XIX Olimpiadi Italiane di Astronomia

Corso di preparazione alla Finale Nazionale

Categoria Junior 2 – Lezione 1

Problema 1

La Luna si allontana dalla Terra a una velocità $V_a \sim 3.8$ cm/anno. Tra quanto tempo non sarà più possibile osservare eclissi totali di Sole?

Soluzione.

Le eclissi totali di Sole non avranno più luogo quando da un qualsiasi punto sulla superficie della Terra il diametro apparente della Luna al perigeo sarà minore del diametro apparente del Sole all'afelio $\mathbf{D_{\odot A}}$. Detta $\mathbf{d_{TA}}$ la distanza della Terra dal Sole all'afelio e $\mathbf{R_{\odot}}$ il raggio del Sole, il diametro angolare del Sole all'afelio vale:

$$D_{\odot A} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_{\odot}}{d_{TA}}\right) \simeq 2 \cdot sin^{-1}\left(\frac{6.955 \cdot 10^5\ km}{152.1 \cdot 10^6\ km}\right) \simeq 0°.5240 \simeq 31'.44$$

Detto $\mathbf{R_{Luna}}$ il raggio della Luna, la distanza di fine eclissi $\mathbf{d_{FE}}$ è quella dalla quale il disco lunare sottende un angolo $\alpha = 31'.44$ ed è data da:

$$d_{FE} = \frac{2\ R_{Luna}}{\sin \alpha} \simeq \frac{3476\ \text{km}}{\sin 0°.5240} \simeq 380.1 \cdot 10^3\ \text{km}$$

Detti $\mathbf{a_{Luna}}$ ed $\mathbf{e_{Luna}}$ il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita lunare, la distanza attuale del centro della Luna al perigeo $\mathbf{d_P}$ dal centro della Terra vale: $d_P = a_{Luna}\,(1 - e_{Luna}) \simeq 363.3 \cdot 10^3$ km

Detto $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra, la distanza minima di un punto sulla superficie della Terra dal centro della Luna $\mathbf{d_{TP}}$ si ha quando la Luna è al perigeo ed è vista allo zenith (circostanza che può verificarsi solo per la fascia di latitudini tra circa +28° e -28°) e vale: $d_{TP} = d_P - R_T \simeq 356.9 \cdot 10^3$ km

Quindi il tempo **T** necessario affinché la distanza della Luna al perigeo diventi uguale a d_{FE} è dato da:

$$T = \frac{d_{FE} - d_{TP}}{V_a} \simeq \frac{380.1 \cdot 10^8 \text{cm} - 356.9 \cdot 10^8\ \text{cm}}{3.8\ \frac{cm}{anno}} \simeq 610 \cdot 10^6\ \text{anni}$$

Nota: nella soluzione si assume che la velocità di allontanamento, le eccentricità dell'orbita lunare e dell'orbita della Terra e il raggio del Sole rimangano costanti; tuttavia anche considerando le loro variazioni si stima che le eclissi totali di Sole non saranno più osservabili da nessun punto della superficie della Terra tra $\sim 600 \cdot 10^6$ anni.

Problema 2

La stella Castore (= **α** Gem) ha una parallasse di 0''.0761 ed è un sistema binario visuale con periodo di rivoluzione di 306 anni. Il semiasse maggiore dell'orbita delle componenti forma un angolo di 90° rispetto alla direzione di osservazione e le sue dimensioni angolari sono **β** = 6''. Determinare la somma delle masse delle due componenti in unità della massa del Sole.

Soluzione.

Detta **D** la distanza di Castore dal Sole e **π** la sua parallasse si ha:

$$D = \frac{1}{\pi} \simeq \frac{1}{0''.0761} \simeq 13.1\,pc \simeq 4.05 \cdot 10^{14}\,km$$

Possiamo calcolare le dimensioni lineari **a** del semiasse maggiore dell'orbita dalle sue dimensioni apparenti. Poiché il piano dell'orbita è perpendicolare alla direzione di osservazione sarà:

$$a = D \cdot \tan\beta \simeq 4.05 \cdot 10^{14}\,km \cdot \tan\left(\frac{6''}{3600}\right) \simeq 1.18 \cdot 10^{10}\,km$$

Dette **M** e **m** le masse delle due componenti e **T** il periodo di rivoluzione, dalla III Legge di Keplero generalizzata ricaviamo:

$$M + m = \frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} \simeq \frac{39.48 \cdot 1.64 \cdot 10^{39}\,m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 9.33 \cdot 10^{19}\,s^2} \simeq 1.04 \cdot 10^{31}\,kg \simeq 5.23\,M_{\odot}$$

Problema 3

Schematizzando la Galassia come un disco uniforme di 10^5 anni luce di diametro e spessore trascurabile, si fornisca una stima della sua massa totale in masse solari, sapendo che il Sole si trova a una distanza dal centro di circa 8.34 kpc e assumendo per l'anno galattico una durata di $233 \cdot 10^6$ anni terrestri. Stimate infine la velocità di fuga dalla Galassia a una distanza dal centro pari al doppio del suo diametro.

Soluzione.

L'anno galattico **T** vale:

$$\mathbf{T} \simeq 233 \ \cdot \ 10^6 \ \cdot 365.26 \ \cdot 24 \ \cdot 60 \ \cdot 60 \simeq 7.35 \ \cdot \ 10^{15} \mathrm{s}$$

dalla III Legge di Keplero, la massa $\mathbf{M_g}$ della Galassia entro una distanza **a** di 8.34 kpc ($\simeq 2.57 \ \cdot 10^{20}$ m) dal centro vale:

$$\mathrm{M_g} = \frac{4\,\pi^2 \ \cdot \ \mathrm{a}^3}{\mathrm{G} \ \cdot \ \mathrm{T}^2} \simeq \frac{39.48 \ \cdot 1.70 \ \cdot \ 10^{61}\, m^3}{6.674 \ \cdot \ 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \ \cdot \ 5.41 \ \cdot \ 10^{31}\, s^2} \simeq 1.86 \ \cdot \ 10^{41}\ \mathrm{kg} \simeq 93.5 \ \cdot \ 10^9\ \mathrm{M}_\odot$$

Per ottenere la massa totale della Galassia $\mathbf{M_{Galassia}}$, dobbiamo considerare che, nell'approssimazione fatta di disco uniforme, la massa è proporzionale all'area del disco su cui è distribuita. Il raggio **R** della Via Lattea è di circa 50000 anni luce $\simeq$ 15.3 kpc, per cui:

$$\mathrm{M_{Galassia}} : \pi\, \mathrm{R}^2 = \ \mathrm{M_g} \ : \ \pi\, \mathrm{a}^2$$

$$\mathrm{M_{Galalssia}} \simeq \ \mathrm{M_g} \left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{a}}\right)^2 \simeq \ 1.86 \ \cdot \ 10^{41}\mathrm{kg} \left(\frac{15.3}{8.34}\right)^2 \simeq 6.26 \ \cdot \ 10^{41}\mathrm{kg} \ \simeq 315 \ \cdot \ 10^9\ \mathrm{M}_\odot$$

La velocità di fuga $\mathbf{v_f}$ a una distanza **D** dal centro di un corpo di massa **M** è data dalla relazione:

$$\mathrm{v_f} = \sqrt{\frac{2\mathrm{GM}}{\mathrm{D}}}$$

quindi:

$$\mathrm{v_f} = \sqrt{\frac{2\ \mathrm{G}\ M_{Galassia}}{4\mathrm{R}}} \simeq \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 6.28 \cdot 10^{41}\mathrm{kg}}{1.89 \cdot 10^{21}\ \mathrm{m}}} \simeq 210 \ \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 210 \ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Problema 4

Intorno a una stella a 10 a.l. dal Sole è stato scoperto un pianeta di massa $M_a = 6.5 \cdot 10^{24}\ kg$, che percorre intorno ad essa in 20 anni un'orbita circolare, perpendicolare alla direzione di osservazione e il cui semiasse maggiore sottende un angolo **α** = 4".89. Si calcoli la massa della stella in unità di masse solari. Quanto varrebbe il periodo di rivoluzione del pianeta se orbitasse intorno al Sole?

Soluzione.

Poiché l'orbita è perpendicolare alla direzione di osservazione, detta **D** la distanza della stella dal Sole. Il valore del semiasse maggiore **a** si ricava dalla relazione:

$$a = D \cdot \tan\alpha \simeq 9460.7 \cdot 10^{10}\ \text{km} \cdot \tan\left(\frac{4''.89}{3600}\right) \simeq 224 \cdot 10^{7}\ \text{km}$$

Detta $\mathbf{M_S}$ la massa della stella e **T** il periodo orbitale del pianete , dalla III Legge di Keplero ricaviamo:

$$\mathrm{M_s} + \mathrm{M_a} = \frac{4\,\pi^2 \cdot \mathrm{a}^3}{\mathrm{G} \cdot \mathrm{T}^2} = \frac{39.48 \cdot 1.12 \cdot 10^{37}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \dfrac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 3.98 \cdot 10^{17}\ s} \simeq 1.66 \cdot 10^{31}\ \text{kg}$$

Poiché la massa del pianeta è trascurabile rispetto a tale valore, il risultato corrisponde alla massa della stella e in masse solari si ha:

$$\mathrm{M_s} \simeq 1.66 \cdot 10^{31}\ \text{kg} \simeq 8.35\ \mathrm{M}_{\odot}$$

Il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta in unità astronomiche vale:

$$\mathrm{a} = 224 \cdot 10^{7}\ \text{km} \simeq 15.0\ UA$$

Quindi il periodo di rivoluzione $\mathbf{T_S}$ del pianeta attorno al Sole in anni varrebbe:

$$\mathrm{T_S} = \sqrt{\mathrm{a}^3} \simeq 58\ \text{anni}$$

Problema 5

La stella ε Eri si trova a 10.5 anni luce dal Sole e intorno a essa ruota un pianeta, ε Eri b, che percorre un'orbita il cui semiasse maggiore vale 3.39 UA. Si calcoli la parallasse annua di ε Eri vista dalla Terra e la parallasse annua del Sole visto da ε Eri b. A quanto corrisponde un pc misurato da ε Eri b?

Soluzione.

La parallasse annua, in secondi d'arco, è pari all'inverso della distanza in parsec. Dalla Terra 1 parsec ≃ 3.2616 anni luce. Quindi detta **d** la distanza dal Sole in anni luce, ε Eri si trova a una distanza in parsec $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varepsilon}\text{-}\mathbf{Eri}}$:

$$D_{\varepsilon-\mathrm{Eri}} = \frac{d}{3.2616} \simeq 3.22 \text{ parsec}$$

e quindi la sua parallasse $\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{Eri}}$ vale:

$$\pi_{\varepsilon-\mathrm{Eri}} = \frac{1}{3.22\; parsec} \simeq 0''.311$$

Per calcolare la parallasse del Sole visto da ε Eri b, dobbiamo considerare che la parallasse dipende dalle dimensioni della "base", ovvero dal semiasse maggiore dell'orbita. Tanto maggiore è la base, tanto maggiore, a parità di distanza di una stella, sarà la sua parallasse. Detto $\boldsymbol{\pi}_{\odot}$ l'angolo di parallasse del Sole visto da ε Eri b e dato che il semiasse maggiore $\mathbf{a}_{\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{Eri}\_b}$ dell'orbita di ε Eri b è pari 3.39 UA avremo:

$$\pi_{\odot} = \tan^{-1}\left(\frac{\mathbf{a}_{\varepsilon-\mathrm{Eri}\_b}}{D_{\varepsilon-\mathrm{Eri}}}\right) \simeq \tan^{-1}\left(\frac{3.39\; UA}{664 \cdot 10^3\; UA}\right) \simeq 2^\circ.93 \cdot 10^{-4} \simeq 1''.05$$

Si noti che questo valore corrisponde a 3.39 volte la parallasse misurata dalla Terra per ε Eri, ovvero al rapporto tra il semiasse maggiore dell'orbita di ε Eri b e quello della Terra. La conversione tra parsec definiti con osservazioni dalla Terra e da ε Eri b subirà la stessa correzione, quindi:

$$1 \text{ parsec di } \varepsilon \text{ Eri b} \simeq 3.39 \text{ parsec terrestri}$$

Problema 6

L'asteroide Pallas ha un raggio medio R = 512 km, l'accelerazione di gravità alla sua superficie vale: g = 0.210 m/s^2. Calcolare la densità dell'asteroide in kg/m^3 e in g/cm^3 e la sua velocità di fuga. Calcolare la velocità $\mathbf{v_i}$ di impatto con l'asteroide di un corpo di piccola massa lasciato cadere, da fermo, da una distanza h = 800 km dalla superficie.

Soluzione

L'asteroide ha un volume **V** pari a: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 56.2 \cdot 10^7\ \mathrm{km}^3 = 56.2 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^3$.

Nota l'accelerazione di gravità alla sua superficie ricaviamo la massa **M** di Pallas:

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G} \simeq \frac{0.210\ \frac{m}{s^2} \cdot 2.62 \cdot 10^{11}\ m^2}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2}} \simeq 8.24 \cdot 10^{20}\ \mathrm{kg}$$

e la sua densità: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{8.25 \cdot 10^{20}\ \mathrm{kg}}{56.2 \cdot 10^{16}\ m^3} \simeq 1470\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1.47\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

La velocità di fuga v_f dall'asteroide vale:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20}\ \mathrm{kg}}{512000\ \mathrm{m}}} \simeq 463\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0.463\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

La distanza da cui cade il corpo è dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni di Pallas. Dalla legge di conservazione dell'energia meccanica, posto **H** = h + R ed essendo la velocità iniziale $v_0 = 0$, si ha:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_i^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

da cui:

$$v_i = \sqrt{2\,G\,M\left(\frac{H - R}{HR}\right)} = \sqrt{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20}\ \mathrm{kg}\left(\frac{800 \cdot 10^3\ \mathrm{m}}{6.72 \cdot 10^{11} \cdot \mathrm{m}^2}\right)} \simeq 362\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Problema 7

La stazione spaziale Internazionale (ISS) orbita intorno alla Terra su un'orbita circolare con una velocità V_{ISS} = 7.66 km/s. Determinare l'altezza sulla superficie dell'orbita della ISS e il suo periodo di rivoluzione. Se un osservatore posto al livello del mare vede la ISS transitare allo zenith, quanto dura, trascurando la rotazione della Terra, la visibilità della ISS da un orizzonte all'altro?

Soluzione.

Poiché la ISS è in orbita circolare stabile, la sua velocità è pari alla prima velocità cosmica. Detti **h** l'altezza sulla superficie e **R** il raggio della Terra il modulo della velocità vale:

$$V_{ISS} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R+h}}$$

da cui ricaviamo:

$$h = \frac{G \cdot M}{V_{ISS}^{\,2}} - R \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{5.87 \cdot 10^{7} \frac{m^2}{s^2}} - 6378000 \simeq 415\ \mathrm{km}$$

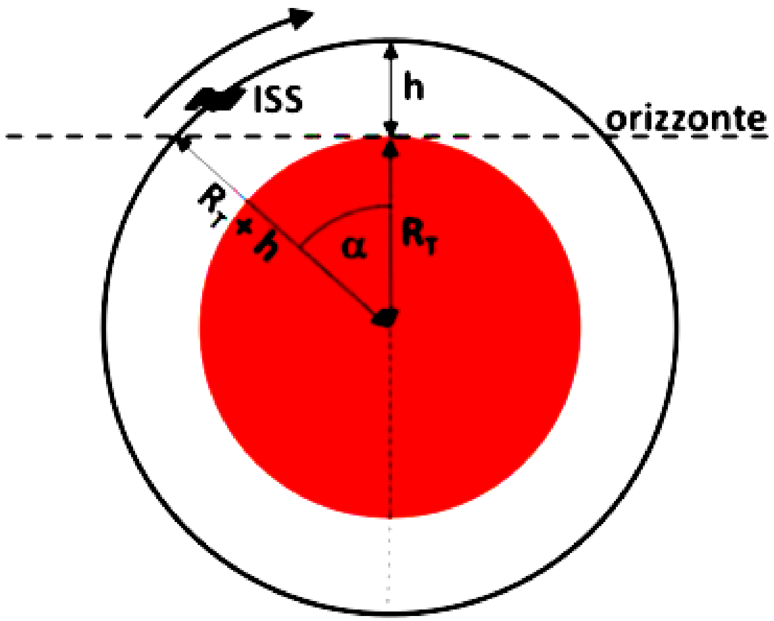
Il periodo di rivoluzione **T** è dato dalla relazione:

$$T = \frac{2\,\pi\,(R+h)}{V_{ISS}} \simeq \frac{2\,\pi \cdot 6793 \cdot 10^{3}\ m}{7.66 \cdot 10^{3}\ \frac{m}{s}} \simeq 5570\ \mathrm{s} \simeq 1\mathrm{h}\ 32.8\ \mathrm{m}$$

Segue…..

Problema 7

Segue Soluzione



La configurazione di un passaggio zenitale, trascurando la rotazione della Terra, è illustrata nella figura a sinistra.

La ISS risulterà visibile per tutto il tempo impiegato per percorrere un angolo $\varphi = 2\boldsymbol{\alpha}$.

Se, in prima approssimazione, assumiamo che la rifrazione atmosferica all'orizzonte (il cui valore è ~35') possa essere semplicemente aggiunta ad $\boldsymbol{\alpha}$. Avremo:

$$\varphi = 2\,\boldsymbol{\alpha} + 70'$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right) = 19°.97$$

$$\varphi = 2\,\boldsymbol{\alpha} + 70' = 41°.11$$

Detto $\mathbf{T_{passaggio}}$ il tempo per cui la ISS rimane visibile, per un passaggio zenitale vale la proporzione

$$T : 360° = T_{passaggio} : \varphi$$

da cui si ricava:

$$T_{passaggio} = \frac{\varphi \cdot T}{360°} \simeq \frac{41°.11 \cdot 5570\ \mathrm{s}}{360°} \simeq 636\ \mathrm{s} = 10.6\ \mathrm{m}$$

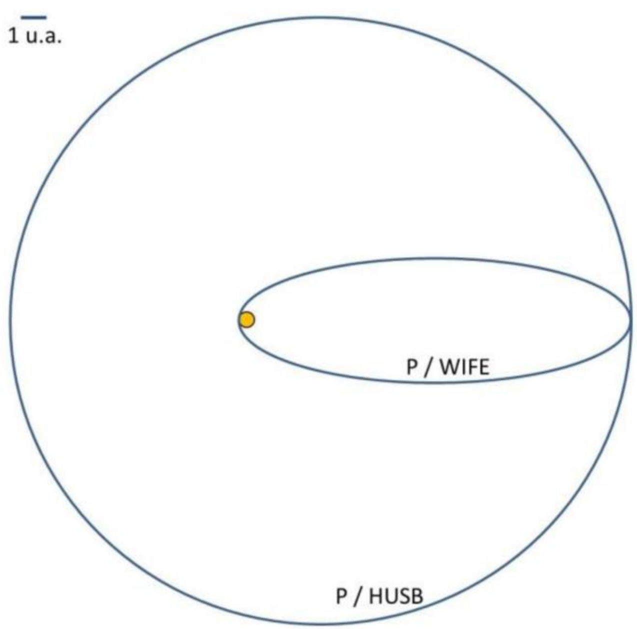
Problema 8

Disegnare sullo stesso grafico le orbite delle comete P/HUSB (e = 0.230) e P/WIFE (e = 0.950) che hanno la stessa linea degli apsidi e distanza all'afelio di 15.02 UA. Il 7 aprile 2016 le due comete si trovano entrambe al perielio, quale sarà, all'incirca, la loro configurazione a fine Agosto 2037?

Soluzione.

Dette $\mathbf{D_P}$ le $\mathbf{D_A}$ le distanze al perielio e all'afelio, **a** e **b** le lunghezze dei semiassi in UA e **T** il periodo di rivoluzione in anni, dalle relazioni: $D_P = D_a \frac{1-e}{1+e}$; $a = \frac{D_a + D_p}{2}$; $b = a\sqrt{1-e^2}$ e $T = \sqrt{a^3}$, otteniamo per le due comete i valori riportati nella seguente tabella:

Nome	D_A (UA)	D_P (UA)	a (UA)	b (UA)	e	T (anni)
P/HUSB	15.02	9.40	12.2	11.9	0.230	42.6
P/WIFE	15.02	0.385	7.70	2.40	0.950	21.4



Sapendo che le due comete hanno la stessa linea degli apsidi, otteniamo infine il grafico a sinistra, con entrambe le comete al perielio il 7 aprile 2016.

A fine Agosto 2037 saranno trascorsi circa 21.4 anni (21 anni + 4.5 mesi), un tempo pari a quello di rivoluzione di P/WIFE e pari a circa la metà di quello di rivoluzione di P/HUSB.

Quindi la cometa P/WIFE sarà nuovamente nei pressi del perielio, mentre P/HUSB si troverà nei pressi dell'afelio.

Problema 9

Calcolate il periodo di rivoluzione e la velocità tangenziale di un corpo che si muove su un'orbita circolare a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi di un buco nero con massa $M_{BN} = 2.51\ M_{\odot}$.

Soluzione.

Il "Raggio di Schwarzchild" $\boldsymbol{R_s}$ del buco nero vale:

$$R_s = \frac{2\ G\ M_{BN}}{c^2} = \frac{2\ G\ \cdot\ 2.51\ M_{\odot}}{c^2} = \frac{2\ \cdot 6.674\ \cdot\ 10^{-11}\,\dfrac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot 4.99\ \cdot\ 10^{30}\ \text{kg}}{8.988\ \cdot\ 10^{16}\ \dfrac{m^2}{s^2}} \simeq 7410\ \text{m} = 7.41\ \text{km}$$

Detto **a** (= R_S+ 10 km) il raggio dell'orbita, dalla III Legge di Keplero il periodo **T** vale:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2\ a^3}{G\ 2.51\ \cdot M_{\odot}}} = \sqrt{\frac{39.48\ \cdot\ 5.277\ \cdot\ 10^{12}\ m^3}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\,\dfrac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot\ 4.99\ \cdot\ 10^{30}\ \text{kg}}} \simeq 7.91\ \cdot\ 10^{-4}\ s$$

Con tale periodo la velocità di rivoluzione **v** risulta:

$$v = \frac{2\ \pi\ a}{T} = \frac{109.4\ \text{km}}{7.90\ \cdot\ 10^{-4}\ \text{s}} \simeq 138\ \cdot\ 10^3\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \simeq 0.461\ \text{c}$$

Nota: nella soluzione stiamo assumendo che le leggi di Keplero siano valide a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi del buco nero. La soluzione rigorosa del problema richiederebbe l'uso di relazioni derivate dalla Relatività generale.

Problema 10

Un corpo di piccola massa viene lanciato radialmente dalla superficie di un pianeta, che assumiamo perfettamente sferico, con una velocità pari alla metà della velocità di fuga. Calcolare a che distanza dal centro del pianeta la velocità del corpo si annulla. Trovare una relazione che leghi il rapporto tra la velocità iniziale del corpo e quella di fuga con l'altezza raggiunta.

Soluzione.

Scriviamo la legge di conservazione dell'energia meccanica indicando con **R** il raggio del pianeta di massa **M**, con **m** la massa del corpo e con **H** la distanza dal centro del pianeta in cui la velocità del corpo si annulla.

Poiché la velocità di fuga $\mathbf{v_f}$ è data dalla relazione $v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}$, avremo:

$$\frac{1}{2}\,m\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}\right)^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H} \qquad \text{da cui:} \quad \frac{1}{4}\,\frac{G\,M\,m}{R} - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

e quindi: $\frac{1}{4\,R} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{H}$ $\qquad -\frac{3}{4R} = -\frac{1}{H}$ $\qquad$ e infine: $H = \frac{4}{3}\,R$

Indichiamo adesso con **K** il rapporto tra la velocità con cui viene lanciato il corpo **v** e la velocità di fuga con:

$0 \leq v \leq v_f$: $\quad K = \frac{v}{v_f}$

La legge di conservazione dell'energia meccanica assume la forma:

$$\frac{1}{2}\,m\left(K\sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}\right)^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

da cui ricaviamo: $\frac{K^2}{R} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{H}$ $\qquad$ e infine: $H = \frac{R}{1-K^2}$

Per K = ½ otteniamo il valore: $H = \frac{4}{3}\,R$, se invece v = 0 avremo K = 0 e quindi H=R, mentre se $v = v_f$ avremo K =1 e il corpo raggiungerà una distanza infinita dal pianeta.

Problema 11

Si consideri una cometa con un nucleo di forma approssimativamente sferica e raggio $R_C = 2\ km$ e con densità media $\rho_C = 500\ \frac{kg}{m^3}$ in avvicinamento al pianeta Giove. Si calcoli, approssimativamente, a quale distanza dalla superficie di Giove le forze mareali cominceranno a disgregare il nucleo della cometa.

Soluzione.

Il valore del limite di Roche dipende anche dalla natura del corpo in avvicinamento. La cometa in esame è un corpo poco compatto, come indicato dalla sua densità pari a metà di quella dell'acqua. La sua massa $\mathbf{M_C}$ vale:

$$M_C = \rho_C \frac{4}{3}\pi R_C{}^3 \simeq 500 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{4}{3}\pi\,(2000\ \mathrm{m})^3 \simeq 1.68 \cdot 10^{13}\ \mathrm{kg}$$

Per un corpo poco compatto, una buona approssimazione del limite di Roche **d** è data dalla relazione:

$$d \approx 2.44\ R_c \sqrt[3]{\frac{M_{Giove}}{m_{cometa}}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{M_{Giove}}{\rho_C}}$$

dove d è calcolata rispetto al centro di Giove. Utilizzando la seconda relazione abbiamo:

$$d \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{1.899 \cdot 10^{27}\ \mathrm{kg}}{500\ \frac{kg}{m^3}}} \approx 23.6 \cdot 10^4\ \mathrm{km}$$

Detto R_G il raggio di Giove, il valore trovato è: $d \approx 3.3\ R_G$ e quindi, la distanza **D** dalla superficie di Giove dove le forze mareali cominceranno a disgregare la cometa è:

$$D = d - R_G \approx 2.3\ R_G \approx 16.5 \cdot 10^4\ \mathrm{km}.$$

Problema 12

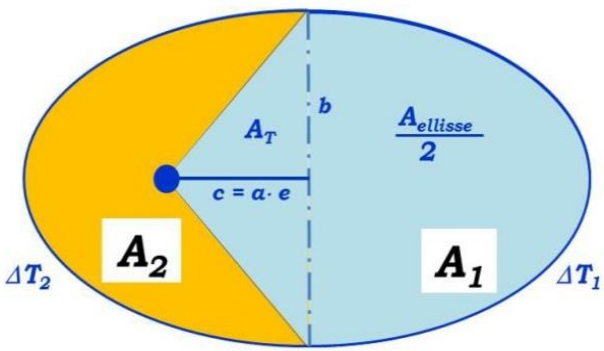
Una cometa descrive un'orbita con eccentricità e = 0.921 e distanza dal Sole al perielio di 0.451 UA. Consideriamo le due semi-orbite separate dall'asse minore dell'ellisse. Quando tempo impiega la cometa per percorre ognuna delle due semi-orbite?

Soluzione

Deriviamo i parametri dell'orbita della cometa. Per i semiassi **a** e **b** ricaviamo:

$$a = \frac{d_P}{(1-e)} \simeq \frac{0.451}{0.079} \simeq 5.71 \text{ UA} \qquad\qquad b = a\sqrt{1-e^2} \simeq 5.71 \cdot 0.390 \simeq 2.23 \text{ UA}$$

Il periodo orbitale **T** in anni vale: $T = \sqrt{a^3} \simeq \sqrt{186} \simeq 13.6$ anni



L'area totale dell'ellisse è data dalla relazione:

$$A_{ellisse} = \pi\, a\, b \simeq 40.0 \text{ UA}^2$$

L'area della semi-orbita $\mathbf{A_2}$ vale: $A_2 = \frac{A_{ellisse}}{2} - a \cdot e \cdot b \simeq 8.3 \text{ UA}^2$

Dalla II legge di Keplero sappiamo che: $\Delta T_n : A_n = T : A_{ellisse}$

e quindi: $$\Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A_{ellisse}} \simeq \frac{8.3 \text{ UA}^2 \cdot 13.6 \text{ anni}}{40.0 \text{ UA}^2} \simeq 2.8 \text{ anni}$$

Ovviamente per l'altra semi-orbita valgono le relazioni:

$$A_1 = \frac{A_{ellisse}}{2} + a \cdot e \cdot b \simeq 31.7 \text{ UA}^2 \qquad \Delta T_1 = \frac{A_1 \cdot T}{A_{ellisse}} \simeq \frac{31.7 \text{ UA}^2 \cdot 13.6 \text{ anni}}{40.0 \text{ UA}^2} \simeq 10.8 \text{ anni}$$

Nota: soluzione alternativa

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{A_1}{A_2} \qquad \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} + 1 = \frac{A_1}{A_2} + 1 \qquad \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{\Delta T_2} = \frac{A_1 + A_2}{A_2} \qquad \frac{T}{\Delta T_2} = \frac{A}{A_2} \qquad \Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A}$$

$$A_2 = \frac{\pi\, a\, b}{2} - a \cdot e \cdot b = \left(\frac{\pi}{2} - e\right) ab \qquad \Delta T_2 = \frac{A_2 \cdot T}{A} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - e\right) ab \cdot T}{\pi\, a\, b} = \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{\pi}\right) T \simeq 2.8 \text{ anni}$$

$$\Delta T_1 = \frac{A_1 \cdot T}{A} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + e\right) ab \cdot T}{\pi\, a\, b} = \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{\pi}\right) T \simeq 10.8 \text{ anni}$$

Problema 13

Il limite inferiore dell'anello D e il limite superiore dell'anello A di Saturno ruotano intorno al pianeta con velocità tangenziali rispettivamente di: $v_D \simeq 23.80\ \mathrm{km/s}$ e $v_A \simeq 16.65\ \mathrm{km/s}$. Sapendo che gli anelli sono composti in massima parte da acqua allo stato ghiacciato ($\rho_{ghiaccio} \simeq 920\ \mathrm{kg/m^3}$), verificate se gli anelli si trovano all'interno del limite di Roche di Saturno. Considerate accettabile una tolleranza del 10% sui risultati ottenuti.

Soluzione.

Dalla formula della prima velocità cosmica, si ottiene che il limite inferiore dell'anello D e il limite superiore dell'anello A si trovano a distanze $\mathbf{d_D}$ e $\mathbf{d_A}$ dal centro di Saturno rispettivamente pari a:

$$d_D = \frac{G\, M_{Saturno}}{{v_D}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \dfrac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kg}}{566.4 \cdot 10^6\ \dfrac{m^2}{s^2}} \simeq 67.00 \cdot 10^6\ \mathrm{m} = 67.00 \cdot 10^3\ \mathrm{km}$$

$$d_A = \frac{G\, M_{Saturno}}{{v_A}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \dfrac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kg}}{277.2 \cdot 10^6\ \dfrac{m^2}{s^2}} \simeq 136.9 \cdot 10^6\ \mathrm{m} = 136.9 \cdot 10^3\ \mathrm{km}$$

Per gli anelli una buona approssimazione del limite di Roche è data dalla relazione:

$$d \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{M_{Saturno}}{\rho_{ghiaccio}}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{5.685 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kg}}{920\ \dfrac{kg}{m^3}}} \approx 128.6 \cdot 10^6\ \mathrm{m} = 128.6 \cdot 10^3\ \mathrm{km}$$

Quindi, considerando le approssimazioni usate e una tolleranza del 10% (pari a circa $12.9 \cdot 10^3\ \mathrm{km}$), possiamo affermare che fino al bordo superiore dell'anello A l'intera struttura degli anelli si trova all'interno del limite di Roche di Saturno.

Problema 14

Attorno alla stella nana rossa Trappist-1, che si trova a 39 anni luce dal Sole, sono stati individuati sette pianeti, tre dei quali situati nella così detta "zona abitabile". Le stime di densità hanno mostrato che questi tre pianeti dovrebbero essere rocciosi, proprio come i pianeti interni del Sistema Solare. Supponendo che la densità media di uno di questi sia uguale a quella della Terra, trovare il più breve periodo di rotazione che questo pianeta può avere affinché un corpo all'equatore non sia espulso a causa della forza centrifuga.

Soluzione.

Il limite massimo della velocità di rotazione $\boldsymbol{v_r}$ per il quale l'attrazione gravitazionale è ancora in grado di trattenere i corpi all'equatore del pianeta è pari alla prima velocità cosmica. Detto **R** il raggio del pianeta, **M** la sua massa e $\boldsymbol{\rho}$ la sua densità si ha:

$$v_r = \sqrt{\frac{G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{4\,\pi\,\rho\,G\,R^2}{3}}$$

Poiché la densità del pianeta è pari a quella della Terra, detti $\mathbf{M_T}$ e $\mathbf{R_T}$ massa e raggio della Terra avremo:

$$\rho = \frac{3\,M_T}{4\,\pi\,{R_T}^3} \simeq \frac{3 \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}{4\,\pi \cdot 2.595 \cdot 10^{20}\ m^3} \simeq 5495\ \frac{kg}{m^3}$$

Detto **T** il periodo di rotazione, si ha:

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v_r} = \sqrt{\frac{3\,\pi}{\rho\,G}} \simeq \sqrt{\frac{3\pi}{5495\ \frac{kg}{m^3} \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}}} \simeq 5070\ s \simeq 1h\ 24m$$