XIX Olimpiadi Italiane di Astronomia

Corso di preparazione alla Finale Nazionale

Categoria Junior 2 – Lezione 2

Problema 1

A partire da quale distanza il Sole non sarebbe più osservabile a occhio nudo per un osservatore posto su un pianeta la cui atmosfera ha le stesse caratteristiche di quella della Terra?

Soluzione.

La magnitudine limite $\mathbf{m_{limite}}$ delle stelle visibili a occhio nudo dipende fortemente dalla composizione dell'atmosfera e dalla quota a cui si trova l'osservatore. Normalmente per un osservatore posto a livello del mare in assenza di inquinamento luminoso si assume:

$$\mathbf{m_{limite}} \simeq 6$$

Poiché il pianeta ha un'atmosfera simile a quella della Terra, possiamo ragionevolmente assumere lo stesso valore.

Nella relazione che lega la magnitudine assoluta del Sole $\mathbf{M_\odot}$ con la sua magnitudine apparente $\mathbf{m_\odot}$ e la sua distanza **d**: $M_\odot = m_\odot + 5 - 5\log d$, ponendo $m_\odot = 6$ otteniamo la distanza massima $\mathbf{d_{max}}$ dalla quale il Sole sarebbe ancora visibile a occhio nudo:

$$d_{max} \simeq 10^{\left(\frac{m_\odot - M_\odot + 5}{5}\right)} \simeq 10^{\left(\frac{6.00 - 4.83 + 5}{5}\right)} \simeq 17.1 \text{ pc} \simeq 55.9 \text{ anni luce}$$

Nota: ovviamente oltre ad assumere che l'atmosfera del pianeta ha le stesse caratteristiche di quella della Terra, stiamo anche assumendo che l'occhio dell'osservatore ha le stesse caratteristiche dell'occhio umano.

Problema 2

Siete arrivati con la vostra astronave nei pressi di un pianeta del Sistema Solare. Osservate che la magnitudine apparente del Sole è $m_\odot = -19.35$. Vicino a quale pianeta vi trovate?

Soluzione.

Detta $\boldsymbol{M_\odot}$ la magnitudine assoluta del Sole e $\boldsymbol{d_P}$ la distanza del pianeta dal Sole si ha:

$$\mathrm{M_\odot = m_\odot + 5 - 5 \log d_P}$$

da cui otteniamo:

$$d_P \simeq 10^{\left(\frac{\mathrm{m_\odot - M_\odot + 5}}{5}\right)} \simeq 10^{\left(\frac{-19.35-4.83 + 5}{5}\right)} \simeq 1.46 \cdot 10^{-4} \text{ pc} \simeq 30.1 \text{ UA}$$

Vi trovate quindi in prossimità di Nettuno.

Problema 3

Calcolare la distanza di Procione (= α CMi) in pc ed in anni luce, sapendo che la sua parallasse vale π=0.286”. Considerando che Procione ha una magnitudine apparente pari a 0.34, dire se risulterebbe ancora osservabile a occhio nudo dalla superficie della Terra. nel caso in cui la sua distanza aumentasse di 10 volte.

Soluzione.

La distanza di Procione **d** è

$$\mathrm{d} = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0.286} \simeq 3.50 \text{ pc} \simeq 11.4 \textit{ anni luce}$$

Detto $\mathbf{F_d}$ il flusso che riceviamo da Procione e $\mathbf{F_{10d}}$ il flusso che riceveremmo se si trovasse a una distanza 10 volte maggiore, poiché il flusso diminuisce con l’inverso del quadrato della distanza sarà:

$$F_d = 100 \cdot F_{10d}$$

quindi, detta $\mathbf{m_d}$ la magnitudine di Procione alla distanza attuale e $\mathbf{m_{d10}}$ la magnitudine che avrebbe se si trovasse a una distanza 10 volte maggiore sarà:

$$m_d - m_{d10} = -2.5 \log \frac{F_d}{F_{10d}}$$

$$m_{d10} = m_d + 2.5 \log \frac{F_d}{F_{10d}} = m_d + 2.5 \log 100 \simeq 0.34 + 5 \simeq 5.34$$

la magnitudine aumenterebbe di cinque unità e Procione sarebbe ancora visibile a occhio nudo.

Problema 3

Nella seguente tabella trovate la magnitudine visuale **m** e la distanza **D** in anni luce delle cinque stelle più brillanti della costellazione Cassiopea (Cas). Completare la tabella calcolando le distanze **d** in parsec e le magnitudini assolute **M** e identificare le due stelle che sono intrinsecamente la più e la meno luminosa. Calcolare infine la luminosità di tutte le stelle in rapporto a quella del Sole $\mathbf{L/L_\odot}$.

Stella	m	D	d	M	$L/L_\odot$
α Cas	2.21	229			
β Cas	2.25	54.5			
γ Cas	2.12	615			
δ Cas	2.65	99.4			
ε Cas	3.34	444			

Soluzione

La distanza in parsec **d** vale: $d = \frac{D}{3.2616}$. La magnitudine assoluta **M** vale: $M = m + 5 - 5\log d$. Infine. detta $M_\odot$ (=4.83) la magnitudine assoluta del Sole si ha:

$$M - M_\odot = -2.5\,log\frac{L}{L_\odot} \qquad \text{e quindi:} \qquad \frac{L}{L_\odot} = 10^{\left(\frac{M_\odot - M}{2.5}\right)}$$

Stella	m	D	d	M	$L/L_\odot$
α Cas	2.21	229	70.2	-2.02	550
β Cas	2.25	54.5	16.7	1.14	30.2
γ Cas	2.12	615	189	-4.26	4330
δ Cas	2.65	99.4	30.5	0.23	69
ε Cas	3.34	444	136	-2.33	731

Quindi la stella intrinsecamente più luminosa tra quelle elencate è γ Cas, mentre la meno luminosa è β Cas.

Problema 5

Una stella dista dal Sole 326.2 anni luce e ha magnitudine apparente $m_s = 3.25$ e temperatura della fotosfera di 3000 K. Si determini la magnitudine assoluta della stella e il suo raggio in unità di raggi solari e in km.

Soluzione.

Detta **d** la distanza in anni luce, la distanza **D** della stella in parsec vale:

$$D \simeq \frac{d}{3.2616 \frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq \frac{326.2\ anni\ luce}{3.2616 \frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq 100.0 \text{ pc}$$

La magnitudine assoluta $\mathbf{M_s}$ della stella vale:

$$M_S = m_S + 5 - 5\log d \simeq 3.25 + 5 - 5\log 100.0 \simeq -1.75$$

Dalla relazione $M_\odot - M_S = -2.5\log\left(\frac{L_\odot}{L_S}\right)$ ricaviamo:

$$\log\left(\frac{L_\odot}{L_S}\right) \simeq \frac{M_\odot - M_S}{-2.5} \simeq \frac{4.83+1.75}{-2.5} \simeq -2.63$$

da cui: $\frac{L_\odot}{L_S} \simeq 10^{-2.63}$ $\qquad L_S \simeq \frac{L_\odot}{10^{-2.63}} \simeq 427 L_\odot$

Detti $\mathbf{R_S}$ e $\mathbf{T_S}$ e $\mathbf{R_\odot}$ e $\mathbf{T_\odot}$ i raggi e le temperature della stella e del Sole, dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$4\pi {R_S}^2 \sigma {T_S}^4 = 427 \cdot 4\pi {R_\odot}^2 \sigma {T_\odot}^4$$

e quindi:

$$R_S = R_\odot \sqrt{427\left(\frac{T_\odot}{T_S}\right)^4} \simeq R_\odot \sqrt{427\left(\frac{5778}{3000}\right)^4} \simeq 76.7\, R_\odot \simeq 53.3 \cdot 10^6 \text{ km}$$

La stella è una “gigante rossa”, il suo raggio è quasi uguale al semiasse maggiore dell’orbita di Mercurio.

Problema 6

Calcolare la magnitudine media della Luna Piena

Soluzione.

La luminosità della Luna è dovuta alla riflessione della luce che riceve dal Sole. Detti $\boldsymbol{R_\odot}$ e $\boldsymbol{T_\odot}$ il raggio e la temperatura della fotosfera del Sole, la quantità totale di energia $\boldsymbol{L_\odot}$ emessa dal Sole ogni secondo è:

$$L_\odot = 4\,\pi\, R_\odot^{\,2}\, \sigma\, T_\odot^{\,4} \simeq 4\,\pi \cdot 4.837 \cdot 10^{17}\, m^2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2\, K^4} \cdot 1.115\, 10^{15}\, K^4 \simeq 3.843 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W}$$

Dette $\boldsymbol{D_T}$ la distanza media Terra-Sole, $\boldsymbol{D_{TL}}$ la distanza media Terra-Luna e $\boldsymbol{D_{L\odot}}$ (=$\boldsymbol{D_T}$+$\boldsymbol{D_{TL}}$) la distanza media Luna-Sole, il flusso solare, ovvero la quantità di energia al secondo che arriva per unità di superficie sulla Terra $\boldsymbol{F_{\odot T}}$ (costante solare) e sulla Luna $\boldsymbol{F_{\odot L}}$ è:

$$F_{\odot T} = \frac{L_\odot}{4\,\pi\, D_T^{\,2}} \simeq \frac{3.843 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W}}{4\,\pi \cdot 2.238 \cdot 10^{22}\, m^2} \simeq 1366\ \frac{W}{m^2} \qquad F_{\odot L} = \frac{L_\odot}{4\,\pi\, D_{L\odot}^{\,2}} \simeq \frac{3.843 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W}}{4\,\pi \cdot 2.250 \cdot 10^{22}\, m^2} \simeq 1359\ \frac{W}{m^2}$$

Detto $\boldsymbol{R_L}$ il raggio della Luna, la superficie $\boldsymbol{S_L}$ della Luna che riceve la radiazione solare vale:

$$S_L = \pi\, R_L^{\,2} \simeq 9.490 \cdot 10^{12}\, m^2$$

Detto $\boldsymbol{A_L}$ il valore medio dell'albedo lunare, la quantità $\boldsymbol{E_L}$ di energia riflessa ogni secondo dalla Luna vale:

$$E_L = F_{\odot L}\ S_L\, A_L \simeq 1359\ \frac{W}{m^2} \cdot 9.490 \cdot 10^{12}\, m^2 \cdot 0.136 \simeq 1.754 \cdot 10^{15}\ W$$

La quantità di energia $\boldsymbol{F_{Moon}}$ ricevuta sulla Terra dalla Luna al secondo per unità di superficie è:

$$F_{Moon} = \frac{E_L}{2\,\pi\, D_{TL}^{\,2}} \simeq \frac{1.754 \cdot 10^{15}\ \mathrm{W}}{2\,\pi \cdot 1.478 \cdot 10^{17}\, m^2} \simeq 1.889 \cdot 10^{-3}\ \frac{W}{m^2}$$

Considerando la differenza tra la magnitudine apparente tra il Sole $\boldsymbol{m_\odot}$ e quella della Luna $\boldsymbol{m_L}$ si ha infine:

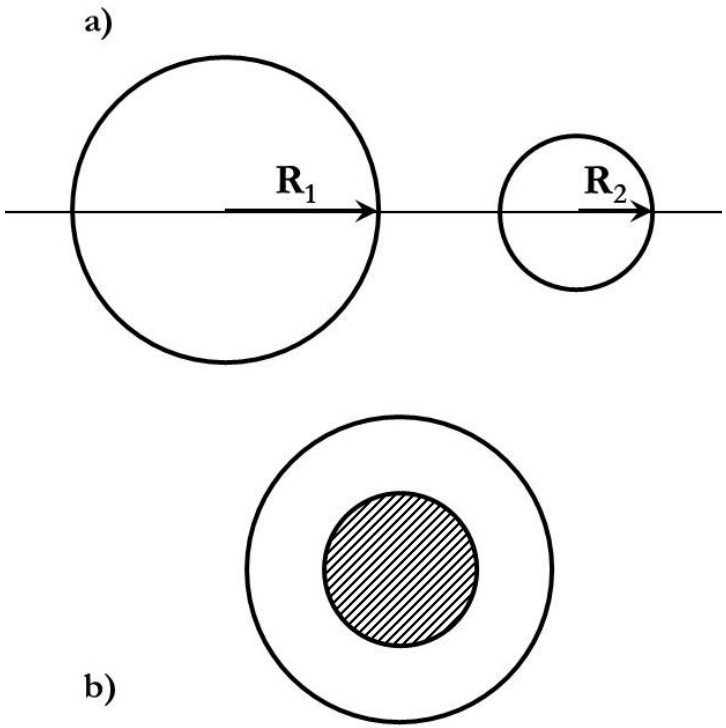
$$m_L = m_\odot + 2.5\,log\,\frac{F_{\odot T}}{F_{Moon}} \simeq -26.74 + 2.5\,log\,\frac{1366\ \frac{W}{m^2}}{1.889 \cdot 10^{-3}\ \frac{W}{m^2}} \simeq -12.09$$

Nota: il valore ottenuto è in ragionevole accordo con quello normalmente indicato come magnitudine media della Luna piena: $\mathrm{m_L} = -12.74$

Problema 7

Un sistema binario a eclisse è formato da due stelle con la stessa temperatura fotosferica. Il raggio della prima stella è pari a quello del Sole, il raggio della seconda stella è pari a metà di quello del Sole. Il piano orbitale del sistema è parallelo alla direzione di osservazione dalla Terra. Di quanto diminuisce, al massimo, la magnitudine della binaria a eclisse quando la seconda stella transita davanti alla prima?

Soluzione.



Detta **T** la temperatura della fotosfera delle due stelle e $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$ i rispettivi raggi (con $\mathbf{R_1} = 2\,\mathbf{R_2}$), le luminosità $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$ valgono:

$$L_1 = 4\,\pi\,{R_1}^2\,\sigma\,T^4$$

$$L_2 = 4\,\pi\,{R_2}^2\,\sigma\,T^4$$

La luminosità $\mathbf{L_{TOT}}$ del sistema fuori eclisse (configurazione **a** nella figura a sinistra) è massima e vale:

$$L_{TOT} = L_1 + L_2 = 4\,\pi\,({R_1}^2 + {R_2}^2)\,\sigma\,T^4$$

Per tutto il tempo dell'eclisse totale, in cui la seconda stella transitando risulta prospetticamente interamente "all'interno" della prima (configurazione **b** nella figura a sinistra), si avrà il minimo di luminosità del sistema $\boldsymbol{L_{Eclisse}}$ che vale:

$$L_{Eclisse} = 4\,\pi\,{R_1}^2\,\sigma\,T^4$$

Dette $\boldsymbol{m_{TOT}}$ la magnitudine del sistema nella configurazione **a)** e $\boldsymbol{m_{Eclisse}}$ la magnitudine nella configurazione **b)**, la variazione di magnitudine Δm è data da:

$$\Delta m = m_{Eclisse} - m_{TOT} = -2.5\log\frac{L_{Eclisse}}{L_{TOT}} = \frac{{R_1}^2}{{R_1}^2 + {R_2}^2} = -2.5\log\frac{4}{5} \simeq 0.24$$

Problema 8

Osservate Marte in una "Grande Opposizione" con un telescopio riflettore f/8 con apertura D=40.0 cm. Quanto valgono il diametro angolare apparente di Marte e le sue dimensioni lineari sul piano focale del telescopio?

Soluzione.

La caratteristica **f/n** di un telescopio indica che la focale **F** del telescopio è **n** volte maggiore dell'apertura, quindi per il telescopio utilizzato sarà:

$$F = D \cdot n = 40.0\ cm \cdot 8 = 320\ cm = 3.20\ m$$

Una Grande Opposizione è un'opposizione in cui la Terra di trova all'afelio e contemporaneamente Marte si trova al Perielio. Dette $\mathbf{D_{TA}}$ e $\mathbf{D_{MP}}$ le distanze dal Sole della Terra all'afelio e di Marte al perielio e $\mathbf{a_T}$, $\mathbf{e_T}$, $\mathbf{a_M}$ ed $\mathbf{e_M}$ i semiassi maggiori e le eccentricità delle orbite della Terra e di Marte, per la distanza Terra-Marte in una Grande Opposizione $\mathbf{D_{TM\text{-}GO}}$ otteniamo:

$$D_{TM-GO} = D_{MP} - D_{TA} = a_M\,(1 - e_M) - a_T\,(1 + e_T)$$

$$D_{TM-GO} \simeq 227.9 \cdot 10^6\ km \cdot (1 - 0.09337) - 149.6 \cdot 10^6\ km \cdot (1 + 0.01673) \simeq 5.452 \cdot 10^7\ km$$

A questa distanza, detto $\boldsymbol{R_M}$ il suo raggio, il diametro apparente di Marte $\boldsymbol{\alpha}$ sarà dato dalla relazione:

$$\alpha = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_{Marte}}}{\mathrm{D_{TM-GO}}}\right) \simeq 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{3397\ \mathrm{km}}{5.452 \cdot 10^7}\right) \simeq 7^\circ.140 \cdot 10^{-3} \simeq 25''.70$$

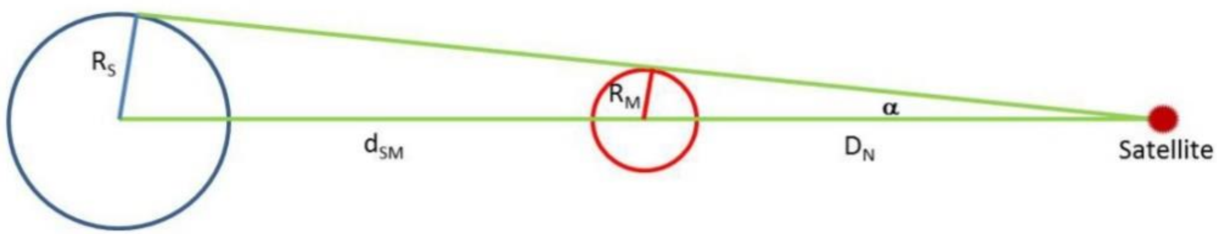
Le sue dimensioni lineari **d** sul piano focale del telescopio saranno:

$$\mathrm{d} = \mathrm{F} \cdot \tan\alpha \simeq 320\ \mathrm{cm} \cdot \tan\,(7^\circ.140 \cdot 10^{-3}) \simeq 0.40\ \mathrm{mm}$$

Problema 9

Volete mettere in orbita intorno a Marte un satellite artificiale per fotografare eclissi totali di Sole, osservabili quando Marte, visto dal satellite, si sovrappone esattamente al Sole. Considerando per il satellite un'orbita circolare sul piano equatoriale di Marte, calcolate la sua distanza da Marte, il suo periodo orbitale e le dimensioni angolari di Marte (e quindi del Sole) viste dal satellite.

Soluzione.



La configurazione in occasione di un'eclisse totale di Sole vista dal satellite è quella mostrata in figura (disegno non è in scala) dove $\mathbf{D_N}$ è la distanza cercata

Poiché valgono le relazioni: $R_S = (d_{SM} + D_N) \sin \alpha$ e $R_M = D_N \sin \alpha$

ricaviamo: $\frac{R_S}{R_M} = \frac{d_{SM} + D_N}{D_N}$ e infine, trascurando l'eccentricità dell'orbita di Marte:

$$D_N = \frac{d_{SM} \cdot R_M}{R_S - R_M} = \frac{227.9 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot 3397 \text{ km}}{6.955 \cdot 10^5 \text{ km} - 3397 \text{ km}} \simeq 1.119 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Detta $\mathbf{M_M}$ la massa di Marte, il periodo orbitale del satellite è dato da:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot D_N^3}{G \cdot M_M}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 1.401 \cdot 10^{27}\, m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 6.417 \cdot 10^{23} \text{ kg}}} \simeq 3.594 \cdot 10^7 \text{s} \simeq 1.139 \text{ anni terrestri}$$

Poiché per l'angolo α vale la relazione: $\sin \alpha = \frac{R_M}{D_N}$, le dimensioni apparenti β del Sole e di Marte visti dal satellite valgono: $\beta = 2 \arcsin \frac{3397 \text{ km}}{1.119 \cdot 10^6 \text{ km}} \simeq 0°.3479 \simeq 20'\,52''$

Nota: Si può dimostrare che l'orbita del satellite non è stabile, in quanto a $1.119 \cdot 10^6$ km da Marte la forza di gravità del pianeta non è in grado di trattenerlo in orbita.

Problema 10

Una nebulosa planetaria si espande in modo isotropo (cioè allo stesso modo in tutte le direzioni) con una velocità costante v = 17.0 km/s. Dal febbraio 1972 al febbraio 2017 le dimensioni angolari del suo raggio sono aumentate da $\alpha_{1972} = 34''.0$ a $\alpha_{2017} = 40''.0$. Calcolate la distanza, in anni luce e in parsec, della nebulosa e il suo diametro nel febbraio 2017 in km e in UA.

Soluzione.

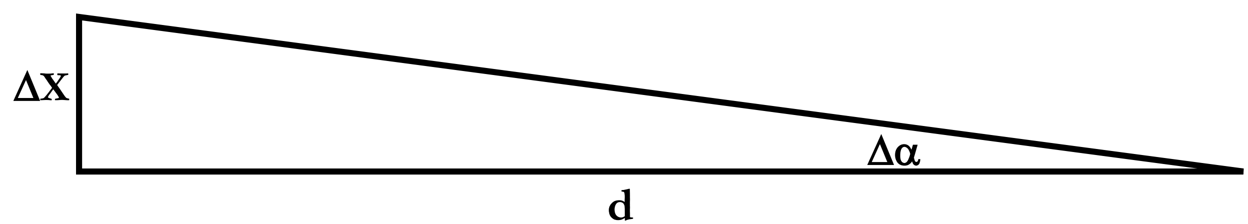
Poiché l'espansione è isotropa e con velocità costante, nei 45 anni ($\mathbf{t} \simeq 1.42 \cdot 10^9$ s) intercorsi tra la prima e la seconda osservazione l'aumento **ΔX** del raggio della nebulosa planetaria è stato di:

$$\Delta X = v \cdot t \simeq 17.0 \frac{km}{s} \cdot 1.42 \cdot 10^9 s \simeq 2.41 \cdot 10^{10} km$$

Nello stesso tempo l'aumento di dimensioni angolari **Δα** è stato di:

$$\Delta\alpha = \alpha_{2017} - \alpha_{1972} \simeq 40.0 - 34''.0 \simeq 6''.0 \simeq 1^\circ.7 \cdot 10^{-3}$$

La distanza **d** per cui a una variazione lineare **ΔX** corrisponde una variazione angolare **Δα** è:



$$\mathrm{d} = \frac{\Delta \mathrm{X}}{\tan \Delta\boldsymbol{\alpha}} \simeq \frac{2.41 \cdot 10^{10}\ km}{\tan 1^\circ.7 \cdot 10^{-3}} \simeq 8.0 \cdot 10^{14}\ \mathrm{km} \simeq 85 \text{ anni luce} \simeq 26 \text{ parsec}$$

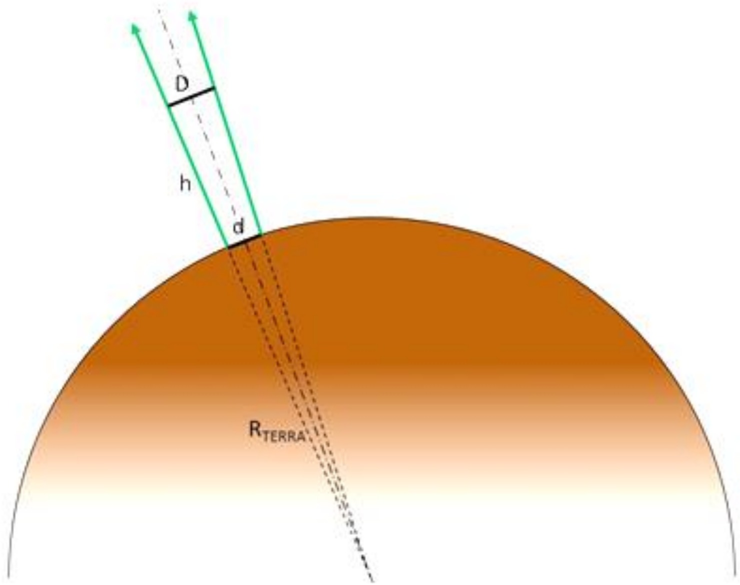
Poiché le dimensioni angolari del raggio della nebulosa valgono attualmente $\boldsymbol{\alpha}$ = 40''.0 (=1°.11 · 10^{-2}), nota la distanza della nebulosa ne ricaviamo il diametro **D** dalla relazione:

$$\mathrm{D} = 2 \cdot \mathrm{d} \cdot \tan\alpha \simeq 2 \cdot 8.0 \cdot 10^{14}\ \mathrm{km} \cdot \tan 1^\circ.11 \cdot 10^{-2} \simeq 3.1 \cdot 10^{11}\ \mathrm{km} \simeq 2.1 \cdot 10^3\ \mathrm{UA}$$

Problema 11

Due puntatori laser di alta potenza distanti 20.0 m l'uno dall'altro, inviano entrambi un sottilissimo fascio di luce in direzione esattamente verticale. Assumendo la superficie della Terra perfettamente sferica, quale sarà la distanza tra i due fasci a un'altezza dal suolo di 70 km?

Soluzione.



Consideriamo la figura a sinistra. Detta **d** la distanza tra i due laser, vogliamo calcolare la separazione **D** dei fasci luminosi all'altezza **h** dalla superficie.

Poiché i due laser puntano esattamente in verticale, i loro ipotetici prolungamenti all'indietro, cioè verso l'interno della Terra, si incontrerebbero esattamente al centro del nostro pianeta.

Essendo **d** piccolo rispetto a $\mathbf{R_{Terra}}$ possiamo trascurare l'effetto della curvatura terrestre e considerare i due triangoli simili in figura, per i quali si può scrivere:

$$R_{TERRA} : d = (R_{TERRA} + h) : D$$

Da cui ricaviamo:

$$D = \frac{(R_{Terra} + h) \cdot d}{R_{Terra}} = \frac{6448 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot 20.0 \text{ m}}{6378 \cdot 10^3} \simeq 20.2\ m$$

Problema 12

La magnitudine totale di un sistema stellare triplo non risolto (cioè con le tre stelle così vicine tra loro da non essere osservabili singolarmente dalla Terra) è $m_{Totale} = 0$. Sapendo che le magnitudini di due delle tre componenti sono, rispettivamente, $m_1 = 1.00$ e $m_2 = 2.00$, calcolare la magnitudine m_3 della terza componente.

Soluzione.

In generale, dato un qualsiasi numero di stelle, per ottenere la loro magnitudine totale occorre sommare i loro flussi. Si può dimostrare che nel caso di "n" stelle vale la relazione generale:

$$m_{Totale} = -2.5 \log\ (10^{-0.4 m_1} + 10^{-0.4 m_2} + \dots\ 10^{-0.4 m_n})$$

che, applicata nel caso in esame, porta a:

$$0 = -2.5 \log\ (10^{-0.4 \cdot m_1} + 10^{-0.4 \cdot m_2} + 10^{-0.4 \cdot m_3})$$

$$0 = -2.5 \log\ (10^{-0.4 \cdot 1.00} + 10^{-0.4 \cdot 2.00} + 10^{-0.4 \cdot m_3})$$

Da cui, passando agli esponenziali:

$$1 = 10^{-0.4 \cdot 1.00} + 10^{-0.4 \cdot 2.00} + 10^{-0.4 \cdot m_3}$$

$$10^{-0.4 \cdot m_3} = 1 - 10^{-0.4 \cdot 1.00} - 10^{-0.4 \cdot 2.00} \simeq 1 - 0.398 - 0.159 \simeq 0.443$$

e considerando il logaritmo di ambo i membri:

$$-0.4\, m_3 \simeq -0.354$$

$$m_3 \simeq 0.89$$

Problema 13

ζ Boötis è una binaria visuale, situata alla distanza di 180 anni luce dal Sistema Solare, composta da 2 stelle identiche. La magnitudine apparente totale del sistema è $m_{tot} = 3.79$. La separazione angolare tra le due componenti, viste dalla Terra, è α = 1.2”. Questo sistema è osservato alla lunghezza d’onda λ = 5500 Å.

1. Che diametro minimo deve avere un telescopio per riuscire a risolvere il sistema binario?
2. Se la lunghezza focale del telescopio è 1 m e il potere risolutivo dell’occhio è 2’, quanto deve essere la lunghezza focale dell’oculare per riuscire a distinguere le due componenti?
3. Quanto vale la magnitudine assoluta di ciascuna delle due stelle del sistema binario?

Soluzione.

Poiché la separazione angolare tra le due stelle è maggiore del valore medio del seeing (circa 1”) che si registra in buona parte delle località sulla superficie della Terra, possiamo affermare che le due stelle possono essere “risolte” con osservazioni visuali da Terra. La risoluzione **θ** in secondi d’arco di un telescopio di apertura **D** per osservazioni alla lunghezza d’onda **λ** vale:

$$\theta = 1.22\,\frac{\lambda}{D} \cdot 206265''$$

Il telescopio dovrà avere quindi un diametro minimo $\mathbf{D_{Min}}$ pari a:

$$D_{Min} = 1.22\,\frac{\lambda}{\theta}\,206265'' = \frac{1.22 \cdot 5500 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot 206265''}{1.2''} \simeq 0.12\ \mathrm{m} = 12\ \mathrm{cm}$$

Il rapporto tra la lunghezza focale **F** del telescopio e quella **f** dell’oculare utilizzato, fornisce l’ingrandimento **I**:

$$I = \frac{F}{f}$$

Dobbiamo allora calcolare il minimo valore dell’ingrandimento $\mathbf{I_{min}}$ dell’immagine del sistema binario che permette al nostro occhio di risolvere le due componenti:

$$I_{min} = \frac{\text{risoluzione occhio}}{\text{separazione angolare}} = \frac{2'}{1.2''} = \frac{120''}{1.2''} = 100$$

Problema 14

Il Telescopio Spaziale Hubble ha uno specchio con diametro $D_{HST} = 2.4$ m e orbita attorno alla Terra dalle ore 12:00 UT del 25 aprile 1990 a un'altezza sulla superficie $h_{HST} = 539$ km. Quante orbite attorno alla Terra ha completato HST alle ore 12:00 UT del 25 aprile 2020? Stimate le dimensioni minime di un corpo che HST è capace di distinguere sulla superficie della Terra osservando alla lunghezza d'onda $\lambda = 5500$ Å.

Soluzione.

Detti $\mathbf{R_T}$ e $\mathbf{M_T}$ raggio e massa della Terra, il periodo orbitale $\mathbf{T_{HST}}$ si ottiene dalla III legge di Keplero:

$$T_{HST} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_T + h_{HST})^3}{G\, M_T}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.309 \cdot 10^{20}\ \mathrm{m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{kg}} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}} \simeq 5725\ \mathrm{s} \simeq 95.42\ \text{minuti}$$

Dalle 12:00 UT del 25 aprile 1990 alle 12:00 UT del 25 aprile 2020 sono trascorsi in totale $\Delta T = 10958$ giorni, in quanto dobbiamo considerare che gli anni 1992, 1996, 2000, 2004, 2008, 2012, 2016 e 2020 sono stati bisestili. Il numero di orbite $\mathbf{Orbite_{HST}}$ sarà quindi:

$$\mathrm{Orbite}_{HST} = \frac{\Delta T}{T_{HST}} \simeq \frac{10958\ \text{giorni} \cdot 86400 \frac{\mathrm{s}}{\text{giorno}}}{5725\ \mathrm{s}} \simeq 165.4 \cdot 10^3$$

Il potere risolutivo teorico $\boldsymbol{\alpha_{HST}}$ di HST in secondi d'arco è dato dalla relazione:

$$\alpha_{HST} = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D_{HST}} \cdot 206265'' \simeq 1.22 \cdot \frac{5500 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}}{2.4\ \mathrm{m}} \cdot 206265'' \simeq 0''.058$$

Questo potere risolutivo consentirebbe a HST di distinguere sulla superficie della Terra oggetti con dimensioni: $d_{teorico} = h_{HST} \cdot \tan \alpha_{HST} \simeq 15\ \mathrm{cm}$

Tuttavia, se puntato verso la superficie della Terra HST subirà gli effetti dell'atmosfera, proprio come se osservasse verso lo spazio dalla superfice. Quindi il suo potere risolutivo effettivo $\mathbf{d_{effettivo}}$ sarà limitato dagli effetti dell'atmosfera terrestre e sarà dell'ordine di 1''. Avremo quindi:

$$d_{effettivo} = h_{HST} \cdot \tan 1'' = h_{HST} \cdot \tan\left(\frac{1''}{3600}\right) \simeq 2.6\ \mathrm{m}$$

Problema 15

Il Telescopio VLT dell'ESO è formato da quattro telescopi, ognuno con uno specchio con diametro d = 8.2m, che possono inviare la luce raccolta a un fuoco comune. Supponete che il VLT fotografi una stella di magnitudine $m_{stella} = 23.0$. Quanti fotoni provenienti da questa stella vengono raccolti in totale dai quattro telescopi del VLT ogni secondo? Assumete per i fotoni un'energia media $E = 4.8 \cdot 10^{-19}\,J$ ($J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = W \cdot s$)

Soluzione.

Ricaviamo il flusso proveniente dalla stella F_{Stella} in unità di quello proveniente dal Sole F_{Sole} dalla differenza di magnitudine apparente: $m_{Stella} - m_{Sole} = -2.5 \log \frac{F_{Stella}}{F_{Sole}}$ da cui si ha:

$$F_{stella} = 10^{\left(\frac{m_{Sole} - m_{stella}}{2.5}\right)} \cdot F_{Sole} = 10^{\left(\frac{-26.74 - 23.0}{2.5}\right)} \cdot F_{Sole} \simeq 1.27 \cdot 10^{-20} \cdot F_{Sole}$$

Detta **D** la distanza media Terra-Sole e $\mathbf{T_{Sole}}$ la temperatura della fotosfera solare, la quantità media di energia $\mathbf{F_{Sole}}$ proveniente dal Sole (costante solare) che arriva ogni secondo su un metro quadrato alla sommità dell'atmosfera della Terra è data dalla relazione:

$$F_{Sole} = \frac{4\,\pi \cdot R_{Sole}^2 \cdot \sigma \cdot T_{Sole}^4}{4\,\pi \cdot D^2} \simeq \frac{4.837 \cdot 10^{17} m^2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4} \cdot 1.115 \cdot 10^{15}\,K^4}{2.238 \cdot 10^{22}\,m^2} \simeq 1366\,\frac{W}{m^2}$$

E quindi otteniamo: $F_{stella} \simeq 1.27 \cdot 10^{-20} \cdot F_{Sole} \simeq 1.73 \cdot 10^{-17}\,\frac{W}{m^2}$

Poiché l'energia media dei fotoni della stella è $E = 4.8 \cdot 10^{-19}\,W \cdot s$, otteniamo che il numero di fotoni **n** in arrivo ogni secondo su una superficie di un metro quadrato è: $n = \frac{F_{stella}}{E} \simeq \frac{1.73 \cdot 10^{-17}\,\frac{W}{m^2}}{4.8 \cdot 10^{-19}\,W{\cdot}s} \simeq 36\,\frac{fotoni}{m^2 \cdot s}$

L'area complessiva **A** di raccolta del VLT è data dalla somma delle aree dei quattro specchi da 8.2 m:

$A = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \simeq 211\,m^2$ ed è equivalente a quella di un singolo specchio con diametro di 16.4 m. Il numero totale **N** dei fotoni raccolti dal VLT sarà quindi:

$$N = n \cdot A \simeq 36\,\frac{fotoni}{m^2 \cdot s} \cdot 211\,m^2 \simeq 7600\,\frac{fotoni}{s}$$