XIX Olimpiadi Italiane di Astronomia

Corso di preparazione alla Finale Nazionale

Categoria Junior 1 – Lezione 2

Problema 1

Due comete hanno i seguenti parametri orbitali.

Cometa 1: periodo orbitale $T_1 = 0.1543$ anni, eccentricità dell'orbita $e_1 = 0.9842$.

Cometa 2: periodo orbitale $T_2 = 0.2542$ anni, eccentricità dell'orbita $e_2 = 0.9833$.

Solo una delle due comete può avere un'orbita stabile intorno al Sole. Dire quale giustificando la risposta con gli opportuni calcoli.

Soluzione.

Dai periodi orbitali ricaviamo i semiassi maggiori $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$ delle orbite:

$$a_1 = \sqrt[3]{T_1^{\ 2}} = \sqrt[3]{2.381 \cdot 10^{-2} \text{ anni}} \simeq 0.2877 \text{ UA} \simeq 4.304 \cdot 10^{7} \text{ km}$$

$$a_2 = \sqrt[3]{T_2^{\ 2}} = \sqrt[3]{6.462 \cdot 10^{-2} \text{ anni}} \simeq 0.4013 \text{ UA} \simeq 6.003 \cdot 10^{7} \text{ km}$$

Possiamo adesso ricavare la distanza al perielio $\boldsymbol{D_{P1}}$ **e** $\boldsymbol{D_{P2}}$ delle comete:

$$D_{P1} = a_1 (1 - e_1) = 4.304 \cdot 10^{7} \text{ km} \cdot 0.0158 \simeq 6.80 \cdot 10^{5} \text{ km}$$

$$D_{P2} = a_2 (1 - e_2) = 6.003 \cdot 10^{7} \text{ km} \cdot 0.0167 \simeq 1.00 \cdot 10^{6} \text{ km}$$

Poiché il raggio del Sole vale $R_{Sole} \simeq 6.955 \cdot 10^{5}$ km, notiamo che il perielio della prima cometa si trova all'interno del Sole, Quindi la prima cometa potrebbe effettuare al più un passaggio al perielio, finendo però per cadere all'interno del Sole.

Problema 2

Due astronauti su Marte stanno cercando di sollevare la loro mars-mobile, la cui massa è di 255 kg, rimasta senza energia. Che forza totale devono applicare per sollevare il veicolo?

Soluzione.

Per sollevare il veicolo i due astronauti devono applicare una forza verso l'alto appena più grande della forza peso **P** che agisce sulla mars-mobile.

Sappiamo che detta $\boldsymbol{g_p}$ l'accelerazione di gravità sulla superficie di un pianeta, **M** la massa del pianeta ed **R** il suo raggio, il peso di un corpo di massa **m** è dato dalla relazione:

$$P = m\, g_P = m\, \frac{G\ \cdot M}{R^2}$$

$$P = m \cdot g_p$$

Nel caso in esame otteniamo:

$$P = 255\, kg\ \cdot \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\, \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 6.417 \cdot 10^{23}}{(3397 \cdot 10^3\ m)^2} \simeq 255\, kg\ \cdot\ 3.711\ \frac{m}{s^2}\ \simeq 946\, N$$

Per sollevare verso l'alto il veicolo occorrerà quindi una forza maggiore di 946 N.

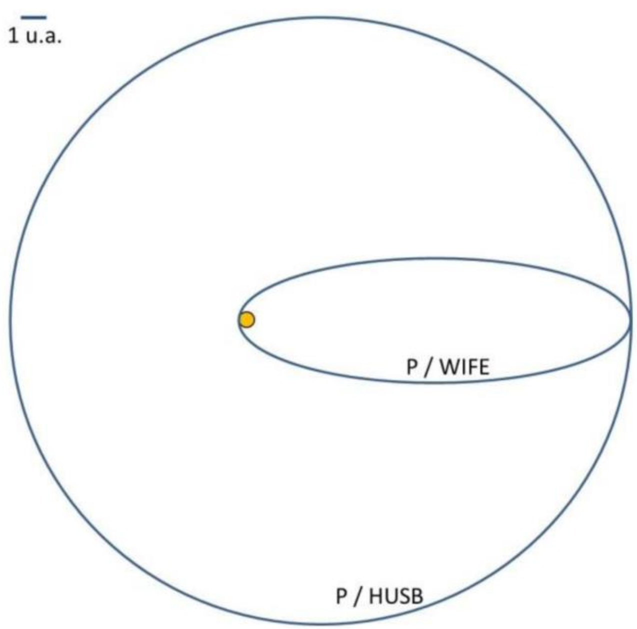
Problema 3

Disegnare sullo stesso grafico le orbite delle comete P/HUSB (e = 0.230) e P/WIFE (e = 0.950) che hanno la stessa linea degli apsidi e distanza all'afelio di 15.02 UA. Il 7 aprile 2016 le due comete si trovano entrambe al perielio, quale sarà, all'incirca, la loro configurazione a fine Agosto 2037?

Soluzione.

Dette $\mathbf{D_P}$ le $\mathbf{D_A}$ le distanze al perielio e all'afelio, **a** e **b** le lunghezze dei semiassi in UA e **T** il periodo di rivoluzione in anni, dalle relazioni: $D_P = D_a \frac{1-e}{1+e}$; $a = \frac{D_a + D_p}{2}$; $b = a\sqrt{1 - e^2}$ e $T = \sqrt{a^3}$, otteniamo per le due comete i valori riportati nella seguente tabella:

Nome	D_A (UA)	D_P (UA)	a (UA)	b (UA)	e	T (anni)
P/HUSB	15.02	9.40	12.2	11.9	0.230	42.6
P/WIFE	15.02	0.385	7.70	2.40	0.950	21.4



Sapendo che le due comete hanno la stessa linea degli apsidi, otteniamo infine il grafico a sinistra, con entrambe le comete al perielio il 7 aprile 2016.

A fine Agosto 2037 saranno trascorsi circa 21.4 anni (21 anni + 4.5 mesi), un tempo pari a quello di rivoluzione di P/WIFE e pari a circa la metà di quello di rivoluzione di P/HUSB.

Quindi la cometa P/WIFE sarà nuovamente nei pressi del perielio, mentre P/HUSB si troverà nei pressi dell'afelio.

Problema 4

Calcolate il periodo di rivoluzione e la velocità tangenziale di un corpo che si muove su un'orbita circolare a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi di un buco nero con massa $M_{BN} = 2.51\ M_{\odot}$.

Soluzione.

Il "Raggio di Schwarzchild" $\boldsymbol{R_s}$ del buco nero vale:

$$R_s = \frac{2\ G\ M_{BN}}{c^2} = \frac{2\ G \cdot 2.51\ M_{\odot}}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 4.99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{8.988 \cdot 10^{16}\ \frac{m^2}{s^2}} \simeq 7410\ \text{m} = 7.41\ \text{km}$$

Detto **a** (= R_S+ 10 km) il raggio dell'orbita, dalla III Legge di Keplero il periodo **T** vale:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2\ a^3}{G\ 2.51 \cdot M_{\odot}}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 5.277 \cdot 10^{12}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 4.99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}} \simeq 7.91 \cdot 10^{-4}\ s$$

Con tale periodo la velocità di rivoluzione **v** risulta:

$$v = \frac{2\ \pi\ a}{T} = \frac{109.4\ \text{km}}{7.90 \cdot 10^{-4}\ \text{s}} \simeq 138 \cdot 10^3\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \simeq 0.461\ c$$

Nota: nella soluzione stiamo assumendo che le leggi di Keplero siano valide a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi del buco nero. La soluzione rigorosa del problema richiederebbe l'uso di relazioni derivate dalla Relatività generale.

Problema 5

Il pianeta Papalla ruota, su un'orbita circolare, attorno a una stella esattamente uguale al Sole. La sua distanza dalla stella è di $230.7 \cdot 10^6$ km. Gli astronomi di Papalla misurano il tempo e le distanze con unità di misura fondamentali (il secondo e il metro) identiche a quelle degli astronomi della Terra e anche loro chiamano "anno" il tempo impiegato dal loro pianeta per compiere una rivoluzione completa attorno alla stella. Quanto vale, in km, un anno luce per gli astronomi del pianeta Papalla?

Soluzione.

Poiché la stella attorno a cui ruota Papalla è esattamente uguale al Sole, detto **a** il semiasse maggiore (ovvero il raggio) dell'orbita e **T** il periodo di rivoluzione, vale la stessa relazione applicabile ai corpi del Sistema Solare:

$$a^3\ (\mathrm{UA}) = T^2\ (\mathrm{anni})$$

da cui ricaviamo:

$$T \simeq \sqrt{\left(\frac{230.7\ \cdot\ 10^6\ km}{149.6\ \cdot\ 10^6\ km}\right)^3} \simeq \sqrt{1.542^3} \simeq 1.915\ anni\ terrestri$$

La velocità della luce è una costante universale, mentre l'anno luce è la distanza che la luce percorre in un anno. Poiché l'anno di Papalla è 1.915 volte più lungo di quello terrestre, l'anno luce per gli astronomi di Papalla $\boldsymbol{anno\ luce_{Papalla}}$ sarà più lungo della stessa quantità e varrà quindi:

$$anno\ luce_{Papalla} \simeq 9460.7\ \cdot\ 10^9\ km\ \cdot 1.915\ \simeq 1.812\ \cdot 10^{13}\ km$$

Problema 6

Il 2015 è stato un anno mirabile per la relatività generale. Il team internazionale LIGO/VIRGO ha infatti rivelato le onde gravitazionali prodotte da due buchi neri che si sono fusi circa 1.2 miliardi di anni fa. La scoperta, oltre a rappresentare una conferma fondamentale della teoria della relatività generale, ha permesso di calcolare che i due buchi neri che si sono fusi avevano masse di 29 e 36 volte la massa del Sole. Il buco nero che hanno formato ha invece 62 volte la massa del Sole. Calcolare:

1. la quantità totale di energia emessa utilizzando la relazione di Einstein $E = \Delta m\ c^2$ (dove Δm è la differenza di massa)
2. il raggio massimo del buco nero risultante dalla fusione.

Soluzione.

Il valore Δm rappresenta la massa che si trasforma in energia, che in unità di masse solari $\boldsymbol{M_\odot}$ vale:

$$\Delta m = \left(29M_\odot + 36M_\odot\right) - 62M_\odot = 3M_\odot \simeq 3 \cdot 1.989 \cdot 10^{30}kg \simeq 5.967 \cdot 10^{30}kg$$

La massa del buco nero risultante è quindi di $3M_\odot$ minore della somma della massa dei due buchi neri che si sono fusi. La quantità totale di energia **E** emessa nello spazio sotto forma di onda gravitazionale è stata:

$$E = \Delta m \cdot c^2 \simeq 5.967 \cdot 10^{30}kg \cdot 8.988 \cdot 10^{16}\ \frac{m^2}{s^2} \simeq 5.363 \cdot 10^{47}\ \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 5.363 \cdot 10^{47}\ \mathrm{J}$$

La velocità di fuga **v** dalla superfice di un corpo di massa **M** e raggio **R** (seconda velocità cosmica) vale:

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2\ \mathrm{G\ M}}{\mathrm{R}}}$$

Nel caso in cui v = c, il corrispondente raggio $\boldsymbol{R_S}$ è detto "raggio di Schwarzschild" e rappresenta il limite (raggio) massimo di un buco nero di massa M (pari a $62M_\odot$ nel nostro caso):

$$R_S = \frac{2\ G\ M}{c^2} \simeq \frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}\dfrac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 1.233 \cdot 10^{32}kg}{8.988 \cdot 10^{16}\ \dfrac{m^2}{s^2}} \simeq 183 \cdot 10^3\ m = 183\ km$$

Problema 7

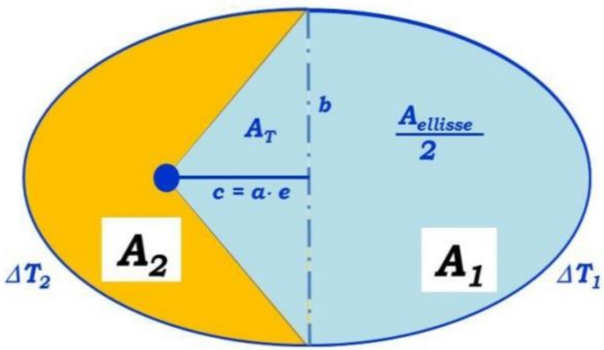
Una cometa descrive un'orbita con eccentricità e = 0.921 e distanza dal Sole al perielio di 0.451 UA. Consideriamo le due semi-orbite separate dall'asse minore dell'ellisse. Quando tempo impiega la cometa per percorre ognuna delle due semi-orbite?

Soluzione

Deriviamo i parametri dell'orbita della cometa. Per i semiassi **a** e **b** ricaviamo:

$$a = \frac{d_P}{(1-e)} \simeq \frac{0.451}{0.079} \simeq 5.71 \text{ UA} \qquad\qquad b = a\sqrt{1-e^2} \simeq 5.71 \cdot 0.390 \simeq 2.23 \text{ UA}$$

Il periodo orbitale **T** in anni vale: $T = \sqrt{a^3} \simeq \sqrt{186} \simeq 13.6 \text{ anni}$



L'area totale dell'ellisse è data dalla relazione:

$$A_{ellisse} = \pi \, a \, b \simeq 40.0 \text{ UA}^2$$

L'area della semi-orbita $\mathbf{A_2}$ vale: $A_2 = \frac{A_{ellisse}}{2} - a \cdot e \cdot b \simeq 8.3 \text{ UA}^2$

Dalla II legge di Keplero sappiamo che: $\Delta T_n : A_n = T : A_{ellisse}$

e quindi: $\Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A_{ellisse}} \simeq \frac{8.3 \text{ UA}^2 \cdot 13.6 \text{ anni}}{40.0 \text{ UA}^2} \simeq 2.8 \text{ anni}$

Ovviamente per l'altra semi-orbita valgono le relazioni:

$$A_1 = \frac{A_{ellisse}}{2} + a \cdot e \cdot b \simeq 31.7 \text{ UA}^2 \qquad \Delta T_1 = \frac{A_1 \cdot T}{A_{ellisse}} \simeq \frac{31.7 \text{ UA}^2 \cdot 13.6 \text{ anni}}{40.0 \text{ UA}^2} \simeq 10.8 \text{ anni}$$

Nota: soluzione alternativa

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{A_1}{A_2} \qquad \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} + 1 = \frac{A_1}{A_2} + 1 \qquad \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{\Delta T_2} = \frac{A_1 + A_2}{A_2} \qquad \frac{T}{\Delta T_2} = \frac{A}{A_2} \qquad \Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A}$$

$$A_2 = \frac{\pi \, a \, b}{2} - a \cdot e \cdot b = \left(\frac{\pi}{2} - e\right) ab \qquad \Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - e\right) ab \cdot T}{\pi \, a \, b} = \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{\pi}\right) T \simeq 2.8 \text{ anni}$$

$$\Delta T_1 = \frac{A_1 \cdot T}{A} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + e\right) ab \cdot T}{\pi \, a \, b} = \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{\pi}\right) T \simeq 10.8 \text{ anni}$$

Problema 8

Nel 1968, Apollo 8 è stata la prima missione della NASA con equipaggio umano a entrare in orbita lunare, dove rimase per 20 ore, compiendo 10 orbite circolari complete prima di rientrare a Terra.

Calcolate: la distanza dalla superficie lunare della navicella Apollo 8 durante le sue orbite; la velocità orbitale della navicella Apollo 8.

Soluzione.

Poiché l'Apollo 8 ha completato **n** = 10 orbite in **T** = 20 ore, il periodo orbitale **P** valeva:

$$P = \frac{T}{n} = \frac{20\ h}{10} = 7200\ s$$

Detta **M** la massa della Luna, dalla III legge di Keplero il raggio dell'orbita **a** valeva:

$$\mathrm{a} = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{G\ M\ P^2}}{4\ \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 7.346 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg} \cdot 5.184 \cdot 10^{7}\ s^2}{39.44}} \simeq \sqrt[3]{6.444\ \cdot\ 10^{18}} \simeq 1.861 \cdot 10^6\ m$$

Questo valore è la distanza dell'Apollo 8 dal centro della Luna, quindi detto **R** il raggio della Luna, l'altezza **h** dal suolo lunare vale:

$$h = a\ - R\ \simeq 1861\ km\ - 1738\ km = 123\ km$$

Per calcolare la velocità orbitale **v,** detta **L** la lunghezza di un'orbita dell'Apollo 8 si ha:

$$v = \frac{2\ \pi\ (R + h)}{T} \simeq \frac{2\ \pi\ \cdot\ 1861\ km}{7200\ s} \simeq 1.624\ \frac{km}{s} = 1624\ \frac{m}{s}$$

In alternativa possiamo considerare che **v** equivale alla prima velocità cosmica:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot\ 7.346\ \cdot\ 10^{22}\ kg}{1.861\ \cdot\ 10^{6}\ km}} \simeq 1.623\ \frac{km}{s}$$

Nota: i due valori calcolati per la velocità sono del tutto equivalenti considerando la precisione delle misure

Problema 9

La stazione spaziale Endurance del film Interstellar, si trova nello spazio a molti anni luce di distanza dalle stelle più vicine e ruota su sé stessa a velocità costante per creare, nella sua parte più esterna, una gravità pari a un terzo di quella presente sulla superficie della Terra. Sapendo che il raggio dell'Endurance è di 298.0 m, calcolate: quanti giri su sé stessa effettua ogni ora; quanto vale l'accelerazione di gravità nella sala motori, posta al centro della stazione spaziale.

Soluzione.

Detta $\boldsymbol{g_T}$ l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra, l'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g_E}$ nella parte più esterna dell'Endurance vale: $g_E = \frac{g_T}{3} \simeq \frac{9.807\,\frac{m}{s^2}}{3} \simeq 3.269\,\frac{m}{s^2}$

Detti $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare, $\mathbf{V_T}$ la velocità tangenziale e $\mathbf{r}$ il raggio della stazione spaziale, l'accelerazione centrifuga $\mathbf{a_c}$ dovuta alla rotazione vale $a_c = \omega^2 \cdot r = \frac{{V_T}^2}{r}$, da cui ricaviamo:

$$V_T = \sqrt{g_E \cdot r} \simeq \sqrt{3.269\,\frac{m}{s^2} \cdot 298.0\,m} \simeq 31.21\,\frac{m}{s}$$

Il periodo di rotazione $\mathbf{T}$ vale:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{V_T} \simeq \frac{2 \cdot \pi \cdot 298.0\,m}{31.21\,\frac{m}{s}} \simeq 60\,s \simeq 1\,m$$

Quindi in un'ora l'Endurance effettua un numero di giri $\mathbf{N}$ su sé stessa pari a:

$$N = \frac{3600\,s}{60\,s} = \frac{60\,m}{1\,m} = 60\text{ giri}$$

Poiché la stazione spaziale è molto lontana da una qualsiasi stella, possiamo trascurare gli effetti gravitazionali delle stelle. Dalla relazione $a_c = \omega^2 \cdot r$ vediamo che, a parità di velocità angolare, l'accelerazione centrifuga diminuisce con il raggio. Al centro dell'Endurance $r = 0$ e avremo quindi $g_E = 0$.

Problema 10

La foto in basso mostra il pianeta Venere osservato dalla Terra all'inizio del mese di giugno 2020. Il Sole illumina direttamente il bordo a destra di Venere, mentre il bordo sinistro risulta appena visibile a causa della luce diffusa dall'atmosfera del pianeta.

1) A quale delle seguenti configurazioni si stava avvicinando Venere? Giustificate la vostra risposta.

a) massima elongazione est; b) massima elongazione ovest; c) congiunzione inferiore; d) congiunzione superiore.

2) A quale dei seguenti valori era più prossima la distanza di Venere dalla Terra quando è stata scattata la foto?

a) 0.277 UA b) 0.695 UA c) 1.72 UA

Soluzione.

1) Congiunzione inferiore, infatti poiché Venere appare quasi in fase "nuova" e solo una piccolissima porzione è direttamente illuminata, il pianeta era prossimo alla congiunzione inferiore. Alle massime elongazioni Venere appare in fase di "primo quarto" o di "ultimo quarto", mentre quando si avvicina alla congiunzione superiore la sua fase è prossima a "piena".

2) 0.277 UA; infatti in congiunzione inferiore, considerando orbite circolari, la distanza Venere-Terra $\mathbf{D_{VT}}$ è data dalla differenza tra i semiassi maggiori dell'orbita della Terra $\mathbf{a_T}$ e di Venere $\mathbf{a_V}$:

$$D_{VT} = a_T - a_V \simeq 149.6 \cdot 10^6 \text{ km} - 108.2 \cdot 10^6 \text{ km} \simeq 41.4 \cdot 10^6 \text{ km} \simeq 0.277 \text{ UA}$$

Problema 11

L'astronave da crociera Cosmosview della compagnia SSC (Space Shipping Company), impegnata in un tour del nostro Sistema Solare, subisce un guasto ai motori nel punto lungo il segmento congiungente Terra-Sole nel quale l'attrazione gravitazionale della Terra è un centesimo di quella del Sole. A che distanza dalla Terra si trova la Cosmosview? Quanto tempo impiegherà una richiesta d'aiuto inviata via radio a raggiungere i radiotelescopi terrestri? Trascurate gli effetti gravitazionali della Luna e degli altri pianeti, trascurate le dimensioni della Terra e considerate la sua orbita circolare.

Soluzione.

Per calcolare la distanza **d** a cui si trova la Cosmosview dalla Terra lungo la congiungente Terra-Sole, dobbiamo considerare il fatto che l'astronave si trova nel punto in cui l'attrazione gravitazionale della Terra è 1/100 di quella del Sole. Dette $\boldsymbol{M_T}$, $\boldsymbol{M_S}$ e $\mathbf{m_a}$ le masse della Terra, del Sole e dell'astronave e **D** la distanza Terra-Sole (ovvero il semiasse maggiore dell'orbita terrestre), si ha:

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m_a}{d^2} = \frac{1}{100} \cdot \frac{G \cdot M_S \cdot m_a}{(D-d)^2} \qquad \text{da cui ricaviamo: } \frac{D-d}{d} = \sqrt{\frac{M_S}{100\ M_T}}$$

e infine:

$$d = \frac{D}{\sqrt{\frac{M_S}{100\ M_T}} + 1} \simeq \frac{149.6 \cdot 10^6\ \text{km}}{\sqrt{\frac{1.989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{5.972 \cdot 10^{26}\ \text{kg}}} + 1} \simeq 2.548 \cdot 10^6\ \text{km}\,.$$

Per calcolare il tempo **t** che una richiesta d'aiuto via radio impiega per raggiungere i radiotelescopi terrestri, dobbiamo ricordare che i segnali radio sono onde elettromagnetiche e pertanto viaggiano alla velocità della luce **c**:

$$t = \frac{d}{c} \simeq \frac{2.548 \cdot 10^6\ \text{km}}{299792\ \frac{\text{km}}{\text{s}}} \simeq 8.50\ \text{s}$$