot M_T}}{\mathrm{R_1}}} = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot s^2}} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{6.778 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}} \simeq 7.668 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 7.668\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

La prima accelerazione porta la velocità del satellite a un valore $\boldsymbol{v_{1P}}$ pari a:

$$v_{1P} = v_0 + \Delta v_1 = 7668\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 500\,\frac{m}{s} = 8168\,\frac{m}{s}$$

e R_1 diventa la distanza al perigeo della prima semi-orbita ellittica, il cui semiasse maggiore $\boldsymbol{a_1}$ si ricava dalla relazione che lega la velocità in un qualsiasi punto dell'orbita (e quindi anche al perigeo) con il semiasse maggiore:

$$v_{1P} = \sqrt{G\,M_T\,\left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{a_1}\right)}$$

da cui otteniamo:

$$a_1 = \frac{1}{\frac{2}{\mathrm{R_1}} - \frac{\mathrm{v_{1P}^2}}{\mathrm{G} \cdot M_T}} = \frac{1}{\frac{2}{6778\,\cdot 10^3\,\mathrm{m}} - \frac{6.672\,\cdot\,10^7\,\frac{m^2}{s^2}}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot s^2}} \cdot 5.972\,\cdot\,10^{24}\,kg}} \simeq 7.832\,\cdot\,10^6\,m = 7832\,km$$

L'eccentricità della prima semi-orbita ellittica $\mathbf{e_1}$ e la distanza all'apogeo $\mathbf{R_2}$ si ricavano dalle relazioni:

$$e_1 = 1 - \frac{R_1}{a_1} = 1 - \frac{6778\,\cdot\,10^3\,m}{7.832\,\cdot\,10^6\,m} \simeq 0.1345$$

$$R_2 = a_1\,(1 + e_1) = 7.832\,\cdot\,10^6\,\mathrm{m}\,\cdot 1.1345 \simeq 8.885\,\cdot\,10^6\,\mathrm{m} = 8885\,km$$

2. Possiamo ricavare la velocità all'apogeo $\boldsymbol{v_{1A}}$ dalla conservazione del momento angolare (equivalente alla II legge di Keplero), $\boldsymbol{v_{1A} \cdot R_2 = v_{1P} \cdot R_1}$:

$$v_{1A} = \frac{v_{1P}\,\cdot\,R_1}{R_2} = \frac{8.168\,\cdot\,10^3\,\frac{m}{s}\,\cdot\,6.778\,\cdot\,10^3\,m}{8.885\,\cdot\,10^6\,m} \simeq 6.231\,\cdot\,10^3\,\frac{m}{s} = 6231\,\frac{m}{s}$$

Una volta giunto all'apogeo della prima orbita ellittica (cioè nella posizione indicata con B in figura), il satellite viene accelerato alla velocità $\boldsymbol{v_{2A}}$ pari a:

$$v_{2A} = v_{1A} + \Delta v_2 = 6231\,\frac{m}{s} + 200\,\frac{m}{s} = 6431\,\frac{m}{s}$$

e il semiasse maggiore $\boldsymbol{a_2}$ della seconda orbita ellittica vale:

$$a_2 = \frac{1}{\frac{2}{\mathrm{R_2}} - \frac{\mathrm{v_{2A}^2}}{\mathrm{G} \cdot M_T}} \simeq \frac{1}{\frac{2}{8.885\,\cdot 10^6\,m} - \frac{4.136\,\cdot\,10^7\,\frac{m^2}{s^2}}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot s^2}} \cdot 5.972\,\cdot\,10^{24}\,kg}} \simeq 8.242\,\cdot\,10^6\,m = 8242\,km$$

Ovviamente si ha $R_2 > a_2$, poiché R_2 è la distanza all'apogeo della seconda orbita ellittica, la cui eccentricità $\boldsymbol{e_2}$ vale:

$$e_2 = \frac{R_2}{a_2} - 1 = \frac{8.885\,\cdot\,10^6\,m}{8.242\,\cdot\,10^6\,m} - 1 \simeq 0.07802$$

3. Dopo mezzo periodo sulla seconda orbita ellittica, il satellite arriva al perigeo (posizione indicata con C in figura), cioè a una distanza $\mathbf{R_3}$ dal centro della Terra pari a:

$$R_3 = a_2\,(1 - e_2) = 8.242\,\cdot\,10^6\,m\,\cdot\,0.9220 \simeq 7.599\,\cdot\,10^6\,m = 7599\,km$$

Ovvero a una quota $\boldsymbol{h_2}$ rispetto alla superficie della Terra pari a:

$$h_2 = R_3 - R_T = 7599\,km - 6378\,km = 1221\,km$$

con una velocità $\boldsymbol{v_{2P}}$ che, dalla conservazione del momento angolare (o II legge di Keplero), vale:

$$v_{2P} = \frac{v_{2A}\,R_2}{R_3} = \frac{6.431 \cdot 10^3\ \frac{m}{s} \cdot 8.885 \cdot 10^6\ m}{7.599 \cdot 10^6\ m} \simeq 7.519 \cdot 10^3\ \frac{m}{s}$$

mentre la velocità v_3 che il satellite deve avere su un'orbita circolare alla stessa distanza dal centro della Terra R_3 è pari alla prima velocità cosmica:

$$v_3 = \sqrt{\frac{\mathrm{G \cdot M_T}}{\mathrm{R_3}}} = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot s^2}} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}{7.599 \cdot 10^6\ m}} \simeq 7.242 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Quindi per entrare in orbita circolare il satellite dovrà decelerare di $\boldsymbol{\Delta v_3}$ pari a:

$$\Delta v_3 = v_3 - v_{2P} \simeq 7.242 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 7.519 \cdot 10^3\ \frac{m}{s} \simeq -0.277 \cdot 10^3\ \frac{m}{s} = -277\ \frac{m}{s}$$

4. Il tempo totale **T** necessario alla manovra è pari alla somma della metà dei due periodi orbitali $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$, cioè:

$$T = \frac{1}{2}\,T_1 + \frac{1}{2}\,T_2$$

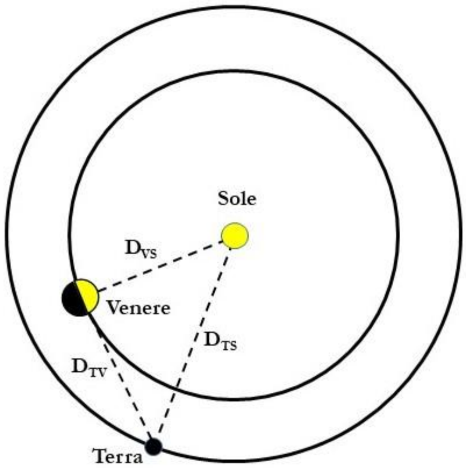
$$T = \sqrt{\frac{\pi^2\, {a_1}^3}{G\, M_T}} + \sqrt{\frac{\pi^2\, {a_2}^3}{G\, M_T}}$$

$$T = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 4.804 \cdot 10^{20}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot s^2}} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}} + \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 5.599 \cdot 10^{20}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot s^2}} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}} \simeq 7.173 \cdot 10^3\ s \simeq 2\ h$$

4. Misuriamo Venere

Quando il pianeta Venere, osservato dalla Terra, si trova alla massima elongazione, la sua magnitudine è $m = -4.50$. Assumendo le orbite di Venere e Terra circolari e una diffusione uniforme della luce proveniente dal Sole dalle nubi di Venere, determinate il raggio di Venere alla sommità delle nubi.

Soluzione



Alla massima elongazione, Sole, Venere e Terra formano un triangolo rettangolo con Venere nel vertice dell'angolo retto (vedere figura a sinistra, dove le dimensioni delle orbite sono in scala ma non le dimensioni dei corpi), quindi la distanza $\mathbf{D_{TV}}$ tra Terra e Venere è pari a:

$$D_{TV} = \sqrt{{D_{TS}}^2 - {D_{VS}}^2} \simeq 103.3 \cdot 10^6\ km$$

Detta $M_{\odot}$ la magnitudine assoluta del Sole, la magnitudine apparente $\mathbf{m_{SV}}$ del Sole visto da Venere si ricava dalla formula di Pogson ed essendo:

$$D_{VS} \simeq 108.2 \cdot 10^6\ km \simeq 3.507 \cdot 10^{-6}\ pc$$

si ha:

$$\mathrm{m_{SV}} = M_{\odot} + 5 \log \mathrm{D_{VS}} - 5 = 4.83 + 5 \log 3.507 \cdot 10^{-6} - 5 = -27.45$$

Detto $\mathbf{F_{SV}}$ il flusso del Sole alla distanza di Venere e $\mathbf{R_V}$ il raggio di Venere alla sommità delle nubi, la potenza totale $\mathbf{P_V}$ raccolta dal disco di Venere è data da:

$$P_V = F_{SV} \cdot \pi\, {R_V}^2$$

Detto **a** l'albedo, la potenza $\boldsymbol{P_D}$ diffusa in modo uniforme in tutte le direzioni dalla superficie di Venere illuminata dal Sole vale:

$$P_D = a \cdot F_{SV} \cdot \pi\, {R_V}^2$$

Alla distanza della Terra, considerando che quando Venere è alla massima elongazione solo metà della superficie visibile è illuminata dal Sole, il flusso $\mathbf{F_{VT}}$ ricevuto vale:

$$F_{VT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot F_{SV} \cdot \pi R_V^2}{2\pi \cdot D_{TV}^2} = \frac{a \cdot F_{SV} \cdot R_V^2}{4 \cdot D_{TV}^2}$$

e quindi:

$$\frac{F_{VT}}{F_{SV}} = \frac{a \cdot R_V^2}{4 \cdot D_{TV}^2}$$

Passando alle magnitudini otteniamo:

$$\mathrm{m_{VT}} - \mathrm{m_{SV}} = -2.5 \cdot \log \frac{\mathrm{F_{VT}}}{\mathrm{F_{SV}}} = -2.5 \cdot \log \frac{a \cdot R_V^2}{4 \cdot D_{TV}^2}$$

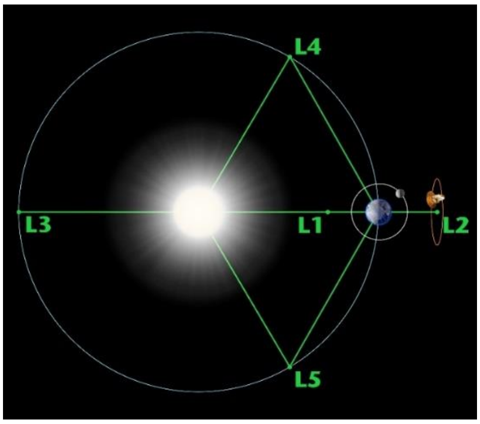
$$10^{\frac{\mathrm{m_{SV}} - \mathrm{m_{VT}}}{2.5}} = \frac{a \cdot R_V^2}{4 \cdot D_{TV}^2}$$

Da cui, essendo $\mathrm{m_{VT}} = -4.50$, si ricava:

$$R_V = \frac{2 \cdot D_{TV}}{\sqrt{a}} \cdot 10^{\frac{\mathrm{m_{SV}} - \mathrm{m_{VT}}}{5}} \simeq \frac{2 \cdot 103.3 \cdot 10^6\ km}{0.830} \cdot 10^{\frac{-27.45 + 4.50}{5}} \simeq 6400\ km$$

In buon accordo con il dato riportato in tabella, considerando un'altezza massima delle nubi di circa 350 km dal suolo.

5. Nella frescura di L2

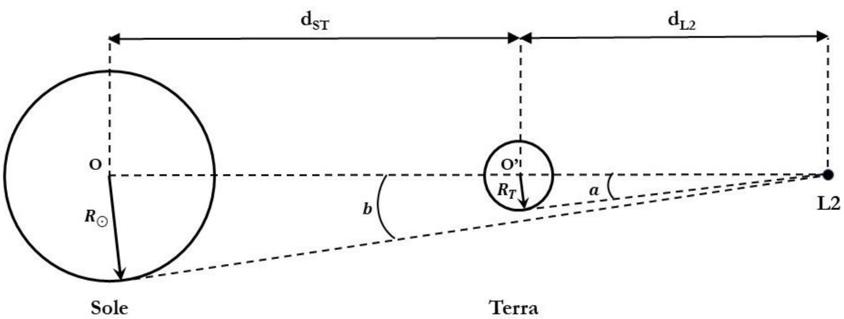


Molti telescopi spaziali sono attualmente lanciati verso il punto lagrangiano L2 del sistema Sole-Terra, attorno al quale sono posti in orbite stabili di vario tipo (per esempio Lissajous o Halo). Uno dei vantaggi di questa collocazione è che la Terra scherma il telescopio da gran parte della radiazione solare, grazie al continuo allineamento L2-Terra-Sole. Sapendo che il punto lagrangiano L2 si trova a $1.496 \cdot 10^6$ km dalla Terra, calcolate:

1. la percentuale di radiazione solare residua che investe comunque una sonda posta in L2;
2. a quale massima distanza, nel piano perpendicolare alla congiungente L2-Terra, può spingersi una sonda mantenendo costante la quantità di radiazione che riceve dal Sole (già calcolata al punto precedente).

Considerate il disco solare come una sorgente uniforme di radiazione.

Soluzione



1. Si consideri lo schema geometrico, non in scala, riportato nella figura a sinistra. Le tangenti alla superficie della Terra e a quella del Sole da L2 individuano due triangoli rettangoli, con cateti il raggio della Terra e del Sole e ipotenuse le distanze della Terra e del Sole da L2.

Le semi-ampiezze **a** e **b** delle dimensioni angolari della Terra e del Sole viste da L2 valgono quindi:

$$a = arcosen\ \frac{R_T}{d_{L2}} = arcosen\ \frac{6378\ km}{1.496 \cdot 10^6\ km} \simeq 0°.2443$$

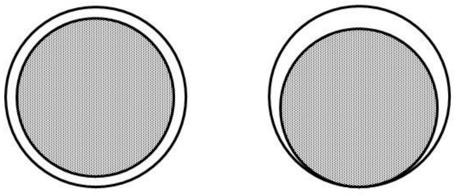
$$b = arcosen\ \frac{R_\odot}{d_{ST} + d_{L2}} = arcosen\ \frac{6.955 \cdot 10^5\ km}{151.1 \cdot 10^6\ km} \simeq 0°.2637$$

Vediamo quindi che, visti da L2, il diametro angolare apparente del Sole è maggiore del diametro angolare apparente della Terra. Assumendo che il disco del Sole abbia una luminosità uniforme, la luminosità solare residua **f** sarà pari alla frazione di area luminosa del Sole che si vede da L2:

$$f = \frac{\pi\, b^2 - \pi\, a^2}{\pi\, b^2} = 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \simeq 1 - \left(\frac{0°.2443}{0°.2637}\right)^2 \simeq 0.1417 = 14.17\ \%$$

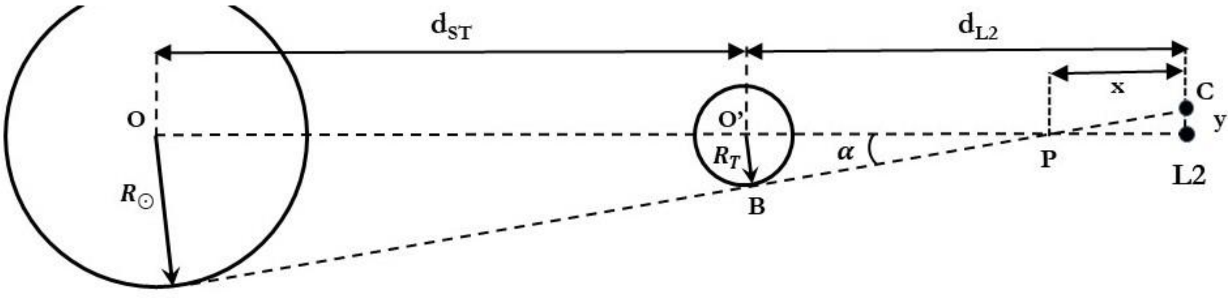
Quindi sul punto lagrangiano L2 arriva un residuo di radiazione solare pari al 14.17 % di quella che arriverebbe senza la schermatura della Terra.

2. Se il telescopio si trova esattamente in L2 vedrà il Sole e la Terra perfettamente allineati (figura in basso a sinistra, dove la Terra è rappresentata con un disco scuro). Se il telescopio si sposta perpendicolarmente al segmento $\overline{\mathbf{OO'L2}}$ il Sole e la Terra non saranno più perfettamente allineati ed esisterà una posizione **C** dalla quale il bordo inferiore del disto terrestre toccherà il bordo inferiore del disco del Sole (figura in basso a destra). Superata la posizione **C** la luminosità solare residua sarà maggiore di quella calcolata nel punto 1).



Telescopio in L2 Telescopio in C

Si consideri adesso lo schema geometrico, non in scala, riportato nella figura qui in basso, dove è evidenziata la posizione **C,** che si trova a una distanza **y** da L2.



La retta tangente alla superficie del Sole e a quella della Terra da C individua i punti **A** e **B** e interseca il segmento $\overline{\mathbf{OO'L2}}$ nel punto **P**, che dista **x** da L2. Consideriamo i due triangoli simili PBO' (rettangolo nel vertice B) e PAO (rettangolo nel vertice A), per i quali vale la proporzione:

$$\overline{\mathrm{PO'}} : \overline{\mathrm{PO}} = \overline{\mathrm{O'B}} : \overline{\mathrm{OA}}$$

ovvero:

$$(\mathrm{d_{L2}} - \mathrm{x}) : (\mathrm{d_{L2}} - \mathrm{x} + \mathrm{d_{ST}}) = \mathrm{R_T} : \mathrm{R_\odot}$$

$$\mathrm{R_\odot}\,(\mathrm{d_{L2}} - \mathrm{x}) = \mathrm{R_T}\,(\mathrm{d_{L2}} - \mathrm{x} + \mathrm{d_{ST}})$$

$$\left(\mathrm{R_T} - \mathrm{R_\odot}\right)\mathrm{x} = \left(\mathrm{R_T} - \mathrm{R_\odot}\right)\mathrm{d_{L2}} + \mathrm{R_T}\,\mathrm{d_{ST}}$$

da cui otteniamo infine:

$$\mathrm{x} = \mathrm{d_{L2}} - \frac{\mathrm{R_T}\,\mathrm{d_{ST}}}{\left(\mathrm{R_\odot} - \mathrm{R_T}\right)} \simeq 1.496 \cdot\ 10^6\ \mathrm{km} - \frac{6378\ \mathrm{km} \cdot 149.6 \cdot 10^6\ \mathrm{km}}{(6.955 \cdot 10^5\ \mathrm{km}\ - 6378\ \mathrm{km})} \simeq 1.114 \cdot 10^5\ \ \mathrm{km}$$

Possiamo calcolare adesso il valore dell'angolo $\boldsymbol{\alpha}$ con una delle due seguenti relazioni:

$$\alpha = \text{arcsen}\ \frac{\mathrm{R_T}}{\mathrm{d_{L2}} - \mathrm{x}} = \text{arcsen}\frac{6378\ km}{1.496 \cdot\ 10^6\ \mathrm{km} -\ 1.114 \cdot 10^5\ \ \mathrm{km}}\ \simeq 0°.2639$$

$$\alpha = \text{arcsen}\ \frac{\mathrm{R_\odot}}{\mathrm{d_{ST}} +\ \mathrm{d_{L2}} - \mathrm{x}} = \text{arcsen}\frac{6.955 \cdot 10^5\ \mathrm{km}}{149.6 \cdot\ 10^6\ \mathrm{km} +\ 1.496 \cdot\ 10^6\ \mathrm{km} -\ 1.114 \cdot 10^5\ \ \mathrm{km}}\ \simeq 0°.2639$$

Consideriamo infine il triangolo rettangolo PCL2 per il quale si ha:

$$y = x \cdot\ \tan\alpha \simeq\ 1.114 \cdot 10^5\ \ \mathrm{km}\ \cdot \tan 0°.2639\ \simeq 513.1\ km$$

Poiché considerazioni del tutto analoghe valgono per un punto **D** simmetrico a **C** rispetto al segmento $\overline{\mathbf{OO'L2}}$, possiamo concludere che un telescopio spaziale può allontanarsi da L2 fino a una distanza di ±513.1 km, in direzione perpendicolare alla congiungente L2-Terra-Sole, conservando la massima schermatura della radiazione solare da parte della Terra.