XIX Olimpiadi Italiane di Astronomia

Corso di preparazione alla Finale Nazionale

Categoria Senior – Lezione 1

Problema 1

La Luna si allontana dalla Terra a una velocità $V_a \sim 3.8$ cm/anno. Tra quanto tempo non sarà più possibile osservare eclissi totali di Sole?

Soluzione.

Le eclissi totali di Sole non avranno più luogo quando da un qualsiasi punto sulla superficie della Terra il diametro apparente della Luna al perigeo sarà minore del diametro apparente del Sole all'afelio $\mathbf{D_{\odot A}}$. Detta $\mathbf{d_{TA}}$ la distanza della Terra dal Sole all'afelio e $\mathbf{R_{\odot}}$ il raggio del Sole, il diametro angolare del Sole all'afelio vale:

$$D_{\odot A} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_{\odot}}{d_{TA}}\right) \simeq 2 \cdot sin^{-1}\left(\frac{6.955 \cdot 10^5\ km}{152.1 \cdot 10^6\ km}\right) \simeq 0°.5240 \simeq 31'.44$$

Detto $\mathbf{R_{Luna}}$ il raggio della Luna, la distanza di fine eclissi $\mathbf{d_{FE}}$ è quella dalla quale il disco lunare sottende un angolo $\alpha = 31'.44$ ed è data da:

$$d_{FE} = \frac{2\ R_{Luna}}{\sin\alpha} \simeq \frac{3476\ \text{km}}{\sin 0°.5240} \simeq 380.1 \cdot 10^3\ \text{km}$$

Detti $\mathbf{a_{Luna}}$ ed $\mathbf{e_{Luna}}$ il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita lunare, la distanza attuale del centro della Luna al perigeo $\mathbf{d_P}$ dal centro della Terra vale: $d_P = a_{Luna}\,(1 - e_{Luna}) \simeq 363.3 \cdot 10^3$ km

Detto $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra, la distanza minima di un punto sulla superficie della Terra dal centro della Luna $\mathbf{d_{TP}}$ si ha quando la Luna è al perigeo ed è vista allo zenith (circostanza che può verificarsi solo per la fascia di latitudini tra circa +28° e -28°) e vale: $d_{TP} = d_P - R_T \simeq 356.9 \cdot 10^3$ km

Quindi il tempo **T** necessario affinché la distanza della Luna al perigeo diventi uguale a d_{FE} è dato da:

$$T = \frac{d_{FE} - d_{TP}}{V_a} \simeq \frac{380.1 \cdot 10^8\text{cm} - 356.9 \cdot 10^8\ \text{cm}}{3.8\ \frac{cm}{anno}} \simeq 610 \cdot 10^6\ \text{anni}$$

Nota: nella soluzione si assume che la velocità di allontanamento, le eccentricità dell'orbita lunare e dell'orbita della Terra e il raggio del Sole rimangano costanti; tuttavia anche considerando le loro variazioni si stima che le eclissi totali di Sole non saranno più osservabili da nessun punto della superficie della Terra tra $\sim 600 \cdot 10^6$ anni.

Problema 2

La stella Castore (= **α** Gem) ha una parallasse di 0''.0761 ed è un sistema binario visuale con periodo di rivoluzione di 306 anni. Il semiasse maggiore dell'orbita delle componenti forma un angolo di 90° rispetto alla direzione di osservazione e le sue dimensioni angolari sono **β** = 6''. Determinare la somma delle masse delle due componenti in unità della massa del Sole.

Soluzione.

Detta **D** la distanza di Castore dal Sole e **π** la sua parallasse si ha:

$$D = \frac{1}{\pi} \simeq \frac{1}{0''.0761} \simeq 13.1\, pc \simeq 4.05 \cdot 10^{14}\, km$$

Possiamo calcolare le dimensioni lineari **a** del semiasse maggiore dell'orbita dalle sue dimensioni apparenti. Poiché il piano dell'orbita è perpendicolare alla direzione di osservazione sarà:

$$a = D \cdot \tan\beta \simeq 4.05 \cdot 10^{14}\, km \cdot \tan\left(\frac{6''}{3600}\right) \simeq 1.18 \cdot 10^{10}\, km$$

Dette **M** e **m** le masse delle due componenti e **T** il periodo di rivoluzione, dalla III Legge di Keplero generalizzata ricaviamo:

$$M + m = \frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} \simeq \frac{39.48 \cdot 1.64 \cdot 10^{39}\, m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\, \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 9.33 \cdot 10^{19}\, s^2} \simeq 1.04 \cdot 10^{31}\, kg \simeq 5.23\, M_{\odot}$$

Problema 3

Intorno a una stella a 10 a.l. dal Sole è stato scoperto un pianeta di massa $M_a = 6.5 \cdot 10^{24}\ kg$, che percorre intorno ad essa in 20 anni un'orbita circolare, perpendicolare alla direzione di osservazione e il cui semiasse maggiore sottende un angolo $\boldsymbol{\alpha}$ = 4".89. Si calcoli la massa della stella in unità di masse solari. Quanto varrebbe il periodo di rivoluzione del pianeta se orbitasse intorno al Sole?

Soluzione.

Poiché l'orbita è perpendicolare alla direzione di osservazione, detta **D** la distanza della stella dal Sole. Il valore del semiasse maggiore **a** si ricava dalla relazione:

$$a = D \cdot \tan\alpha \simeq 9460.7 \cdot 10^{10}\ \text{km} \cdot \tan\left(\frac{4''.89}{3600}\right) \simeq 224 \cdot 10^{7}\ \text{km}$$

Detta $\mathbf{M_S}$ la massa della stella e **T** il periodo orbitale del pianete , dalla III Legge di Keplero ricaviamo:

$$\mathrm{M_s} + \mathrm{M_a} = \frac{4\,\pi^2 \cdot \mathrm{a}^3}{\mathrm{G} \cdot \mathrm{T}^2} = \frac{39.48 \cdot 1.12 \cdot 10^{37}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 3.98 \cdot 10^{17}\ s} \simeq 1.66 \cdot 10^{31}\ \text{kg}$$

Poiché la massa del pianeta è trascurabile rispetto a tale valore, il risultato corrisponde alla massa della stella e in masse solari si ha:

$$\mathrm{M_s} \simeq 1.66 \cdot 10^{31}\ \text{kg} \simeq 8.35\ \mathrm{M_\odot}$$

Il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta in unità astronomiche vale:

$$\mathrm{a} = 224 \cdot 10^{7}\ \text{km} \simeq 15.0\ UA$$

Quindi il periodo di rivoluzione $\mathbf{T_S}$ del pianeta attorno al Sole in anni varrebbe:

$$\mathrm{T_S} = \sqrt{\mathrm{a}^3} \simeq 58\ \text{anni}$$

Problema 4

L'asteroide Pallas ha un raggio medio R = 512 km, l'accelerazione di gravità alla sua superficie vale: g = 0.210 m/s^2. Calcolare la densità dell'asteroide in kg/m^3 e in g/cm^3 e la sua velocità di fuga. Calcolare la velocità $\mathbf{v_i}$ di impatto con l'asteroide di un corpo di piccola massa lasciato cadere, da fermo, da una distanza h = 800 km dalla superficie.

Soluzione

L'asteroide ha un volume **V** pari a: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 56.2 \cdot 10^7\ km^3 = 56.2 \cdot 10^{16}\ m^3$.

Nota l'accelerazione di gravità alla sua superficie ricaviamo la massa **M** di Pallas:

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G} \simeq \frac{0.210\ \frac{m}{s^2} \cdot 2.62 \cdot 10^{11}\ m^2}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2}} \simeq 8.24 \cdot 10^{20}\ kg$$

e la sua densità: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{8.25 \cdot 10^{20}\ kg}{56.2 \cdot 10^{16}\ m^3} \simeq 1470\ \frac{kg}{m^3} = 1.47\ \frac{g}{cm^3}$

La velocità di fuga v_f dall'asteroide vale:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20}\ kg}{512000\ m}} \simeq 463\ \frac{m}{s} = 0.463\ \frac{km}{s}$$

La distanza da cui cade il corpo è dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni di Pallas. Dalla legge di conservazione dell'energia meccanica, posto **H** = h + R ed essendo la velocità iniziale $v_0 = 0$, si ha:

$$\frac{1}{2}\, m\, v_i^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

da cui:

$$v_i = \sqrt{2\,G\,M\left(\frac{H-R}{HR}\right)} = \sqrt{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20}\ kg\left(\frac{800 \cdot 10^3\ m}{6.72 \cdot 10^{11} \cdot m^2}\right)} \simeq 362\ \frac{m}{s}$$

Problema 5

Un orso può correre a una velocità massima v = 9 m/s. Calcolare le dimensioni minime di un corpo di forma sferica della fascia di Kuiper dal quale un orso non potrebbe sfuggire.

Soluzione.

La velocità minima $\mathbf{V_1}$ per cui l'orso può staccarsi dalla superficie senza ricadere è la prima velocità cosmica: $V_1 = \sqrt{\frac{G M}{r}}$, che lo porterà in orbita circolare. Detta $\boldsymbol{\rho}$ la densità del corpo, il corrispondente raggio $\mathbf{r_1}$ dell'asteroide vale: $r_1 = V_1 \sqrt{\frac{3}{4 \pi G \rho}}$. La densità dell'asteroide non è data, tuttavia è noto che i corpi della fascia di Kuiper sono composti per la quasi totalità di ghiaccio, e quindi possiamo assumere: $\rho \simeq 920 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, da cui:

$$r_1 = V_1 \sqrt{\frac{3}{4 \pi G \rho}} \simeq 9 \frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{3}{4 \pi \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 920 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} \simeq 17.7 \cdot 10^3 \,\mathrm{m} = 17.7 \,\mathrm{km}$$

Per allontanarsi indefinitamente dall'asteroide la velocità dell'orso deve essere pari alla seconda velocità cosmica (o velocità di fuga) $V_f = \sqrt{\frac{2 G M}{r}}$, da cui si ricava il corrispondente raggio $\mathbf{r_2}$ dell'asteroide:

$$r_2 = V_f \sqrt{\frac{3}{8 \pi G \rho}} \simeq 9 \frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{3}{8 \pi \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 920 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} \simeq 12.5 \cdot 10^3 \mathrm{m} = 12.5 \,\mathrm{km}$$

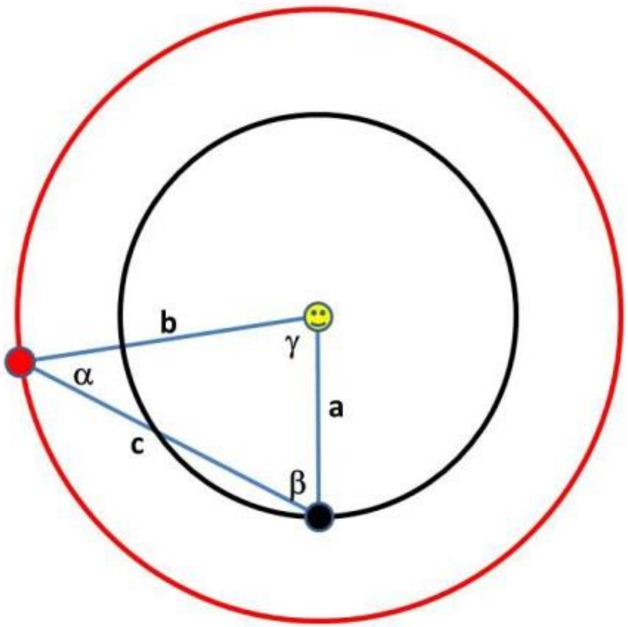
Quindi detto **R** il raggio dell'asteroide: se R < 12.5 km l'orso potrà sfuggire; se 12.5 km < R < 17.7 km, l'orso entrerà in orbita intorno all'asteroide; se R > 17.7 km l'orso finirà per ricadere sull'asteroide.

Nota: la soluzione numerica di questo problema dipende dalla densità assunta per l'asteroide. Ogni assunzione diversa da quella indicata, purchè motivata, è da considerare corretta. Anche una soluzione in cui il raggio è calcolato lasciando la densità come incognita è da considerare corretta, ad esempio: $r_1 = 538 \; kg^{\frac{1}{2}} \cdot m^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}}$

Problema 6

Quanto vale la distanza Terra - Marte quando la distanza angolare Marte - Sole vista dalla Terra è di 60°? Si consideri per le distanze Terra - Sole e Marte - Sole un valore pari al semiasse maggiore dell'orbita.

Soluzione.



Utilizziamo la relazione che lega tra di loro i lati e gli angoli di un triangolo qualsiasi (Teorema dei seni o Teorema di Eulero):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Con riferimento alla figura a sinistra, poiché a = 1 UA, b = 1.523 UA e **β** = 60° considerando primo e secondo termine avremo:

$$\frac{1\ \mathrm{UA}}{\sin\alpha} = \frac{1.523\ \mathrm{UA}}{0.8660}$$

da cui:

$$\alpha = arcsen\,\frac{0.8660}{1.523} \simeq 34°.65$$

Da cui segue: **γ** ≃ 180° - 60° - 34°.65 ≃ 85°.35

Considerando il primo ed il terzo termine avremo infine: $\frac{1\ UA}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$

da cui ricaviamo:

$$c = \frac{\sin\gamma\ \cdot 1\ UA}{\sin\alpha} \simeq \frac{0.9967\ \cdot 1\ UA}{0.5686} \simeq 1.753\ UA\ \simeq 262.2\ \cdot\ 10^6\ km$$

Problema 7

La stazione spaziale Internazionale (ISS) orbita intorno alla Terra su un'orbita circolare con una velocità $V_{ISS} = 7.66$ km/s. Determinare l'altezza sulla superficie dell'orbita della ISS e il suo periodo di rivoluzione. Se un osservatore posto al livello del mare vede la ISS transitare allo zenith, quanto dura, trascurando la rotazione della Terra, la visibilità della ISS da un orizzonte all'altro?

Soluzione.

Poiché la ISS è in orbita circolare stabile, la sua velocità è pari alla prima velocità cosmica. Detti **h** l'altezza sulla superficie e **R** il raggio della Terra il modulo della velocità vale:

$$V_{ISS} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R+h}}$$

da cui ricaviamo:

$$h = \frac{G \cdot M}{{V_{ISS}}^2} - R \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{5.87 \cdot 10^7 \frac{m^2}{s^2}} - 6378000 \simeq 415\ \mathrm{km}$$

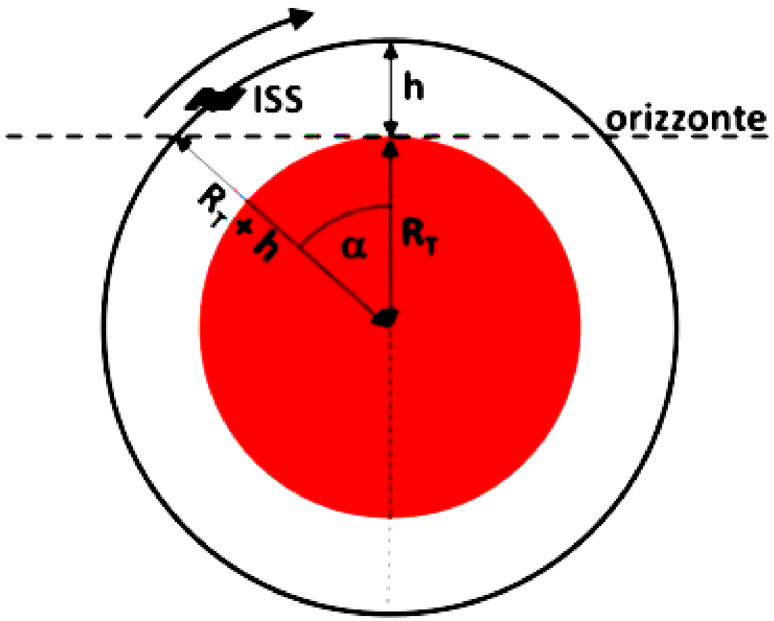
Il periodo di rivoluzione **T** è dato dalla relazione:

$$T = \frac{2\pi\,(R+h)}{V_{ISS}} \simeq \frac{2\pi \cdot 6793 \cdot 10^3\ m}{7.66 \cdot 10^3\ \frac{m}{s}} \simeq 5570\ \mathrm{s} \simeq 1\mathrm{h}\ 32.8\ \mathrm{m}$$

Segue…..

Problema 7

Segue Soluzione



La configurazione di un passaggio zenitale, trascurando la rotazione della Terra, è illustrata nella figura a sinistra.

La ISS risulterà visibile per tutto il tempo impiegato per percorrere un angolo $\varphi = 2\boldsymbol{\alpha}$.

Se, in prima approssimazione, assumiamo che la rifrazione atmosferica all'orizzonte (il cui valore è ~35') possa essere semplicemente aggiunta ad $\boldsymbol{\alpha}$. Avremo:

$$\varphi = 2\,\boldsymbol{\alpha} + 70'$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right) = 19°.97$$

$$\varphi = 2\,\boldsymbol{\alpha} + 70' = 41°.11$$

Detto $\mathbf{T_{passaggio}}$ il tempo per cui la ISS rimane visibile, per un passaggio zenitale vale la proporzione

$$T : 360° = T_{passaggio} : \varphi$$

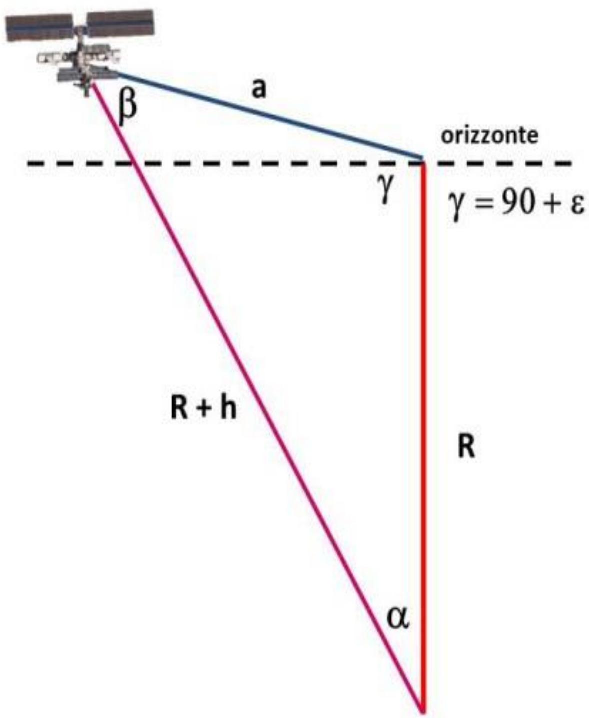
da cui si ricava:

$$T_{passaggio} = \frac{\varphi \cdot T}{360°} \simeq \frac{41°.11 \cdot 5570\ s}{360°} \simeq 636\ s = 10.6\ m$$

Problema 8

Con i dati del problema precedente, si consideri che la ISS diventa ben visibile a occhio nudo anche nei centri abitati ($m \leq 0$) per un'altezza sull'orizzonte maggiore di 10°. Quanto dura la visibilità per un passaggio zenitale della ISS per un'altezza sull'orizzonte maggiore di 10°? Quanto vale la distanza tra la ISS e l'osservatore nel momento in cui la ISS si trova 10° sopra l'orizzonte?

Soluzione.



La configurazione descritta nel problema è schematizzata nella figura a sinistra, dove **R** è il raggio della Terra e **h** l'altezza della ISS rispetto alla superficie terrestre. Tenendo conto della rifrazione (che a 10° sull'orizzonte è ~ 5') la ISS avrà un'altezza di 10° sull'orizzonte quando $\varepsilon = 9°\ 55' = 9°.92$ e quindi $\boldsymbol{\gamma} = 99°.92$.

Dal teorema dei seni sappiamo che:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{R+h}{\sin\gamma} = \frac{R}{\sin\beta}$$

e considerando il secondo e il terzo termine:

$$\beta = \arcsin\frac{R \cdot \sin 99°.92}{R+h} \simeq \arcsin\frac{6283}{6793} = 67°.65$$

Sappiamo inoltre che: $\boldsymbol{\alpha} \simeq 180° - 67°.65 - 99°.92 \simeq 12°.43$, da cui:

$$a = \frac{R \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} \simeq 1480 \text{ km}$$

Detto $\mathbf{T_{passaggio\text{-}10}}$ il tempo per cui la ISS rimane visibile 10° sopra l'orizzonte, per un passaggio zenitale vale la proporzione $T : 360° = T_{passaggio\text{-}10} : 2\alpha$, da cui si ricava:

$$T_{passaggio-10} = \frac{2\alpha \cdot T}{360°} \simeq \frac{24°.86 \cdot 5570 \text{ s}}{360°} \simeq 385 \text{ s} \simeq 6 \text{ m } 25\text{s}$$

Problema 9

Una galassia a spirale ha una magnitudine assoluta integrata M_T = -20.17 e un raggio di $2 \cdot 10^4$ anni luce. Stimate, in prima approssimazione, la velocità di fuga per un oggetto posto sul piano galattico alla distanza di $2 \cdot 10^5$ anni luce dal centro della galassia. Si assuma che la massa delle stelle sia circa la metà della massa "ordinaria" della galassia.

Soluzione.

In prima approssimazione, possiamo stimare il numero di stelle **n** che compongono la galassia dal valore della magnitudine assoluta, ipotizzando che siano tutte uguali al Sole. Avremo quindi:

$$M_T - M_\odot = -2.5 \log \frac{F_T}{F_\odot} = -2.5 \log \frac{n\, F_\odot}{F_\odot} = -2.5 \log n$$

$$n = 10^{\left(\frac{M_\odot - M_T}{2.5}\right)} \simeq 10^{\left(\frac{4.83+20.17}{2.5}\right)} \simeq 10^{10}.$$

Detta $\mathbf{M_{stelle}}$ la massa totale delle stelle, la massa totale "ordinaria" $\mathbf{M_{T\_Ord}}$ della galassia vale:

$$M_{T\_Ord} = 2\, M_{stelle} \simeq 2 \cdot 10^{10} \cdot M_\odot \simeq 2 \cdot 10^{10} \cdot 1.989 \cdot 10^{30} kg \simeq 4 \cdot 10^{40}\, kg$$

Dagli studi sulla dinamica delle galassie a spirale, sappiamo che esiste della materia non visibile, la cosiddetta "materia oscura". La materia oscura contribuisce per circa 84% della massa gravitazionale totale delle galassie. Quindi la massa della galassia per gli effetti gravitazionali M_{Grav} sarà:

$$M_{Grav} \simeq 6.25\, M_{T_{Ord}} \simeq 2.5 \cdot 10^{41}\, kg$$

La distanza **R** a cui vogliamo calcolare la velocità di fuga è 10 volte il raggio della galassia. Facciamo quindi l'ipotesi che tutta la massa della galassia, inclusa quella oscura, sia all'interno di tale distanza. Con questa assunzione, ai fini degli effetti gravitazionali possiamo considerare tutta la massa come concentrata al centro della galassia e la velocità di fuga v_f vale quindi:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\, G\, M_{Grav}}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 2.5 \cdot 10^{41}\ \mathrm{kg}}{1.89 \cdot 10^{21}\ \mathrm{m}}} \simeq 13 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq 130\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Problema 10

Una massa "M" viene divisa in due parti di massa "m" e "M-m", che vengono allontanate a una distanza "d". Trovare il rapporto m/M che rende massima la forza gravitazionale tra le due parti.

Soluzione.

La forza di gravità tra le due masse è data dalla relazione:

$$F = G\,\frac{m\,(M - m)}{d^2} = \frac{G}{d^2}\,(mM - m^2)$$

dove il termine $\frac{G}{d^2}$ è costante, mentre il termine $(mM - m^2)$ è una funzione di "m".

$m =$	$F \propto$
$\frac{M}{8}$	$0.109\,M^2$
$\frac{M}{6}$	$0.139\,M^2$
$\frac{M}{4}$	$0.188\,M^2$
$\frac{M}{2.1}$	$0.249\,M^2$
$\frac{M}{2}$	$0.250\,M^2$
$\frac{M}{1.9}$	$0.249\,M^2$
$\frac{M}{1.5}$	$0.222\,M^2$
$\frac{M}{1.3}$	$0.178\,M^2$
$\frac{M}{1.2}$	$0.139\,M^2$

Per determinare il massimo della funzione possiamo usare un criterio algebrico o uno analitico.

Criterio algebrico:

calcoliamo la forza ponendo $m = \frac{M}{n}$ per valori decrescenti di n:

$$F = \frac{G}{d^2}\,\frac{(n-1)\,M^2}{n^2}$$

Dai dati riportati nella tabella a sinistra vediamo che la forza sarà massima quando n = 2, ovvero quando la massa "M" è divisa in due parti uguali.

Criterio analitico:

un massimo della funzione $(mM - m^2)$ si ottiene uguagliando a zero la sua derivata prima: $\frac{d}{dm}\,(mM - m^2) = M - 2m = 0$

da cui otteniamo che la forza sarà massima quando: $m = \frac{M}{2}$, ovvero quando la massa "M" è divisa in due parti uguali.

Problema 11

Un corpo di piccola massa viene lanciato radialmente dalla superficie di un pianeta, che assumiamo perfettamente sferico, con una velocità pari alla metà della velocità di fuga. Calcolare a che distanza dal centro del pianeta la velocità del corpo si annulla. Trovare una relazione che leghi il rapporto tra la velocità iniziale del corpo e quella di fuga con l'altezza raggiunta.

Soluzione.

Scriviamo la legge di conservazione dell'energia meccanica indicando con **R** il raggio del pianeta di massa **M**, con **m** la massa del corpo e con **H** la distanza dal centro del pianeta in cui la velocità del corpo si annulla.

Poiché la velocità di fuga $\mathbf{v_f}$ è data dalla relazione $v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}$, avremo:

$$\frac{1}{2}\,m\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}\right)^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H} \qquad \text{da cui: } \frac{1}{4}\,\frac{G\,M\,m}{R} - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

e quindi: $\frac{1}{4\,R} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{H}$ $\qquad -\frac{3}{4R} = -\frac{1}{H}$ $\qquad$ e infine: $H = \frac{4}{3}\,R$

Indichiamo adesso con **K** il rapporto tra la velocità con cui viene lanciato il corpo **v** e la velocità di fuga con:

$0 \leq v \leq v_f$: $\quad K = \frac{v}{v_f}$

La legge di conservazione dell'energia meccanica assume la forma:

$$\frac{1}{2}\,m\left(K\sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}\right)^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

da cui ricaviamo: $\frac{K^2}{R} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{H}$ $\qquad$ e infine: $H = \frac{R}{1-K^2}$

Per K = ½ otteniamo il valore: $H = \frac{4}{3}$ R, se invece v = 0 avremo K = 0 e quindi H=R, mentre se $v = v_f$ avremo K =1 e il corpo raggiungerà una distanza infinita dal pianeta.

Problema 12

Si consideri una cometa con un nucleo di forma approssimativamente sferica e raggio $R_C = 2\ km$ e con densità media $\rho_C = 500\ \frac{kg}{m^3}$ in avvicinamento al pianeta Giove. Si calcoli, approssimativamente, a quale distanza dalla superficie di Giove le forze mareali cominceranno a disgregare il nucleo della cometa.

Soluzione.

Il valore del limite di Roche dipende anche dalla natura del corpo in avvicinamento. La cometa in esame è un corpo poco compatto, come indicato dalla sua densità pari a metà di quella dell'acqua. La sua massa $\mathbf{M_C}$ vale:

$$\mathrm{M_C} = \rho_C \frac{4}{3}\pi \mathrm{R_C}^3 \simeq 500 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{4}{3}\pi\,(2000\ \mathrm{m})^3 \simeq 1.68 \cdot 10^{13}\ \mathrm{kg}$$

Per un corpo poco compatto, una buona approssimazione del limite di Roche **d** è data dalla relazione:

$$\mathrm{d} \approx 2.44\ \mathrm{R_c} \sqrt[3]{\frac{\mathrm{M_{Giove}}}{\mathrm{m_{cometa}}}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{\mathrm{M_{Giove}}}{\rho_C}}$$

dove d è calcolata rispetto al centro di Giove. Utilizzando la seconda relazione abbiamo:

$$\mathrm{d} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{1.899 \cdot 10^{27}\ \mathrm{kg}}{500\ \frac{kg}{m^3}}} \approx 23.6 \cdot 10^4\ \mathrm{km}$$

Detto $\mathrm{R_G}$ il raggio di Giove, il valore trovato è: $\mathrm{d} \approx 3.3\ \mathrm{R_G}$ e quindi, la distanza **D** dalla superficie di Giove dove le forze mareali cominceranno a disgregare la cometa è:

$$\mathrm{D} = \mathrm{d} - \mathrm{R_G} \approx 2.3\ \mathrm{R_G} \approx 16.5 \cdot 10^4\ \mathrm{km}.$$

Problema 13

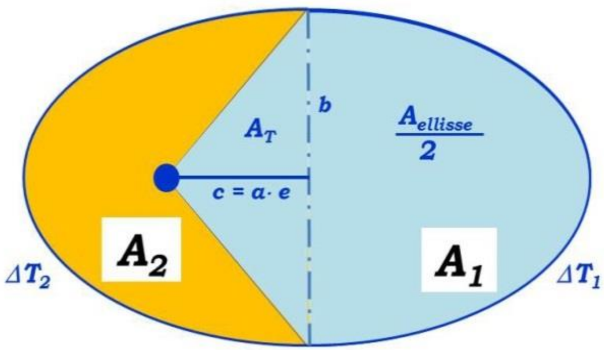
Una cometa descrive un'orbita con eccentricità e = 0.921 e distanza dal Sole al perielio di 0.451 UA. Consideriamo le due semi-orbite separate dall'asse minore dell'ellisse. Quando tempo impiega la cometa per percorre ognuna delle due semi-orbite?

Soluzione

Deriviamo i parametri dell'orbita della cometa. Per i semiassi **a** e **b** ricaviamo:

$$a = \frac{d_P}{(1-e)} \simeq \frac{0.451}{0.079} \simeq 5.71 \text{ UA} \qquad b = a\sqrt{1-e^2} \simeq 5.71 \cdot 0.390 \simeq 2.23 \text{ UA}$$

Il periodo orbitale **T** in anni vale: $T = \sqrt{a^3} \simeq \sqrt{186} \simeq 13.6 \text{ anni}$



L'area totale dell'ellisse è data dalla relazione:

$$A_{ellisse} = \pi\, a\, b \simeq 40.0 \text{ UA}^2$$

L'area della semi-orbita $\mathbf{A_2}$ vale: $A_2 = \frac{A_{ellisse}}{2} - a \cdot e \cdot b \simeq 8.3 \text{ UA}^2$

Dalla II legge di Keplero sappiamo che: $\Delta T_n : A_n = T : A_{ellisse}$

e quindi: $$\Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A_{ellisse}} \simeq \frac{8.3 \text{ UA}^2 \cdot 13.6 \text{ anni}}{40.0 \text{ UA}^2} \simeq 2.8 \text{ anni}$$

Ovviamente per l'altra semi-orbita valgono le relazioni:

$$A_1 = \frac{A_{ellisse}}{2} + a \cdot e \cdot b \simeq 31.7 \text{ UA}^2 \qquad \Delta T_1 = \frac{A_1 \cdot T}{A_{ellisse}} \simeq \frac{31.7 \text{ UA}^2 \cdot 13.6 \text{ anni}}{40.0 \text{ UA}^2} \simeq 10.8 \text{ anni}$$

Nota: soluzione alternativa

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{A_1}{A_2} \qquad \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} + 1 = \frac{A_1}{A_2} + 1 \qquad \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{\Delta T_2} = \frac{A_1 + A_2}{A_2} \qquad \frac{T}{\Delta T_2} = \frac{A}{A_2} \qquad \Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A}$$

$$A_2 = \frac{\pi\, a\, b}{2} - a \cdot e \cdot b = \left(\frac{\pi}{2} - e\right) ab \qquad \Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - e\right) ab \cdot T}{\pi\, a\, b} = \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{\pi}\right) T \simeq 2.8 \text{ anni}$$

$$\Delta T_1 = \frac{A_1 \cdot T}{A} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + e\right) ab \cdot T}{\pi\, a\, b} = \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{\pi}\right) T \simeq 10.8 \text{ anni}$$

Problema 14

Il limite inferiore dell'anello D e il limite superiore dell'anello A di Saturno ruotano intorno al pianeta con velocità tangenziali rispettivamente di: $v_D \simeq 23.80\ \mathrm{km/s}$ e $v_A \simeq 16.65\ \mathrm{km/s}$. Sapendo che gli anelli sono composti in massima parte da acqua allo stato ghiacciato ($\rho_{ghiaccio} \simeq 920\ \mathrm{kg/m^3}$), verificate se gli anelli si trovano all'interno del limite di Roche di Saturno. Considerate accettabile una tolleranza del 10% sui risultati ottenuti.

Soluzione.

Dalla formula della prima velocità cosmica, si ottiene che il limite inferiore dell'anello D e il limite superiore dell'anello A si trovano a distanze $\mathbf{d_D}$ e $\mathbf{d_A}$ dal centro di Saturno rispettivamente pari a:

$$d_D = \frac{G\,M_{Saturno}}{{v_D}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kg}}{566.4 \cdot 10^6\,\frac{m^2}{s^2}} \simeq 67.00 \cdot 10^6\ \mathrm{m} = 67.00 \cdot 10^3\ \mathrm{km}$$

$$d_A = \frac{G\,M_{Saturno}}{{v_A}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kg}}{277.2 \cdot 10^6\,\frac{m^2}{s^2}} \simeq 136.9 \cdot 10^6\ \mathrm{m} = 136.9 \cdot 10^3\ \mathrm{km}$$

Per gli anelli una buona approssimazione del limite di Roche è data dalla relazione:

$$d \approx 1.51\sqrt[3]{\frac{M_{Saturno}}{\rho_{ghiaccio}}} \approx 1.51\sqrt[3]{\frac{5.685 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kg}}{920\,\frac{kg}{m^3}}} \approx 128.6 \cdot 10^6\ \mathrm{m} = 128.6 \cdot 10^3\ \mathrm{km}$$

Quindi, considerando le approssimazioni usate e una tolleranza del 10% (pari a circa $12.9 \cdot 10^3\ \mathrm{km}$), possiamo affermare che fino al bordo superiore dell'anello A l'intera struttura degli anelli si trova all'interno del limite di Roche di Saturno.

Problema 15

Supponete che, improvvisamente, il 5 luglio 2084 la massa del Sole diminuisca del 50%. Verificate se la Terra resterebbe ancora in orbita attorno al Sole.

Soluzione.

La velocità orbitale della Terra $\mathbf{v_r}$ dipende dalla distanza **r** dal Sole.

Detto **a** il semiasse maggiore dell'orbita, la velocità media $\boldsymbol{v_m}$ con cui la Terra si muove intorno al Sole è data dalla relazione (prima velocità cosmica):

$$v_m = \sqrt{\frac{G\,M_{Sole}}{a}}.$$

A una distanza dal Sole pari ad **a**, la velocità $\mathbf{v_{par}}$ che porterebbe la Terra su un'orbita parabolica (o seconda velocità cosmica) vale:

$$v_{par} = \sqrt{\frac{2\,G\,M_{Sole}}{a}}.$$

Nel momento in cui la massa del Sole si dimezza, la nuova velocità parabolica $\mathbf{v_{par-N}}$ vale:

$$v_{par-N} = \sqrt{\frac{2\,G\,M_{Sole}}{2\,a}} = v_m$$

e sarebbe quindi uguale alla velocità orbitale media quando la massa del Sole è pari al valore attuale.

Il 5 luglio la Terra si trova in prossimità dell'afelio e quindi:

$$r > a$$

e poiché si avrebbe: $v_r < v_m$ e quindi $v_r < v_{par-N}$, la Terra continuerebbe a orbitare attorno al Sole.

Nota: allo stesso risultato si può arrivare calcolando l'energia meccanica totale, che con la Terra all'afelio risulta minore di zero (indicando quindi un'orbita ellittica) anche dimezzando la massa del Sole.